POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. I. Łukasiewicza

Wydział Zarządzania

Zakład Metod Ilościowych

OPTYMALIZACJA PROCESÓW LOGISTYCZNYCH

Prowadzący:
dr Tomasz Pisula
e-mail: ***tpisula@prz.edu.pl***

❑ Treści kształcenia:

Wykład – 12
Laboratorium - 9

- **Model matematyczny problemu decyzyjnego. Zagadnienia programowania matematycznego w problemach logistycznych (W01, L01)**
- **Programowanie liniowe. Przedstawianie wybranych problemów decyzyjnych z logistyki w postaci zadań programowania liniowego. Dualizm w programowaniu liniowym. Interpretacja graficzna zadań programowania liniowego. Istota algorytmu simpleks (W02, L02)**
- **Zagadnienia i problemy transportowe. Otwarte oraz zamknięte zagadnienie transportowe. Algorytm transportowy. Zagadnienie transportowo–produkcyjne oraz transportowo-magazynowe. Zagadnienia transportowe z ograniczoną przepustowością tras. Minimalizacja pustych przebiegów. Modele zagadnień transportowych z kryterium czasu (W03-W04, L02-L03)**
- **Programowanie nieliniowe. Wybrane problemy optymalizacji nieliniowej w zastosowaniach logistycznych (W05-W06, L04)**
- **Optymalizacja dyskretna. Zagadnienie optymalnego przydziału. Problem komiwojażera. Zagadnienie rozwózki (W07-W08, L05)**

❑ Treści kształcenia:

- **Optymalizacja przepływów w sieciach transportowych. Maksymalny przepływ w sieci transportowej. Wyznaczanie najkrótszej drogi w sieci transportowej. Zagadnienie przepływu o minimalnym koszcie (W09-W10, L06-L07)**

- **Elementy wielokryterialnego wspomagania decyzji logistycznych - budowa rankingów obiektów w świetle ocen wielokryterialnych (W11)**

- **Praktyczne zaliczenie laboratorium (L08-L09)**

- **Pisemne zaliczenie wykładów (W12)**

❑ Efekty kształcenia – wiedza - umiejętności:

1. Zdobycie wiedzy o sposobach modelowania matematycznego problemów decyzyjnych w procesach logistycznych.
2. Zdobycie wiedzy o różnych metodach poszukiwania rozwiązań optymalnych w logistycznych zagadnieniach decyzyjnych.
3. Umiejętność budowania właściwych modeli matematycznych dla logistycznych problemów decyzyjnych.
4. Umiejętność rozwiązywania logistycznych problemów decyzyjnych z wykorzystaniem właściwych technik i metod optymalizacji.
5. Umiejętność praktycznego poszukiwania optymalnych rozwiązań optymalizacyjnych problemów decyzyjnych z wykorzystaniem odpowiednich narzędzi analitycznych (np. arkusza kalkulacyjnego Excel i modułu Solver).

❑ Warunki zaliczenia przedmiotu:

1. **Zaliczenie pisemne wykładów:**
- **sprawdzenie umiejętności poprawnego formułowania modeli matematycznych omawianych logistycznych problemów decyzyjnych).**

2. **Praktyczne zaliczenie laboratoriów:**
- **sprawdzenie praktycznych umiejętności modelowania i rozwiązywania wybranych logistycznych problemów decyzyjnych z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego „Excel" oraz modułu „Solver".**

3. **Ocena końcowa jest średnią ocen z zaliczenia pisemnego wykładów (z wagą 0,4) oraz zaliczenia praktycznego laboratoriów (z wagą 0,6). Obie składowe oceny muszą być pozytywne.**

❑ Literatura Podstawowa:

1. Kauf S., Tłuczak A., Optymalizacja decyzji logistycznych, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2016.
2. Bendkowski J., Kramarz M., Kramarz W., Metody i techniki ilościowe w logistyce stosowanej. Wybrane zagadnienia, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
3. Sikora W. (red.), Badania operacyjne, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2008.
4. Jędrzejczyk Z., Kukuła K. (red.), Skrzypek J., Walkosz A., Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2011.
5. Szymczak M., Decyzje logistyczne z Excelem, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2011.

❑ Literatura Uzupełniająca:

1. Dąbek A., Ćwiczenia i zadania z transportu, spedycji i logistyki z rozwiązaniami, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2014.
2. Krawczyk S., Metody ilościowe w logistyce przedsiębiorstwa, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2001.
3. Trzaskalik T., Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2008.

❑ Wprowadzenie do programowania matematycznego - Pojęcie Problemu Decyzyjnego

Sytuacje decyzyjne – to sytuacje, w których zmuszeni jesteśmy podejmować różnego rodzaju decyzje, przy uwzględnieniu różnego rodzaju uwarunkowań (wewnętrznych i zewnętrznych):

- **Zarząd przedsiębiorstwa musi podjąć decyzję jakimi środkami transportu i w jakich ilościach dokonać przewozu towarów z magazynów do hurtowni przy optymalnym koszcie transportu;**
- **Dyrektor firmy spedycyjnej musi podjąć decyzję o ustaleniu najlepszego programu inwestycyjnego firmy - przynoszącego największe korzyści firmie;**
- **Dyrekcja przedsiębiorstwa komunikacji miejskiej musi podjąć decyzję o ustaleniu optymalnego harmonogramu pracy kierowców;**

Decydent – ktoś, kto podejmuje decyzje (jednoosobowe lub kolegialne ciało zarządcze)
Warunki w jakich działa decydent nie pozwalają na ogół na podjęcie dowolnej decyzji, lecz ograniczają je tylko do pewnego podzbioru – decyzji dopuszczalnych.

❑ Wprowadzenie do programowania matematycznego - Pojęcie Problemu Decyzyjnego

Nie każda decyzja dopuszczalna przynosi równie duże korzyści (jest równie użyteczna, wartościowa) w świetle stawianych przez zarządzającego (decydenta) celów, które chce on zrealizować.

Biorąc pod uwagę stawiane cele – zwane kryteriami wyboru lub kryteriami oceny jedne z podjętych decyzji będą lepsze, zaś inne gorsze.

Zachodzi zatem problem wyboru decyzji najlepszej (najbardziej użytecznej - o największych korzyściach), którą będziemy nazywać – decyzją optymalną.

Przykład: **Która decyzja jest optymalna ?**

Decyzje	I	II	III
Nakłady inwestycyjne (mln zł)	10	20	30
Zyski (mln zł)	3	5	9

❑ Wprowadzenie do programowania matematycznego - Zadanie Decyzyjne

Model matematyczny problemu decyzyjnego (Zadanie Decyzyjne) – to opis określonego problemu decyzyjnego w języku matematycznym (taki głównie nas interesuje) za pomocą określonego modelu matematycznego.

Zmienne Decyzyjne – to wielkości (czynniki) od których zależy wynik (ocena) podjętej decyzji: $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n; x_i \geq 0,_{i=1,\dots,n}$

Funkcja Celu (funkcja kryterium) – to funkcja, która zależy od zmiennych decyzyjnych i mierzy cel, który chce osiągnąć zarządzający (decydent):

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in R$$

Oznaczmy przez „D" – zbiór decyzji dopuszczalnych. Jest on najczęściej określany przez układ równań i nierówności postaci:

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n) \geq b_i & i = 1, \dots, k \\ g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i & i = k+1, \dots, l \\ g_i(x_1, \dots, x_n) = b_i & i = l+1, \dots, m \end{cases}$$

Analityczna postać funkcji g_i może być dowolna;

b_i – współczynniki liczbowe;

Wprowadzenie do programowania matematycznego - Zadania Decyzyjne

Wybór decyzji optymalnej – oznaczanej przez $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*]$ polega na określeniu takiej decyzji dopuszczalnej $x^* \in D$, dla której wartość funkcji celu osiąga wartość najkorzystniejszą - optymalną (w zależności od sytuacji minimalną lub maksymalną).

Programowanie Matematyczne – to rozwiązywanie zadań decyzyjnych.

Zadanie decyzyjne w formie programowania matematycznego możemy zatem zapisać następująco. Znajdź taką decyzję dopuszczalną x*, że:

(1)

$$f(x^*) = f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \max(\min)\{f(x_1, \ldots, x_n)\}$$ **- funkcja celu**

Przy warunkach ograniczających:

$$\begin{cases} x \in D \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x_1, \ldots, x_n) \geq b_i & i = 1, \ldots, k \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq b_i & i = k+1, \ldots, l \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i & i = l+1, \ldots, m \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

PROGRAMOWANIE LINIOWE

❑ Programowanie liniowe - matematyczny model liniowych problemów decyzyjnych

Programowanie liniowe (PL) – to specyficzny wariant programowania matematycznego, w którym funkcja celu jest postaci liniowej oraz wszystkie warunki ograniczające są również postaci liniowej.

Ogólną postać zadania programowania liniowego (ZPL) można przedstawić: (2)

$$f(x^*) = f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \max(\min)\{c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n\} = \max(\min)\{(c, x)\}$$

$c = [c_1, \ldots, c_n]$ **- wektor współczynników (wag) funkcji celu**

(c, x) **- iloczyn skalarny wektorów: „c” oraz „x”**

$$\begin{cases} x \in D \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) \geq b_i & i = 1, \ldots, k \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) \leq b_i & i = k+1, \ldots, l \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) = b_i & i = l+1, \ldots, m \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

1. Optymalny wybór asortymentu produkcji.

   Firma może produkować n – wyrobów. Do ich produkcji zużywane są różne środki produkcji, z których kilka – m są limitowane.

   Dane są:

   $a_{i,j}$ - normy zużycia i - tego środka produkcji (i=1,...,m) na wytworzenie jednostki j - tego wyrobu (j=1,...,n);

   b_i - posiadany zasób i - tego środka produkcji;

   c_j - cena jednostkowa ze sprzedaży j - tego wyrobu;

   Należy określić, które wyroby i w jakich ilościach mają być produkowane, aby nie przekraczając posiadanych zasobów środków produkcji zmaksymalizować przychód z ich sprzedaży.

   Zmiennymi decyzyjnymi w zadaniu są wielkości produkcji poszczególnych wyrobów: $x_j \geq 0$

❑ Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

Zadanie programowania liniowego (ZPL) dla problemu decyzyjnego: optymalnego wyboru asortymentu produkcji jest następujące:

$$f(x_1,\ldots,x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \rightarrow \max$$ **funkcja celu**

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ldots,x_n \ge 0 \end{cases}$$ **warunki ograniczające**

Uwaga: Niekiedy stosuje się dodatkowe ograniczenia popytowe:
d_j – minimalna ilość j - tego wyrobu jaką trzeba wyprodukować;
g_j – maksymalna jaką można sprzedać.

$d_j \le x_j \le g_j$, dla niektórych j **- dodatkowy warunek ograniczający**

❑ Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

2. Optymalny wybór wielkości sprzedaży.

Firma ForkLift Service (FLS) jest jednym z dystrybutorów wózków widłowych firmy Clark na terenie zachodniej Polski.

W 2002 roku największą sprzedaż firmy FLS stanowiły 2 typy wózków widłowych:

- **Clark CDP20S CSP 20S, oznaczmy go jako 20S, oraz**
- **Clark CDP45H CGP 45H, oznaczany jako 45H.**

Wózek 20S u producenta kosztuje 19.000 € , natomiast model 45H kosztuje 33.000 € .

Pod koniec roku 2002 specjaliści do spraw sprzedaży w firmie FLS postanowili, przy uwzględnieniu danych historycznych, oszacować wielkość sprzedaży wózków widłowych typu 20S i 45H na rok 2003.

Na podstawie wstępnej analizy stwierdzono, że na zakup obu typów wózków w 2003 roku będą mogli przeznaczyć:

- **maksymalnie 2,4 mln €.**

Przy czym zysk ze sprzedaży wózka:

- **20S wynosi 15%,**
- **wózka 45H natomiast 19%.**

❑ Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

Doświadczony sprzedawca orzekł, że czas poświęcony przez pracowników FLS na sprzedaż jednego wózka jest zróżnicowany i zależny od typu wózka.
Stopień zaangażowania pracownika wynika przede wszystkim z: konieczności przeprowadzenia prezentacji wózka, przygotowania dokumentacji sprzedaży oraz przeprowadzenia podstawowego instruktażu w obecności klienta.

Sprzedawca ten oszacował, że czas pracy poświęcony na sprzedaż jednego wózka typu 20S wynosi ok. 6 godz., podczas gdy sprzedaż jednego wózka 45H zajmuje około 4 godz.
•Jednocześnie obliczono, że łączny czas pracy sprzedawców w ciągu roku, jaki mogą oni poświęcić na sprzedaż obu typów wózka wynosi 520 godz.
Na podstawie wstępnych rozmów z przedstawicielem firmy Clark (producentem wózków widłowych) ustalono również, że w roku 2003 firma FLS może spodziewać się:
•dostarczenia maksymalnie 100 wózków typu 20S i nie więcej niż 75 wózków typu 45H.
•z drugiej zaś strony dla zapewnienia ciągłości sprzedaży firma FLS jednorazowo musi zamawiać w firmie Clark minimum 10 wózków typu 20S oraz 5 wózków typu 45H.

Wspomóż decydenta firmy ForkLift Service w zaplanowaniu liczby wózków typu 20S i 45H, która zapewni jego firmie maksymalny roczny zysk przy zasobach dostępnych do realizacji tej sprzedaży (najlepsze wykorzystanie posiadanych zasobów)

❑ Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

Konstrukcja modelu matematycznego:

• Zmienne decyzyjne w analizowanym problemie:
S – liczba zakupionych przez FLS wózków widłowych typu 20S
H – liczba zakupionych przez FLS wózków widłowych typu 45H

• funkcja celu (cel postawiony przez firmę FLS)
– Maksymalizacja zysku ze sprzedaży wózków widłowych typu 20S i 45H

– zysk całkowity:
$Z = Z_S + Z_H$

– Z_S **- jednostkowy zysk ze sprzedaży wózków typu 20S**

$Z_S = 15\% \cdot 19.000\ € \cdot S = 2.850\ S$

– Z_H **– jednostkowy zysk ze sprzedaży wózków typu 45H**

$Z_H = 19\% \cdot 33.000\ € \cdot H = 6.270\ H$

– ostateczne sformułowanie funkcji celu
$\text{Max } Z(S, H) = 2.850\ S + 6.270\ H$

❑ Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

Identyfikacja ograniczeń:

- **zasoby finansowe firmy FLS: max. 2.400.000 zł / rok**
- **dostępny fundusz czasu pracy poświęcany przez pracowników FLS na sprzedaż wózków 20S i 45H - max. 520 rbh / rok**

- **dostępność wózków u producenta**

- max 100 szt. / rok 20S
- max 75 szt. / rok 45H

- **rynkowy popyt na wózki widłowe**

min 10 szt. 20S
min 5 szt. 45H

Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

Matematyczny zapis ograniczeń:

•zasoby finansowe firmy FLS ograniczają na przestrzeni roku możliwość zakupu wózków widłowych u producenta

$$19.000\, S + 33.000\, H \leq 2.400.000$$

• czas pracy ludzi zatrudnionych w FLS i zajmujących się sprzedażą wózków 20S i 45H jest ograniczony

$$6\, S + 4\, H \leq 520$$

•możliwości produkcyjne firmy Clark w zakresie dostarczenia firmie FLS wózków widłowych typu 20S i 45H

- dostępność wózków 20S

$$S \leq 100$$

- dostępność wózków 45H

$$H \leq 75$$

•minimalna liczba wózków w jednorazowym zamówieniu, zapewniająca ciągłość sprzedaży przy jednoczesnym zachowaniu satysfakcji klientów firmy FLS

- zapotrzebowanie firmy FLS na wózki typu 20S

$$S \geq 10$$

- zapotrzebowanie firmy FLS na wózki typu 45H

$$H \geq 5$$

•formalnie poszukiwane rozwiązanie (S, H) nie powinno przyjmować wartości ujemnych

$$S \geq 0$$

$$H \geq 0$$

❑ Programowanie liniowe - przykłady liniowych zadań decyzyjnych

Ostateczna postać modelu matematycznego problemu decyzyjnego sformułowanego w postaci zadania programowania liniowego:

- **funkcja celu**

Max Z(S, H) = 2.850 S + 6.270 H

przy ograniczeniach:

(1)19 S+ 33 H ≤ 2.400
(2)6 S+ 4 H ≤ 520
(3)S ≤ 100
(4)H ≤ 75
(5)S ≥ 10
(6) H ≥ 5
(7) S ≥ 0
(8) H ≥ 0

❑ Programowanie liniowe – dwie szczególne formy (postacie) zadań programowania liniowego

Bardzo ważną rolę przy formułowaniu zadań programowania liniowego odgrywają dwie jego szczególne postacie:

1. **Postać standardowa**: występuje wówczas, gdy wszystkie nierówności w warunkach ograniczających są postaci $(\leq)$ dla funkcji celu postaci (maksimum), zaś $(\geq)$ dla funkcji celu postaci (minimum) oraz wszystkie zmienne decyzyjne są nieujemne. Tego typu nierówności nazywają się nierównościami typowymi dla zadania na maksimum i minimum funkcji celu.

   Każdą postać standardową (ZPL) można przedstawić za pomocą zapisu macierzowego następująco (wersja z minimum funkcji celu):

(3)

$$f(x) = (c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} A \cdot x^T \geq b^T \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$A = [a_{i,j}]_{i=1,\dots,m;\, j=1,\dots,n}$ - macierz współczynników w warunkach ograniczających

$b = [b_1, \dots, b_m]$ - wektor tzw. wyrazów wolnych

Uwaga: Stosując odpowiednie przekształcenie funkcji celu, a także przekształcając nierówności w warunkach ograniczających na typowe możliwe jest sprowadzanie zadań PL do swej postaci standardowej.

❑ Programowanie liniowe – dwie szczególne formy (postacie) zadań programowania liniowego

2. Postać kanoniczna: występuje wówczas, gdy wszystkie warunki ograniczające są podane w formie równań oraz wszystkie zmienne decyzyjne są nieujemne.

   Postać kanoniczną zadania PL w zapisie macierzowym można przedstawić następująco: (4)

$$f(x) = (c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min)$$
$$\begin{cases} A \cdot x^T = b^T \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Uwaga: Każde zadanie PL można sprowadzić do równoważnej postaci kanonicznej stosując następujące postępowanie:

Każdy warunek ograniczający w postaci nierówności daje się sprowadzić do równości wprowadzając dodatkowe zmienne swobodne (pozorne). Np. warunek: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 100$ sprowadzamy do równości: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 100$ - wprowadzając nową zmienną $x_3 \geq 0$. Natomiast warunek postaci: $1{,}5x_1 + x_2 \geq 50$ sprowadzamy do równości: $1{,}5 \cdot x_1 + x_2 - x_4 = 50$ - wprowadzając nową zmienną $x_4 \geq 0$.

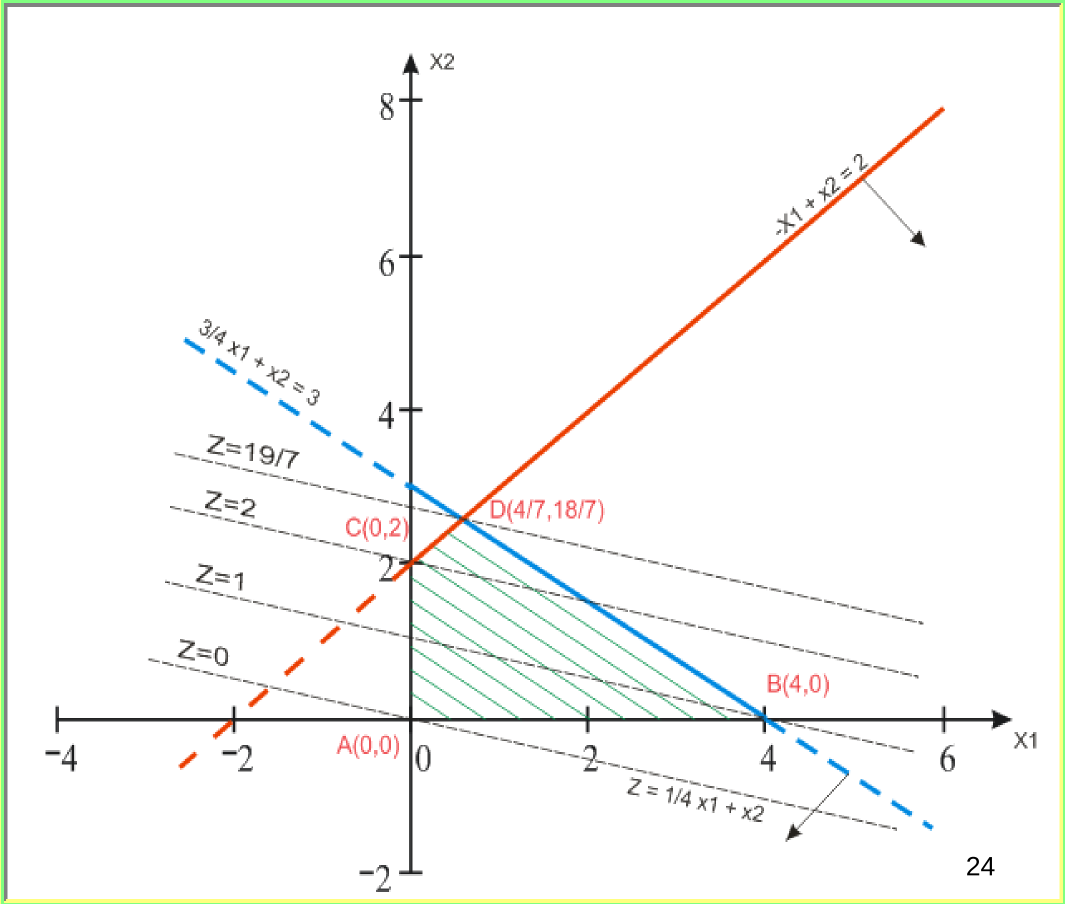
W funkcji celu pozorne zmienne decyzyjne: x_3, x_4 pojawią się ze współczynnikami (wagami) równymi zero $c_3 = 0$; $c_4 = 0$.

Programowanie liniowe – graficzna interpretacja zadań programowania liniowego - metoda geometryczna poszukiwania rozwiązań

1. **Przykład zadania programowania liniowego ZPL - mającego jednoznaczne tylko jedno rozwiązanie.**

$$f(x_1, x_2) = z = \frac{1}{4} x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ \frac{3}{4} x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

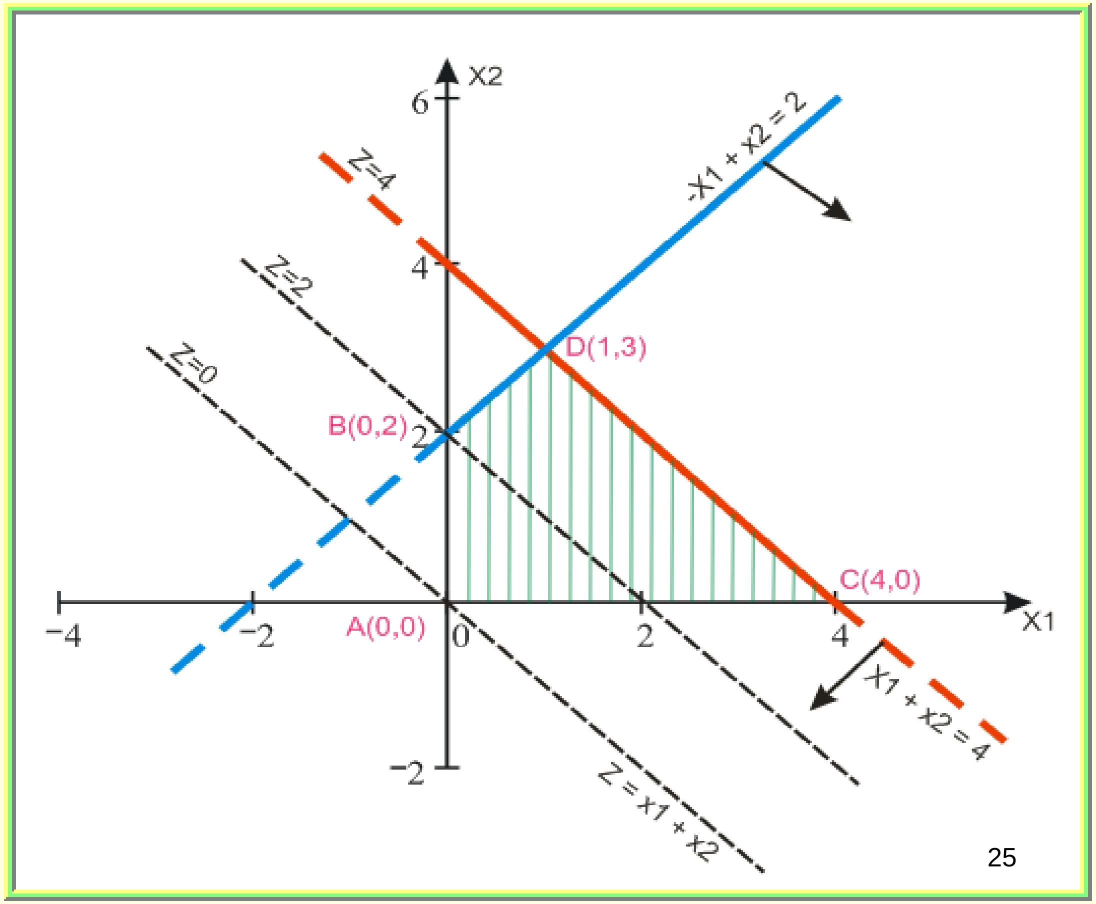


❑ Programowanie liniowe – graficzna interpretacja zadań programowania liniowego - metoda geometryczna poszukiwania rozwiązań

2. **Przykład zadania programowania liniowego ZPL - mającego niejednoznacznie nieskończenie wiele rozwiązań.**

$$f(x_1, x_2) = z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

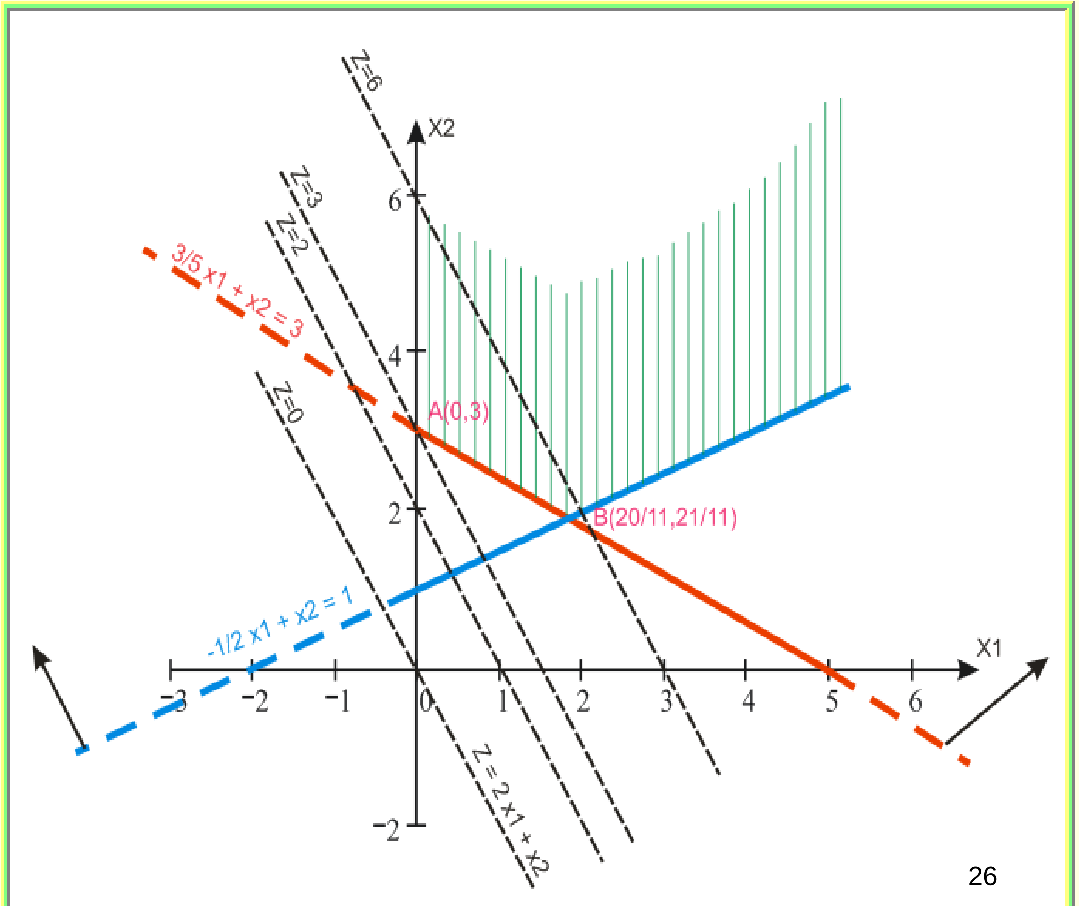


❑ Programowanie liniowe – graficzna interpretacja zadań programowania liniowego - metoda geometryczna poszukiwania rozwiązań

3. **Przykład zadania programowania liniowego ZPL – nie mającego żadnych rozwiązań.**

$$f(x_1, x_2) = z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x_1 + x_2 \geq 3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



❑ Programowanie liniowe – dualność w programowaniu liniowym

Z każdym zadaniem pierwotnym (ZP PL) związane jest inne zadanie, które nazywać będziemy – zadaniem dualnym (ZD PL).

Reguły tworzenia zadania dualnego można scharakteryzować następująco:

- W zadaniu dualnym jest tyle zmiennych ile warunków ograniczających w zadaniu pierwotnym;
- W zadaniu dualnym jest tyle warunków ile zmiennych w zadaniu pierwotnym;
- Współczynniki w funkcji celu zadania pierwotnego są wyrazami wolnymi w warunkach ograniczających zadania dualnego;
- Wyrazy wolne zadania pierwotnego stają się wagami (współczynnikami) w funkcji celu zadania dualnego.
- Macierz współczynników zadania dualnego jest transpozycją zadania pierwotnego;
- Gdy zadanie pierwotne jest na minimum, to zadanie dualne jest maksimum i na odwrót.

Programowanie liniowe – dualność w programowaniu liniowym

- Gdy w zadaniu pierwotnym „i-ta" zmienna jest nieujemna (≥ 0) , to w zadaniu dualnym odpowiadający jej warunek jest typową nierównością;

- Gdy w zadaniu pierwotnym na „i-tą" zmienną nie nałożono żadnych ograniczeń (może przyjmować dowolne wartości), to w zadaniu dualnym odpowiadający jej warunek jest równością;

- Gdy w zadaniu pierwotnym „i-ty" warunek jest typową nierównością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym jest nieujemna (≥ 0) ;

- Gdy w zadaniu pierwotnym „i-ty" warunek jest równością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym nie ma ograniczeń (może przyjmować dowolne wartości);

- Gdy w zadaniu pierwotnym „i-ty" warunek jest nietypową nierównością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym jest niedodatnia (≤ 0) ;

Programowanie liniowe – dualność w programowaniu liniowym – przykład konstrukcji ZD PL

Zadanie pierwotne - ZP PL

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1-x_2+5x_3-2x_4\rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+5x_4\le 20\\ 2x_1-x_2-x_4\ge 15\\ 3x_2+x_3-2x_4=14\\ x_1,x_3,x_4\ge 0,\ x_2\ \text{- dowolne}\end{cases}$$

Zadanie dualne - ZD PL

$$g(y_1,y_2,y_3)=20y_1+15y_2+14y_3\rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1+2y_2\le 2\\ y_1-y_2+3y_3=-1\\ 2y_1+y_3\le 5\\ 5y_1-y_2-2y_3\le -2\\ y_1\le 0,\ y_2\ge 0,\ y_3\ \text{- dowolne}\end{cases}$$

❑ Programowanie liniowe – wzajemne zależności pomiędzy rozwiązaniami zadania pierwotnego oraz dualnego – twierdzenia o dualności

Dla zadań: ZP PL w postaci standardowej na maksimum i dualnego ZD PL

Twierdzenie 1 (o istnieniu obu rozwiązań):
Jeżeli ZP PL i ZD PL mają rozwiązania dopuszczalne (spełniające warunki ograniczające), to oba mają również rozwiązania optymalne. Gdy choć jedno z nich nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to oba nie posiadają rozwiązań optymalnych.

Twierdzenie 2 (o wzajemnej relacji rozwiązań dopuszczalnych):
Jeżeli $x_1^0,\dots,x_n^0$ - jest rozwiązaniem dopuszczalnym ZP PL, zaś $y_1^0,\dots,y_m^0$ - jest rozwiązaniem dopuszczalnym ZD PL, to pomiędzy nimi zachodzi zależność: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0$

Twierdzenie 3 (o równości optymalnych rozwiązań ZP PL oraz ZD PL - John von Neumann):
Jeżeli istnieją takie dwa rozwiązania dopuszczalne: $x_1^*,\dots,x_n^*$ dla ZP PL oraz $y_1^*,\dots,y_m^*$ dla ZD PL, dla których zachodzi zależność:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(c_j x_j^*\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(b_i y_i^*\right) ,$$

to obydwa te rozwiązania są optymalne: $\max(\min) f(x^*) = \min(\max) g(y^*)$

❑ Programowanie liniowe – wzajemne zależności pomiędzy rozwiązaniami zadania pierwotnego oraz dualnego – twierdzenia o dualności

Twierdzenie 4 (o równowadze obu rozwiązań):
Jeżeli $x_1^0,\dots,x_n^0$ - jest rozwiązaniem dopuszczalnym ZP PL, zaś $y_1^0,\dots,y_m^0$ - jest rozwiązaniem dopuszczalnym ZD PL, to aby te rozwiązania były rozwiązaniami optymalnymi wystarcza, aby spełnione były warunki:

$$(1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^0 < b_i \Rightarrow y_i^0 = 0; \quad (2)\ \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}y_i^0 > c_j \Rightarrow x_j^0 = 0;$$

$$(3)\ y_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^0 = b_i; \quad (4)\ x_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}y_i^0 = c_j;$$

❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks - wprowadzenie

Metoda Simpleks – jest podstawową i uniwersalną metodą rozwiązywania zadań programowania liniowego, którą szczególnie łatwo daje się opracować algorytmicznie, a tym samym wykorzystać w procesie efektywnego poszukiwania rozwiązań ZPL nowoczesnych komputerowych narzędzi obliczeniowych.

Twórcą metody Simpleks jest B. Dantzing (1947 r.), a jej wprowadzenie zainicjowało burzliwe wykorzystanie metod matematycznych w praktyce rozwiązywania wielu sformułowanych, a dotąd nierozwiązanych problemów decyzyjnych.

Polega ona na sekwencyjnym (krokowym) i ściśle ukierunkowanym (efektywnym) przeglądzie tzw. rozwiązań bazowych.

Rozwiązania bazowe związane są z postacią kanoniczną ZPL (warunki ograniczające w postaci równości).

Dlatego punktem wyjścia w algorytmie Simpleks jest postać kanoniczna rozwiązywanego zadania programowania liniowego.

❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks - postać kanoniczna i jej Baza

- **Postać kanoniczna ZPL:**

$$f(x_1,\dots,x_n)=(c,x)=c_1x_1+\dots+c_nx_n\to\max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\dots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}x_1+\dots+a_{m,n}x_n=b_m \\ x_1,\dots,x_n\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cdot x^T=b^T \\ x\geq 0 \end{cases}$$

- **Baza postaci kanonicznej ZPL:**

Macierz B – kwadratową m – tego stopnia nazywamy bazą, jeżeli składa się z m – liniowo niezależnych kolumn macierzy A. Jej kolumny nazywamy kolumnami bazowymi, zaś pozostałe kolumny macierzy A kolumnami niebazowymi. Zmienne związane z kolumnami bazowymi nazywamy zmiennymi bazowymi, zaś pozostałe niebazowymi $rz(B)=m;\quad \det(B)\neq 0$

gdzie:

A - macierz o wymiarach (m,n) współczynników w warunkach ograniczających;

b – (m – wymiarowy) wektor wyrazów wolnych;

c – (n – wymiarowy) wektor wag funkcji celu;

x – (n – wymiarowy) wektor zmiennych decyzyjnych – rozszerzony o ewentualne zmienne swobodne oraz sztuczne;

$$A=[a_{i,j}]_{i=1,\dots,m;\,j=1,\dots,n} \qquad b=(b_1,\dots,b_m)$$

$$c=(c_1,\dots,c_n) \qquad x=(x_1,\dots,x_n)$$

Programowanie liniowe – metoda Simpleks - rozwiązania bazowe

- **Przykład.** Znaleźć rozwiązania bazowe następującego zadania ZPL

Postać standardowa ZPL:

$$f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2 \le 14 \\ x_1+2x_2 \le 8 \\ x_1,x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Postać kanoniczna ZPL:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3 \quad\quad =14 \\ x_1+2x_2 \quad\quad +x_4=8 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0 \end{cases}$$

x_3,x_4 – wprowadzone zmienne swobodne

Przykładowa Baza dla powyższej postaci kanonicznej:

Kolumny niebazowe

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **- Macierz współczynników** $$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ **- Baza**

Kolumny bazowe

x_1,x_3 **- zmienne bazowe**

x_2,x_4 **- zmienne niebazowe**

$$x=(x_B,x_N)$$

bazowe niebazowe

$$A\cdot x^T=b^T \Leftrightarrow B\cdot x_B^T+N\cdot x_N^T=b^T$$ **N – kolumny niebazowe**

❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks - rozwiązania bazowe

Z każdą bazą B układu równań w postaci kanonicznej ($Ax^T=b^T$) związane jest jego rozwiązanie bazowe. Jeżeli układ ten jest niesprzeczny (posiada rozwiązania) oraz (n>m), to posiada skończoną liczbę rozwiązań bazowych.

A mianowicie co najwyżej:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Rozwiązania bazowe tego układu można uzyskać następująco:

- **Wyznaczyć kolejne bazy B tego układu;**
- **Zmiennym niebazowym - x_N przypisać wartość zero: $x_N=0$;**
- **Wartości zmiennych bazowych x_B – wyznaczamy rozwiązując układ m – równań z m – niewiadomymi: $Bx_B^T=b^T$ – wynika to z zależności:**

$$A \cdot x^T = b^T \Leftrightarrow B \cdot x_B^T + N \cdot x_N^T = b^T$$

Jeżeli wartości każdej zmiennej bazowej w rozwiązaniu układu równań $Bx_B^T=b^T$ jest różne od zera, to takie rozwiązanie bazowe nazywamy niezdegenerowanym. Jeżeli wartość choć jednej zmiennej bazowej jest równa zero, to takie rozwiązanie nazywamy zdegenerowanym.

❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks - przegląd zupełny rozwiązań bazowych

Twierdzenie. Jeżeli zadanie ZPL ma rozwiązanie optymalne, to ma także rozwiązanie optymalne bazowe.

Stąd wniosek, że rozwiązania optymalnego wystarczy szukać wśród rozwiązań bazowych. Można je znaleźć dokonując zupełnego przeglądu wszystkich rozwiązań bazowych. Dla naszego przykładu mamy:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4\rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3 \quad\quad =14 \\ x_1+2x_2 \quad\quad +x_4=8 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \end{array}$$

Wszystkich rozwiązań bazowych może być co najwyżej: $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=3\cdot 2=6$

$\{x_1,x_2\};\{x_1,x_3\};\{x_1,x_4\};\{x_2,x_3\};\{x_2,x_4\};\{x_3,x_4\}$

Każda z kombinacji może być bazą, bo każda z kolumn A jest liniowo niezależna od pozostałych

Będziemy mieć zatem 6 rozwiązań bazowych. Niektóre z nich mogą być jednak niedopuszczalne (a takie nas nie interesują). Rozwiązanie bazowe nazywamy dopuszczalnym, gdy dla danej bazy B, zachodzi: $x_B\geq 0$

❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks - przegląd zupełny rozwiązań bazowych

- **Rozwiązania bazowe dla naszego przykładu:**

Zmienne decyzyjne	Baza (B1) $\{x_1,x_2\}$	Baza (B2) $\{x_1,x_3\}$	Baza (B3) $\{x_1,x_4\}$	Baza (B4) $\{x_2,x_3\}$	Baza (B5) $\{x_2,x_4\}$	Baza (B6) $\{x_3,x_4\}$
x_1	6	8	7	0	0	0
x_2	1	0	0	4	7	0
x_3	0	- 2	0	6	0	14
x_4	0	0	1	0	- 6	8
Funkcja celu $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	15 (Max)	Niedop.	14	12	Niedop.	0

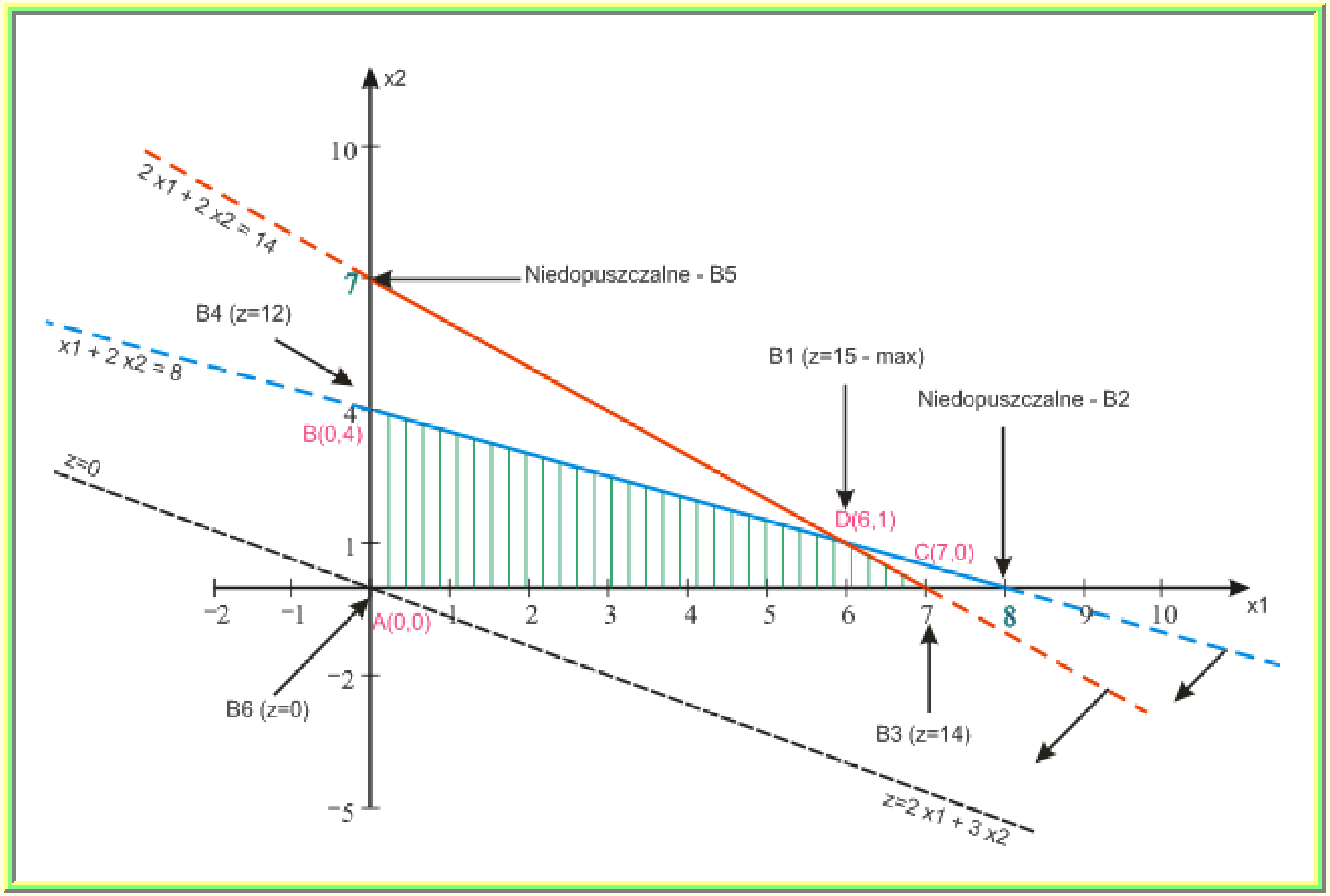
Układ równań w postaci kanonicznej:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja celu:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks - przegląd zupełny rozwiązań bazowych

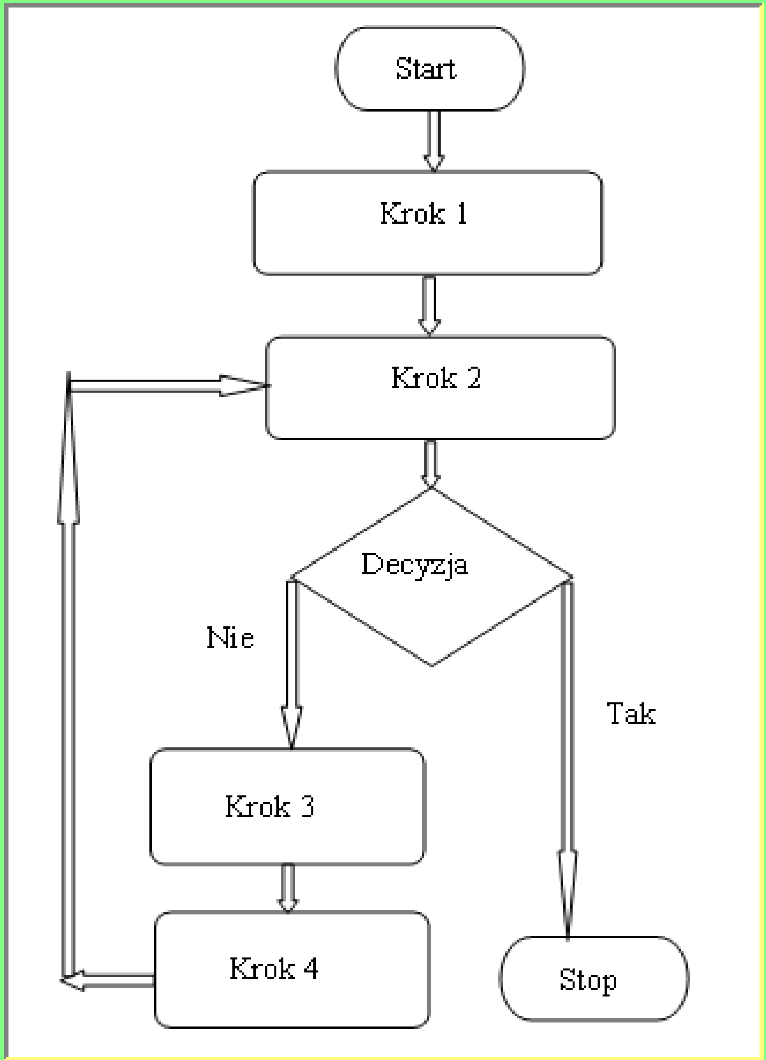


❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks – ujęcie algorytmiczne

W ogólnym przypadku metoda przeglądu zupełnego rozwiązań bazowych jest nieefektywna (duża złożoność obliczeniowa). Dla n=10 i m=5 musimy dokonać przeglądu już 252 ewentualnych rozwiązań bazowych oraz rozwiązywać układy 5 równań z 5 niewiadomymi. Dlatego w praktyce stosuje się przegląd ukierunkowany (tak jak w metodzie - Simpleks)

W metodzie Simpleks wykorzystuje się metodę ukierunkowanego przeglądu rozwiązań bazowych, od pierwszego znanego rozwiązania bazowego dopuszczalnego, do następnego, o którym wiadomo, że nie jest gorsze od poprzedniego. Pomijamy rozwiązania niedopuszczalne oraz te, które są gorsze od aktualnie rozważanego.

❑ Programowanie liniowe – metoda Simpleks – ujęcie algorytmiczne



ALGORYTM SIMPLEX

Krok 1:
Przedstawienie zadania - ZPL w postaci **kanonicznej - bazowej**. Zapisanie zadania w **tablicy simpleksowej**. Znalezienie **pierwszego** rozwiązania **bazowego dopuszczalnego**.

Krok 2:
W oparciu o **simpleksowe kryterium optymalności** badamy, czy aktualne rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest optymalne.

Decyzja 1:
Jeżeli – **Tak**, to koniec algorytmu;
Jeżeli **Nie**, to następny **krok 3**;

Krok 3:
Znaleźć numer wektora wprowadzanego do bazy - zastosowanie **kryterium wejścia** oraz numer wektora wyprowadzanego z aktualnej bazy - zastosowanie **kryterium wyjścia**. Określić tzw. **element centralny** tablicy simpleksowej.

Krok 4:
Wymienić wektory w bazie i utworzyć nową postać kanoniczną - bazową (z nową bazą). Wyznaczyć **nową postać** tablicy simpleksowej. **Powrót do kroku 2**.