Ćw. 11 - lista zadań (systemy masowej obsługi)

Zad. 1. Wycinkowe obserwacje dotyczące czasów przybyć samochodów z towarem oraz czasów ich rozładunku dla pewnej hurtowni posiadającej jeden front rozładunkowy (kanał obsługi) podaje tabela:

Numer klienta (samochodu) z towarem	Czas przybycia liczony od przybycia poprzedniego (godziny)	Czas rozładunku samochodów (minuty)
1	1	35
2	1,5	60
3	1	65
4	0,75	60
5	1,25	55
6	2	75
7	3	65
8	0,75	45
9	0,5	60
10	0,75	80

Zakładamy, że istnieje możliwość nieograniczonej kolejki samochodów. Traktując front rozładunkowy hurtowni jako system masowej obsługi typu: $M|M|1|\infty$ wyznaczyć:

a) Intensywność przybyć klientów oraz intensywność obsługi [na godzinę].

b) Współczynnik obciążenia (zajętości) systemu.

c) Zbadać czy system funkcjonuje w wariancie regularnym (stacjonarnym)

d) Oszacować prawdopodobieństwo, że:

- w systemie kolejkowym znajduje się więcej niż 4 samochody;

- kolejce na rozładunek czeka nie więcej niż 2 samochody;

e) Średnią liczbę samochodów czekających w kolejce na rozładunek i jego wariancję.

f) Średni czas oczekiwania samochodów w kolejce na rozładunek oraz jego wariancję.

g) Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce na rozładunek samochodów będzie większy niż 45 minut.

h) Prawdopodobieństwo, że łączny czas przebywania samochodów w systemie (w hurtowni) nie będzie większy niż 2 godziny.

Zad. 2. Pewna stacja kontroli technicznej samochodów świadczy usługi naprawcze oraz badania stanu technicznego dla pojazdów dostawczych. Wycinkowe obserwacje dla typowego dnia pracy stacji, dotyczące czasów przybyć samochodów na kontrolę oraz czasów ich obsługi podaje tabela:

Numer klienta (samochodu) zgłoszenie na badanie stanu technicznego lub naprawę	Czas przybycia liczony od przybycia poprzedniego (godziny)	Czas obsługi samochodów (minuty)
1	1	45
2	0,75	65
3	0,5	60
4	1,5	45
5	2	50
6	1,5	30
7	0,75	70
8	0,5	75

9	1,5	60
10	1	30

Zakładamy, że stacja obsługi posiada tylko jeden kanał obsługi oraz, że istnieje możliwość nieograniczonej kolejki. Traktując kanał przeładunkowy jako system masowej obsługi typu: $M|M|1|\infty$ wyznaczyć:

a) Intensywność przybyć klientów oraz intensywność obsługi [na godzinę].

b) Współczynnik obciążenia (zajętości) systemu.

c) Zbadać czy system funkcjonuje w wariancie regularnym (stacjonarnym)

d) Oszacować prawdopodobieństwo, że:

- w systemie kolejkowym znajduje się nie więcej niż 3 samochody
- kolejce na obsługę (badanie stanu technicznego lub naprawę) czeka więcej niż 4 samochody

e) Średnią liczbę samochodów czekających w kolejce na usługę i jego wariancję.

f) Średni czas oczekiwania samochodów w kolejce na usługę oraz jego wariancję.

g) Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce samochodów na usługę nie będzie większy niż 30 minut.

h) Prawdopodobieństwo, że łączny czas przebywania samochodów w systemie kolejkowym będzie większy niż 1,5 godziny.

Zad. 3. W porcie znajdują się 3 dźwigi portowe realizujące rozładunek kontenerowców. Każdy z dźwigów pracuje z jednakową wydajnością i jest w stanie rozładować jeden statek średnio w ciągu 6 godzin. Czasy przybyć [w godzinach] na nabrzeże portowe w celu rozładunku dla losowo wybranych 20 statków podaje tabela:

Numer klienta (statku) zgłoszenie na rozładunek na nabrzeżu portowym	Czas przybycia liczony od przybycia poprzedniego (godziny)	Numer klienta (statku)	Czas przybycia [w godzinach]
1	4	11	2,5
2	5	12	3
3	2	13	2
4	1	14	5
5	3,5	15	6
6	1,5	16	5
7	3	17	3,5
8	4	18	8
9	5,5	19	7,5
10	3,5	20	5,5

Zakładamy, że na redzie portowej może czekać w kolejce na rozładunek nieograniczona liczba statków oraz, że kolejka do doków przeładunkowych jest jedna (wspólna). Traktując port przeładunkowy jako system masowej obsługi typu $M|M|n|\infty$ wyznaczyć:

a) Współczynnik obciążenia (zajętości) systemu.

b) Zbadać czy system funkcjonuje w wariancie regularnym (stacjonarny)

c) Oszacować prawdopodobieństwo, że:

- losowo przybywający na nabrzeże portowe statek zostanie rozładowany bez czekania w kolejce

- zajęte rozładunkiem są 2 dźwigi portowe

- w kolejce na obsługę (rozładunek) czeka 1 kontenerowiec

d) Średnią liczbę statków czekających w kolejce na rozładunek.

e) Średnią liczbę zajętych (oraz wolnych) dźwigów przeładunkowych.

f) Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce kontenerowców na rozładunek nie będzie dłuższy niż 120 minut.

g) Średni czas czekania w kolejce na rozładunek statków oraz jego wariancję.

h) Na podstawie parametrów pracy systemu kolejkowego odpowiedzieć na pytanie: czy ma sens zlikwidowanie 1 dźwigu przeładunkowego ?

- ile wtedy będzie wynosił parametr zajętości systemu ?

- jakie będzie prawdopodobieństwo, że statek będzie musiał czekać w kolejce na rozładunek ?

- jaka będzie średnia długość kolejki do rozładunku ?

- jaki będzie średni czas oczekiwania statku na rozładunek ?

Zad. 4. W centrum logistycznym znajduje się 3 fronty przeładunkowe realizujące rozładunek samochodów przywożących towary. Zakładamy, że każdy z frontów przeładunkowych pracuje z jednakową wydajnością i jest w stanie rozładować średnio 3 samochody w ciągu 4 godzin. Czasy przybyć [w godzinach] do centrum logistycznego w celu rozładunku dla losowo wybranych 20 statków podaje tabela:

Numer klienta (samochód) zgłoszenie na rozładunek	Czas przybycia liczony od przybycia poprzedniego [minuty]	Numer klienta (samochód)	Czas przybycia [w minutach]
1	30	11	45
2	15	12	60
3	60	13	30
4	15	14	60
5	45	15	30
6	90	16	60
7	45	17	30
8	75	18	45
9	60	19	30
10	48	20	60

Zakładamy, że istnieje nieograniczona liczba miejsc w kolejce na samochody czekające na rozładunek oraz, że kolejka do frontów rozładunkowych jest jedna (wspólna). Traktując fronty przeładunkowe centrum logistycznego jako system masowej obsługi typu M|M|n|∞ wyznaczyć:

a) Współczynnik obciążenia (zajętości) systemu.

b) Zbadać czy system funkcjonuje w wariancie regularnym (stacjonarny)

c) Oszacować prawdopodobieństwo, że:

- losowo przybywający do centrum logistycznego samochód będzie musiał czekać na rozładunek w kolejce

- zajęty rozładunkiem jest 1 front przeładunkowy

- w kolejce na obsługę (rozładunek) czeka 2 samochody

d) Średnią liczbę samochodów czekających w kolejce na rozładunek.

e) Średnią liczbę zajętych (wolnych) frontów przeładunkowych.

f) Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce samochodów na rozładunek będzie dłuższy niż 45 minut.

g) Średni czas czekania w kolejce na rozładunek samochodów oraz jego wariancję.

h) Na podstawie parametrów pracy systemu kolejkowego odpowiedzieć na pytanie: czy ma sens zlikwidowanie 1 frontu przeładunkowego ?

- ile będzie w tej sytuacji wynosił parametr zajętości systemu ?

- jakie będzie prawdopodobieństwo, że samochód nie będzie musiał czekać w kolejce na rozładunek ?

- jaka będzie średnia długość kolejki do rozładunku ?

- jaki będzie średni czas oczekiwania samochodu na rozładunek ?

Zad. 5. Do baru samoobsługowego z jednym stanowiskiem kasowym co minutę przychodzi przeciętnie 3 klientów. Kasjerka jest w stanie obsłużyć przeciętnie również 3 klientów na minutę. Ponieważ układ jest niestabilny, bo $\lambda = \mu$ $(\rho = 1)$, kierownik sklepu zwolnił dotychczas pracująca kasjerkę, by zatrudnić nową. Z jaką wydajnością musi pracować nowo przyjęta kasjerka, by wskaźnik intensywności ruchu osiągnął poziom $\rho = 0,75$?

Zad. 6. Na dworcu kolejowym w Krakowie czynny jest kiosk z jednoosobową obsługą, sprzedający gazety i inne drobiazgi. Ruch na dworcu jest duży więc postanowiono zbadać sprawność obsługi oraz długość kolejki do kiosku. Wyniki migawkowych obserwacji przybyć klientów typowe dla każdego dnia pracy podaje poniższa tabela. Przeciętny czas obsługi jednego klienta wynosi 11s.

Przybycie klienta numer	Czas przyjścia liczony od przybycia ostatniego klienta (sekundy)	Przybycie klienta numer	Czas przyjścia liczony od przybycia ostatniego klienta (sekundy)
1	0	11	2
2	12	12	12
3	10	13	20
4	14	14	6
5	20	15	10
6	15	16	15
7	36	17	20
8	10	18	10
9	4	19	20
10	5	20	10

Na podstawie tych danych oszacowano: intensywność przybyć klientów $\lambda = 0,08$ oraz intensywność obsługi $\mu = 0,091$, prawdopodobieństwo tego, że w kolejce stoi więcej niż 3 osoby, wynoszące 0,60, przeciętną liczbę osób oczekujących w kolejce, wynoszącą 6,5 osoby oraz prawdopodobieństwo, że w kolejce trzeba czekać więcej niż pół minuty, wynoszące 0,63.

Właściciel kiosku chcąc usprawnić obsługę zatrudnił innego sprzedawcę gazet, który obsługuje jednego klienta w ciągu 10 sekund. Ocenić efekty wprowadzonej zmiany ?

Zad. 7. Właściciel przychodni stomatologicznej sprowadził nowe oprzyrządowanie gabinetów. Inwestycja ta przyczyniła się do zwiększenia wydajności wszystkich stanowisk. W związku z tym każdy z gabinetów jest teraz w stanie przyjąć 3 pacjentów, ale w ciągu 40 minut. Przybycia pacjentów odnotowane w minutach dla typowego dnia pracy przedstawia tabela:

Przybycie pacjenta numer	Czas przyjścia liczony od przybycia poprzedniego pacjenta (minuty)	Przybycie pacjenta numer	Czas przyjścia liczony od przybycia poprzedniego pacjenta (minuty)
1	0	11	5
2	8	12	8
3	17	13	7
4	9	14	5
5	11	15	8
6	12	16	7
7	13	17	5
8	5	18	4
9	4	19	16
10	11	20	5

Rozstrzygnąć następujące kwestie:

a) Czy ma sens zlikwidowanie jednego z gabinetów ?

b) W przypadku redukcji jednego stanowiska obsługi, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pacjent przychodząc do przychodni nie spotka kolejki ?

c) Jaka będzie przeciętna liczba oczekujących w kolejce ?

Zad. 8. Kierownictwo sklepu spożywczego zamierza dokonać zmian w jego wyposażeniu, gdyż chce wprowadzić samoobsługę. Chodzi o wyznaczenie liczby drzwi wyjściowych ze sklepu. W tym celu prowadzono obserwację ruchu w sklepie przez 60 dni, a ruch obserwowano tylko w ciągu jednej najbardziej ruchliwej godziny. Wyniki obserwacji podaje tabela.

Liczba klientów przybyłych w ciągu 1 minuty (x_i)	Liczba zaobserwowanych zdarzeń (N_i)
0	704
1	979
2	714
3	408
4	157
5	50

6	10
Razem	3022

Wiedząc, że kasjerka może obsłużyć średnio nie więcej niż 25 klientów na godzinę, kierownictwo chce się zorientować, ile kas trzeba zainstalować w sklepie, aby klient czekał w kolejce średnio nie dłużej niż 1 minutę.

Wybrane wzory do obliczeń:

1. System M|M|1|∞

Prawdopodobieństwo, że w systemie kolejkowym znajduje się k – zgłoszeń: $P_k = (1-\rho)\rho^k$

Średnia liczba zgłoszeń czekających w kolejce na obsługę: $\dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

Wariancja liczby zgłoszeń czekających w kolejce na obsługę: $\dfrac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$

Średni czas oczekiwania w kolejce na obsługę: $\dfrac{\rho}{\nu-\lambda}$ i jego wariacja: $\dfrac{\rho(2-\rho)}{(\nu-\lambda)^2}$

Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce na obsługę jest dłuższy niż t_0: $P(T > t_0) = \rho e^{-(\nu-\lambda)t_0}$

Prawdopodobieństwo, że czas przebywania zgłoszenia w systemie kolejkowym jest dłuższy niż t_0: $P(Z > t_0) = e^{-(\nu-\lambda)t_0}$

2. System M|M|n|∞

Prawdopodobieństwo, że w systemie kolejkowym znajduje się k – zgłoszeń: $P_k = \dfrac{\rho^k}{k!}P_0$, k=0,1,…,n

Prawdopodobieństwo, że w systemie kolejkowym znajduje się k – zgłoszeń: $P_k = \dfrac{\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0$, k=n+1,n+2,…

gdzie: $P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} \right)^{-1}$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie zostanie obsłużone bez czekania (bez kolejki): $P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{\rho^k}{k!} \right)$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie musiało czekać w kolejce na obsługę: $\Pi = \dfrac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \dfrac{n}{n-\rho} P_n$

Prawdopodobieństwo, że $1 \le s_0 \le n-1$ kanałów obsługi jest zajętych: $\dfrac{\rho^{s_0}}{s_0!} P_0$

Prawdopodobieństwo, że długość kolejki (liczba zgłoszeń czekających na obsługę) wynosi $r_0 \geq 0$:

$$\frac{\rho^{n+r_0}}{n!n^{r_0}} P_0$$

Średnia liczba zgłoszeń czekających w kolejce na obsługę: $\dfrac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \dfrac{1}{(n-\rho)^2} P_0$

Średnia liczba wolnych kanałów obsługi: $n - \rho = n - \dfrac{\lambda}{\nu} = n\left(1 - \dfrac{\lambda}{n\nu}\right)$

Średni czas oczekiwania w kolejce na obsługę: $E[T] = \dfrac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \dfrac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$ oraz jego wariacja: $D^2[T] = \dfrac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu - \lambda} = \dfrac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce na obsługę będzie dłuższy niż $t_0 > 0$ jednostek czasu: $P(T > t_0) = \dfrac{n}{n-\rho} \cdot \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot P_0 \cdot e^{-(n-\rho)\nu \cdot t_0}$