# WYBRANE ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA I ANALIZY SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI c.-d.

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|\infty$ - jest to system obsługi składający się z „n" kanałów obsługi z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). Zgłoszenia czekają w kolejce tylko wtedy, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (***w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału***) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (***porządek naturalny***). Dla takiego systemu ***wariant regularny*** istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda < n\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych przez wszystkie kanały). Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\frac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo: $P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_0$, dla k=0,1,2,...,n, oraz $P_k=\frac{\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0$, dla k=n+1,n+2,..., gdzie: $P_0=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}\right)^{-1}$.

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

***Prawdopodobieństwo***, że zgłoszenie ***będzie obsłużone bez czekania*** (w systemie znajduje się co najwyżej n-1 zgłoszeń) wynosi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\rho^k}{k!} \right)$$

***Prawdopodobieństwo***, że zgłoszenie ***będzie oczekiwało w kolejce*** wynosi:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{n}{n-\rho} P_n$$

***Prawdopodobieństwo***, że $1 \le s_0 \le n-1$ ***kanałów obsługi jest zajętych*** wynosi: $P(S = s_0) = P_{s_0} = \frac{\rho^{s_0}}{s_0\,!} P_0$

***Prawdopodobieństwo***, że ***długość kolejki wynosi*** $r_0 \ge 0$ obliczamy ze wzoru:

$$P(R = r_0) = P_{n+r_0} = \frac{\rho^{n+r_0}}{n!\,n^{r_0}} P_0$$

***Prawdopodobieństwo***, że ***w kolejce oczekuje więcej*** niż $r_0 \ge 0$ zgłoszeń wynosi:

$$P(R > r_0) = P_{n+r_0+1} + P_{n+r_0+2} + \ldots = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!\,n^{r_0+1}} P_0 \left[ 1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!\,n^{r_0+1}} P_0 \frac{n}{n-\rho} = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!\,n^{r_0}(n-\rho)} P_0$$

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

***Średnia liczba zgłoszeń w kolejce*** wynosi: $\sum_{r=0}^{\infty} rP_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}P_0$

***Średnia liczba zajętych kanałów*** (istotna informacja dla zarządzającego systemem) wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k = \rho = \frac{\lambda}{\nu}$ . Zatem ***średnia liczba wolnych kanałów*** wynosi: $n-\rho = n - \frac{\lambda}{\nu} = n\left(1-\frac{\lambda}{n\nu}\right)$.

***Średnia liczba zgłoszeń w systemie*** wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \rho + P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}$$

***Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej*** niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \frac{n}{n-\rho}P_n e^{-(n-\rho)\nu \cdot t_0}$$

***Średni czas oczekiwania na obsługę*** (w kolejce) oraz jego ***wariancja*** wynoszą: $E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$; $D^2[T] = \frac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu-\lambda} = \frac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|N$ - jest to system obsługi składający się z „n" kanałów obsługi z odmową (ograniczona liczba „$N<\infty$" miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). W omawianym systemie może znajdować się jednocześnie najwyżej „n+N" zgłoszeń, z których „n" - będzie obsługiwanych, zaś „N" – będzie czekać w kolejce. Napływające w tym czasie zgłoszenia otrzymują ***odmowę*** i odchodzą nie obsłużone. Przyjete zgłoszenia albo od razu są obsługiwane (jeśli jest wolny kanał) lub czekają w kolejce (jeśli wszystkie kanały obsługi są zajęte). Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (***w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału***) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (***porządek naturalny***). Dla takiego systemu ***wariant regularny (system jest stabilny)*** istnieje zawsze. Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\frac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo: $P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_0$, dla k=0,1,2,...,n, oraz $P_k=\frac{\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0$, dla k=n+1,n+2,...,n+N, gdzie: $P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k\right)^{-1}$.

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte (dostanie odmowę)***, czyli ***prawdopodobieństwo straty zgłoszenia*** wynosi:

$$P_{n+N} = \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^N P_0$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** do obsługi (procentowa przepustowość systemu – ***g***) wynosi: $g = 1 - P_{n+N}$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie będzie obsłużone bez czekania*** wynosi: $\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie musiało czekać w kolejce*** wynosi: $\sum_{k=0}^{N-1} P_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

***Średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w kolejce*** wynosi: $\sum_{k=1}^{N} kP_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$

***Średnia liczba zajętych kanałów*** wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=1}^{N} nP_{n+k} = \rho(1 - P_{n+N})$.

Średnia ***liczba wolnych kanałów*** (z powodu braku zgłoszeń) wynosi: $n - \rho(1 - P_{n+N})$.

***Średnia liczba zgłoszeń w systemie (równa średniej liczbie zajętych kanałów obsługi plus średniej liczbie zgłoszeń czekających w kolejce)*** wynosi:

$$E[V] = \rho(1 - P_{n+N}) + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$$

Średnia liczba zgłoszeń, które ***otrzymały odmowę*** wynosi: $\lambda P_{n+N}$ (w jednostce czasu). Średni ***odstęp czasu między dwoma kolejnymi zgłoszeniami***, które otrzymały odmowę wynosi: $\frac{1}{\lambda P_{n+N}}$.

Średnia ***liczba wolnych miejsc w kolejce*** jest równa: N - E[V].

***Średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi*** (oczekiwania w kolejce) wynosi: $E[T] = \frac{n\nu P_n}{(n\nu - \lambda)^2}\left[1 - (N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N + N\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]$.

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|0$ - jest to szczególny przypadek systemu poprzedniego, w którym występuje ***strata zgłoszeń*** (każde zgłoszenie, które przychodzi i zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte odchodzi nie obsłużone). Dla tego systemu prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla k=0,1,2,...,n, gdzie: } P_0 = \left( \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{\rho^k}{k!} \right) \right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte*** (stracone) wyraża się wzorem: $P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$, zaś prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** (a tym samym ***obsłużone bez czekania***) wynosi:

$$1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Średnia ***liczba zajętych kanałów obsługi*** (tym samym średnia ***liczba zgłoszeń w systemie***) wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{n} nP_k = \rho \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\rho^k}{k!} \right) P_0 = \rho(1 - P_n).$$

# WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

**Przykład praktyczny:**

Do stacji technicznej obsługi samochodów mającej n=4 identycznie wyposażone kanały zgłaszają się klienci. Strumień zgłoszeń jest typu Poissona z intensywnością $\lambda = 3$ zgłoszenia na godzinę. Intensywność obsługi przez każdy kanał obsługi (z wykładniczym czasem trwania obsługi) wynosi $\nu = 2$ klientów na godzinę. Zakładamy, że jest to system bez odmowy (nieograniczona ilość miejsc w kolejce).

- Sprawdzić czy system jest stabilny ? (stacjonarny):

  Warunkiem koniecznym aby system był stabilny jest by: $\lambda < n\nu$. W naszym przykładzie $\lambda = 3 < 4 \cdot 2 = 8$. Zatem system jest stabilny.

- Obliczyć: średni (w procentach) *czas przestoju wszystkich kanałów* obsługi systemu - $P_0$, średnią liczbę *zajętych kanałów obsługi*, prawdopodobieństwo, że *klient będzie czekał w kolejce*, średnią *liczbę klientów w kolejce* oraz średni *czas oczekiwania klienta* na rozpoczęcie obsługi.

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Procentowy (średni) czas przestoju wszystkich kanałów obsługi

$$P_0 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{-1} \right)^{-1} = \left( \sum_{k=0}^{3} \frac{1.5^k}{k!} + \frac{1.5^4}{4!} \left(1 - \frac{1.5}{4}\right)^{-1} \right)^{-1} = 0,22$$

bo $\rho = \dfrac{\lambda}{\nu} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

Średnia liczba zajętych kanałów obsługi wynosi: $\rho = 1.5$

Prawdopodobieństwo, że klient będzie czekał w kolejce wynosi:

$$\Pi = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{1.5^4}{3!(4-1.5)} 0.22 = 0,074 \,.$$

Średnia liczba klientów w kolejce wynosi:

$$P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{(n-\rho)^2} = 0.22 \frac{1.5^5}{3!} \frac{1}{(4-1.5)^2} = 0,045$$

**- kolejka praktycznie nie istnieje**

Średni czas oczekiwania klienta na rozpoczęcie obsługi wynosi:

$$E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{0.074}{4 \cdot 2 - 3} = 0,015[h] \text{ (0,9 minuty).}$$

System jest wyraźnie niedociążony (obciążenie systemu: $\dfrac{\lambda}{n\nu} = \dfrac{3}{8}$).

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

**Przykład praktyczny 2:**

Hipermarket posiada 6 stanowisk kasowych. W ciągu godziny średnio zgłaszało się do kas 60 klientów (intensywność zgłoszeń do systemu $\lambda = 60\left[\frac{os.}{godz.}\right]$.

Średni czas ich obsługi na stanowisku kasowym wynosi 2 minuty, tym samym jedna kasa może obsługiwać w ciągu 1 godziny $\nu = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30\left[\frac{os.}{godz.}\right]$ (intensywność obsługi dla jednego kanału obsługi). Stratę jaką ponosi hipermarket z tytułu przebywania klienta w systemie przez każdą godzinę oszacowano na poziomie 12 zł. Koszt uruchomienia 1 kasy wynosi 10 zł na godzinę (wynagrodzenie godzinowe kasjerki).

Powyższy system masowej obsługi interpretujemy jako system wielokanałowy (n=6 stanowisk obsługi), z wykładniczym rozkładem czasu pojawiania się zgłoszeń (o intensywności $\lambda > 0$) oraz wykładniczym rozkładem czasu trwania obsługi (o intensywności $\nu > 0$). Porządek obsługi zgłoszeń oraz tworzenia się kolejki jest porządkiem naturalnym (zgodnie z kolejnością przybyć).

Jest to system bez odmowy (nieograniczona liczba miejsc w kolejce) – czyli każdy klient, który zastanie wszystkie kasy zajęte może ustawić się w kolejce i czekać na obsługę. Tworzy się jednak tyle kolejek ile jest czynnych kanałów obsługi (n=6).

Każdy kanał możemy interpretować jako pojedynczy system obsługi elementarny (jednokanałowy) obsługujący zgłoszenia kierowane do niego zgodnie z zasadą minimalizacji każdej kolejki.

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Ile kas uruchomić, aby system obsługi generował jak najmniejsze koszty ?

Aby kolejki stale nie rosły (czyli aby system był systemem funkcjonującym w ustabilizowanych warunkach – system stacjonarny) musi być spełniony warunek $\frac{\lambda}{n \cdot \nu} < 1 \Rightarrow \frac{60}{n \cdot 30} < 1 \Rightarrow n > 2$ (n=3 kasy są minimalną liczbą kanałów obsługi).

Średnia liczba zgłoszeń (klientów) w systemie z jednym kanałem obsługi dana jest wzorem: $\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\nu - \lambda}$, bo $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$, dlatego średnia liczba osób w każdym elementarnym systemie obsługi (pojedyncze stanowisko kasowe) dana jest wzorem: $L_s^{(n=1)} = \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n}$.

Średnia liczba osób w całym systemie obsługi wynosi:

$$L_s = n \cdot L_s^{(n=1)} = n \cdot \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n} = \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n}.$$

Łączny koszt obsługi całego systemu składającego się z n – kanałów obsługi (n kas) wynosi: $K(n) = b \cdot L_s + p \cdot n = b \cdot \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n} + p \cdot n$,

gdzie:

b - strata jaką ponosi system, gdy pojedynczy klient przebywa przez jednostkę czasu w systemie (b=12 zł – strata na godzinę)

p – koszt utrzymania kanału obsługi w jednostce czasu (p=10 zł – koszt godzinowy)

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Zadanie decyzyjne sprowadza się do znalezienia takiej liczby kanałów obsługi $n^*$, aby:

$$K\left(n^*\right) = \min\left\{K(n) : n \in D\right\},$$

gdzie D – zbiór dopuszczalnych wariantów liczby kanałów obsługi

$n^*$ - można wyznaczyć stosując przegląd zupełny zbioru D, albo stosując rachunek różniczkowy do wyznaczenia minimum funkcji K(n).

Przegląd zupełny rozwiązań dopuszczalnych wygląda następująco:

$$K(3) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/3} + 10 \cdot 3 = 102$$

$$K(4) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/4} + 10 \cdot 4 = 88$$ - optymalne $n^* = 4$

$$K(5) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/5} + 10 \cdot 5 = 90$$

$$K(6) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/6} + 10 \cdot 6 = 96$$

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Wyznaczyć charakterystyki osobowo-czasowe dla optymalnego systemu (n=4) kasami obsługi.

Średnia liczba osób w całym systemie obsługi wynosi:

$$L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n} = \frac{60}{30 - 60/4} = 4 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce w elementarnym systemie z pojedynczym stanowiskiem kasowym dana jest wzorem:

$$L_k^{(n=1)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda / n}{\nu} \cdot \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n}, \text{ gdyż } \rho = \frac{\lambda / n}{\nu}.$$

Zatem dla całego systemu obsługi składającego się z n=4 – elementarnych systemów jednokanałowych otrzymujemy:

$$L_k = n \cdot L_k^{(n=1)} = \frac{\lambda / n}{\nu} \cdot \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n} \cdot n = \frac{\lambda / n}{\nu} \cdot L_s, \text{ gdyż } L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n}$$

$$L_k = \frac{60/4}{30} \cdot 4 = 2 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba osób w obsłudze wynosi: $L_o = L_s - L_k = \dfrac{\lambda}{\nu} = 2$ [osoby]

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

średni czas przebywania w systemie,
średni czas oczekiwania na obsługę w kolejce,
średni czas obsługi klienta,

są równe odpowiednim charakterystykom dla elementarnego systemu masowej obsługi (z jednym stanowiskiem kasowym)

$$T_s = T_s^{(n=1)} = \frac{1}{\nu - \lambda / n} = \frac{1}{30 - 60/4} = \frac{1}{15}\ [godz.]\ \text{(4 minuty)}$$

$$T_k = T_k^{(n=1)} = \frac{\frac{\lambda / n}{\nu}}{\nu - \lambda / n} = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n} = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot L_s = \frac{1}{30 \cdot 4} \cdot 4 = \frac{1}{30}\ [godz.]$$

(2 minuty)

$$T_o = T_o^{(n=1)} = T_s - T_k = 4 - 2 = 2\ [\text{min.}]$$

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Ze względu na niskie płace personelu (p=10 zł) udało się zatrudnić tylko 3 kasjerki. Wyznaczyć charakterystyki osobowo-czasowe dla systemu z (n=3) kasami obsługi.

Średnia liczba osób w systemie obsługi wynosi:

$$L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n} = \frac{60}{30 - 60/3} = 6 \ [\text{osób}]$$

Średnia liczba klientów czekających w kolejce dla systemu z n=3 kasami obsługi wynosi:

$$L_k = \frac{\lambda / n}{\nu} \cdot L_s = \frac{60/3}{30} \cdot 6 = 4 \ [\text{osoby}]$$

Średnia liczba osób obsługiwanych wynosi: $L_o = L_s - L_k = 6 - 4 = 2 \ [\text{osoby}]$

Średni czas przebywania w systemie, średni czas oczekiwania na obsługę w kolejce oraz średni czas obsługi klienta wynosi w tym przypadku:

$$T_s = \frac{1}{\nu - \lambda / n} = \frac{1}{30 - 60/3} = \frac{1}{10}[godz.] \ (\text{6 minut})$$

$$T_k = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot L_s = \frac{1}{30 \cdot 3} \cdot 6 = \frac{1}{15}[godz.] \ (\text{4 minuty})$$

$$T_o = T_s - T_k = 6 - 4 = 2 \ [\text{min}.]$$

- Ile warto zapłacić czwartej kasjerce aby zachęcić ją do pracy

Ponieważ K(3)=102 zł, zaś K(4)=88 zł, to opłaca się dodatkowo zapłacić co najwyżej 14 zł (będzie zarabiać 24 zł na godzinę)