
**WYBRANE ZAGADNIENIA
PROJEKTOWANIA I ANALIZY
SYSTEMÓW
MASOWEJ OBSŁUGI (c.-d.)**

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|\infty$ - jest to system obsługi składający się z „n” kanałów obsługi z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0 < \nu < \infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0 < \lambda < \infty$). Zgłoszenia czekają w kolejce tylko wtedy, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (*w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału*) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (*porządek naturalny*). Dla takiego systemu *wariant regularny* istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda < n\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych przez wszystkie kanały). Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariacie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznacmy przez $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$,

to prawdopodobieństwo: $P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0$, dla $k=0,1,2,\dots,n$, oraz $P_k = \frac{\rho^k}{n!n^{k-n}} P_0$,

dla $k=n+1,n+2,\dots$, gdzie: $P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} \right)^{-1}$.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie *będzie obsłużone bez czekania* (w systemie znajduje się co najwyżej $n-1$ zgłoszeń) wynosi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right)$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie *będzie oczekiwalo w kolejce* wynosi:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{n}{n-\rho} P_n$$

Prawdopodobieństwo, że $1 \leq s_0 \leq n-1$ *kanalów obsługi jest zajętych*

wynosi: $P(S = s_0) = P_{s_0} = \frac{\rho^{s_0}}{s_0!} P_0$

Prawdopodobieństwo, że *długość kolejki wynosi* $r_0 \geq 0$ obliczamy ze wzoru:

$$P(R = r_0) = P_{n+r_0} = \frac{\rho^{n+r_0}}{n!n^{r_0}} P_0$$

Prawdopodobieństwo, że *w kolejce oczekuje więcej* niż $r_0 \geq 0$ zgłoszeń wynosi:

$$\begin{aligned} P(R > r_0) &= P_{n+r_0+1} + P_{n+r_0+2} + \dots = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \left[1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \frac{n}{n-\rho} = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0}(n-\rho)} P_0 \end{aligned}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w kolejce wynosi: $\sum_{r=0}^{\infty} rP_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)! (n-\rho)^2} P_0$

Średnia liczba zajętych kanałów (istotna informacja dla zarządzającego systemem) wynosi: $\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k = \rho = \frac{\lambda}{\nu}$. Zatem *średnia liczba wolnych kanałów* wynosi: $n - \rho = n - \frac{\lambda}{\nu} = n \left(1 - \frac{\lambda}{n\nu} \right)$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \rho + P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)! (n-\rho)^2}$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ *jednostek czasu wyznacza się następująco:*

$$P(T > t_0) = \frac{n}{n-\rho} P_n e^{-(n-\rho)\nu t_0}$$

Średni czas oczekiwania na obsługę (w kolejce) oraz jego *wariancja* wynoszą: $E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$; $D^2[T] = \frac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|N$ - jest to system obsługi składający się z „n” kanałów obsługi z odmową (ograniczona liczba „ $N < \infty$ ” miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0 < \nu < \infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0 < \lambda < \infty$). W omawianym systemie może znajdować się jednocześnie najwyżej „n+N” zgłoszeń, z których „n” - będzie obsługiwanych, zaś „N” - będzie czekać w kolejce. Napływające w tym czasie zgłoszenia otrzymują **odmowę** i odchodzą nie obsłużone. Przyjęte zgłoszenia albo od razu są obsługiwane (jeśli jest wolny kanał) lub czekają w kolejce (jeśli wszystkie kanały obsługi są zajęte). Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (**w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału**) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (**porządek naturalny**). Dla takiego systemu **wariant regularny (system jest stabilny)** istnieje zawsze. Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariacie stacjonarnym

(ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n, \text{ oraz } P_k = \frac{\rho^k}{n!n^{k-n}} P_0, \text{ dla } k=n+1,n+2,\dots,n+N,$$

$$\text{gdzie: } P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\rho}{n} \right)^k \right)^{-1}.$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie nie zostanie przyjęte (dostanie odmowę)*, czyli *prawdopodobieństwo straty zgłoszenia* wynosi:

$$P_{n+N} = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^N P_0$$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie zostanie przyjęte* do obsługi (procentowa przepustowość systemu – g) wynosi: $g = 1 - P_{n+N}$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie będzie obsłużone bez czekania*

wynosi: $\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right)$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie będzie musiało czekać w kolejce*

wynosi: $\sum_{k=0}^{N-1} P_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:

$$\sum_{k=1}^N kP_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^N k \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$$

Średnia liczba zajętych kanałów wynosi: $\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=1}^N nP_{n+k} = \rho(1 - P_{n+N})$.

Średnia liczba wolnych kanałów (z powodu braku zgłoszeń) wynosi: $n - \rho(1 - P_{n+N})$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie (równa średniej liczbie zajętych kanałów obsługi plus średniej liczbie zgłoszeń czekających w kolejce) wynosi:

$$E[V] = \rho(1 - P_{n+N}) + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^N k \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$$

Średnia liczba zgłoszeń, które otrzymały odmowę wynosi: λP_{n+N} (w jednostce czasu). Średni odstęp czasu między dwoma kolejnymi zgłoszeniami, które otrzymały odmowę wynosi: $\frac{1}{\lambda P_{n+N}}$.

Średnia liczba wolnych miejsc w kolejce jest równa: $N - E[V]$.

Średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi (oczekiwania w kolejce)

wynosi: $E[T] = \frac{n\nu P_n}{(n\nu - \lambda)^2} \left[1 - (N+1) \left(\frac{\rho}{n} \right)^N + N \left(\frac{\rho}{n} \right)^{N+1} \right]$.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|0$ - jest to szczególny przypadek systemu poprzedniego, w którym występuje *strata zgłoszeń* (każde zgłoszenie, które przychodzi i zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte odchodzi nie obsłużone). Dla tego systemu prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n, \text{ gdzie: } P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) \right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie nie zostanie przyjęte* (stracone) wyraża się wzorem: $P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$, zaś prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie zostanie przyjęte* (a tym samym *obsłużone bez czekania*) wynosi:

$$1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Średnia *liczba zajętych kanałów obsługi* (tym samym średnia *liczba zgłoszeń w systemie*) wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^n k P_k = \rho \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) P_0 = \rho(1 - P_n).$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Przykład praktyczny:

Do stacji technicznej obsługi samochodów mającej $n=4$ identycznie wyposażone kanały zgłaszają się klienci. Strumień zgłoszeń jest typu Poissona z intensywnością $\lambda = 3$ zgłoszenia na godzinę. Intensywność obsługi przez każdy kanał obsługi (z wykładniczym czasem trwania obsługi) wynosi $\nu = 2$ klientów na godzinę. Zakładamy, że jest to system bez odmowy (nieograniczona ilość miejsc w kolejce).

- Sprawdzić czy system jest stabilny ? (stacjonarny):

Warunkiem koniecznym aby system był stabilny jest by: $\lambda < n\nu$.
W naszym przykładzie $\lambda = 3 < 4 \cdot 2 = 8$. Zatem system jest stabilny.

- Obliczyć: średni (w procentach) *czas przestoju wszystkich kanałów* obsługi systemu - P_0 , średnią liczbę *zajętych kanałów obsługi*, prawdopodobieństwo, że *klient będzie czekał w kolejce*, średnią *liczbę klientów w kolejce* oraz średni *czas oczekiwania klienta* na rozpoczęcie obsługi.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Procentowy (średni) czas przestoju wszystkich kanałów obsługi

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^{-1} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^3 \frac{1.5^k}{k!} + \frac{1.5^4}{4!} \left(1 - \frac{1.5}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} = 0,22$$

$$\text{bo } \rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Średnia liczba zajętych kanałów obsługi wynosi: $\rho = 1.5$

Prawdopodobieństwo, że klient będzie czekał w kolejce wynosi:

$$\Pi = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{1.5^4}{3!(4-1.5)} 0.22 = 0,074.$$

Średnia liczba klientów w kolejce wynosi:

$$P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} = 0.22 \frac{1.5^5}{3! (4-1.5)^2} = 0,045$$

- kolejka praktycznie nie istnieje

Średni czas oczekiwania klienta na rozpoczęcie obsługi wynosi:

$$E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{0.074}{4 \cdot 2 - 3} = 0,015[h] \text{ (0,9 minuty).}$$

System jest wyraźnie niedociążony (obciążenie systemu: $\frac{\lambda}{n\nu} = \frac{3}{8}$).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Przykład praktyczny 2:

Hipermarket posiada 6 stanowisk kasowych. W ciągu godziny średnio zgłaszało się do kas 60 klientów (intensywność zgłoszeń do systemu $\lambda = 60 \left[\frac{\text{os.}}{\text{godz.}} \right]$). Średni czas ich obsługi na stanowisku kasowym wynosi 2 minuty, tym samym jedna kasa może obsługiwać w ciągu 1 godziny $\nu = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30 \left[\frac{\text{os.}}{\text{godz.}} \right]$ (intensywność obsługi dla jednego kanału obsługi). Stratę jaką ponosi hipermarket z tytułu przebywania klienta w systemie przez każdą godzinę oszacowano na poziomie 12 zł. Koszt uruchomienia 1 kasy wynosi 10 zł na godzinę (wynagrodzenie godzinowe kasjerki).

Powyższy system masowej obsługi interpretujemy jako system wielokanałowy ($n=6$ stanowisk obsługi), z wykładniczym rozkładem czasu pojawiania się zgłoszeń (o intensywności $\lambda > 0$) oraz wykładniczym rozkładem czasu trwania obsługi (o intensywności $\nu > 0$). Porządek obsługi zgłoszeń oraz tworzenia się kolejki jest porządkiem naturalnym (zgodnie z kolejnością przybyć).

Jest to system bez odmowy (nieograniczona liczba miejsc w kolejce) – czyli każdy klient, który zastanie wszystkie kasy zajęte może ustawić się w kolejce i czekać na obsługę. Tworzy się jednak tyle kolejek ile jest czynnych kanałów obsługi ($n=6$).

Każdy kanał możemy interpretować jako pojedynczy system obsługi elementarny (jednokanałowy) obsługujący zgłoszenia kierowane do niego zgodnie z zasadą minimalizacji każdej kolejki.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Ile kas uruchomić, aby system obsługi generował jak najmniejsze koszty ?

Aby kolejki stale nie rosły (czyli aby system był systemem funkcjonującym w ustabilizowanych warunkach – system stacjonarny) musi być spełniony warunek

$$\frac{\lambda}{n \cdot v} < 1 \Rightarrow \frac{60}{n \cdot 30} < 1 \Rightarrow n > 2 \quad (n=3 \text{ kasy są minimalną liczbą kanałów obsługi}).$$

Średnia liczba zgłoszeń (klientów) w systemie z jednym kanałem obsługi dana jest wzorem: $\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{v-\lambda}$, bo $\rho = \frac{\lambda}{v}$, dlatego średnia liczba osób w każdym

elementarnym systemie obsługi (pojedyncze stanowisko kasowe) dana jest wzorem: $L_s^{(n=1)} = \frac{\lambda/n}{v-\lambda/n}$.

Średnia liczba osób w całym systemie obsługi wynosi:

$$L_s = n \cdot L_s^{(n=1)} = n \cdot \frac{\lambda/n}{v-\lambda/n} = \frac{\lambda}{v-\lambda/n}.$$

Łączny koszt obsługi całego systemu składającego się z n – kanałów obsługi

(n kas) wynosi: $K(n) = b \cdot L_s + p \cdot n = b \cdot \frac{\lambda}{v-\lambda/n} + p \cdot n,$

gdzie:

b - strata jaką ponosi system, gdy pojedynczy klient przebywa przez jednostkę czasu w systemie (b=12 zł – strata na godzinę)

p – koszt utrzymania kanału obsługi w jednostce czasu (p=10 zł – koszt godzinowy)

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Zadanie decyzyjne sprowadza się do znalezienia takiej liczby kanałów obsługi n^* , aby:

$$K(n^*) = \min \{K(n) : n \in D\},$$

gdzie D – zbiór dopuszczalnych wariantów liczby kanałów obsługi

n^* - można wyznaczyć stosując przegląd zupełny zbioru D , albo stosując rachunek różniczkowy do wyznaczenia minimum funkcji $K(n)$.

Przegląd zupełny rozwiązań dopuszczalnych wygląda następująco:

$$K(3) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/3} + 10 \cdot 3 = 102$$

$$K(4) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/4} + 10 \cdot 4 = 88 - \text{ optymalne } n^* = 4$$

$$K(5) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/5} + 10 \cdot 5 = 90$$

$$K(6) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/6} + 10 \cdot 6 = 96$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Wyznaczyć charakterystyki osobowo-czasowe dla optymalnego systemu (n=4) kasami obsługi.

Średnia liczba osób w całym systemie obsługi wynosi:

$$L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda/n} = \frac{60}{30 - 60/4} = 4 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce w elementarnym systemie z pojedynczym stanowiskiem kasowym dana jest wzorem:

$$L_k^{(n=1)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda/n}{\nu} \cdot \frac{\lambda/n}{\nu - \lambda/n}, \text{ gdyż } \rho = \frac{\lambda/n}{\nu}.$$

Zatem dla całego systemu obsługi składającego się z n=4 – elementarnych systemów jednokanałowych otrzymujemy:

$$L_k = n \cdot L_k^{(n=1)} = \frac{\lambda/n}{\nu} \cdot \frac{\lambda/n}{\nu - \lambda/n} \cdot n = \frac{\lambda/n}{\nu} \cdot L_s, \text{ gdyż } L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda/n}$$

$$L_k = \frac{60/4}{30} \cdot 4 = 2 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba osób w obsłudze wynosi: $L_o = L_s - L_k = \frac{\lambda}{\nu} = 2 \text{ [osoby]}$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

średni czas przebywania w systemie,
średni czas oczekiwania na obsługę w kolejce,
średni czas obsługi klienta,

są równe odpowiednim charakterystykom dla elementarnego systemu masowej obsługi (z jednym stanowiskiem kasowym)

$$T_s = T_s^{(n=1)} = \frac{1}{\nu - \lambda/n} = \frac{1}{30 - 60/4} = \frac{1}{15} \text{ [godz.]} \text{ (4 minuty)}$$

$$T_k = T_k^{(n=1)} = \frac{\frac{\lambda/n}{\nu}}{\nu - \lambda/n} = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot \frac{\lambda}{\nu - \lambda/n} = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot L_s = \frac{1}{30 \cdot 4} \cdot 4 = \frac{1}{30} \text{ [godz.]} \text{ (2 minuty)}$$

$$T_o = T_o^{(n=1)} = T_s - T_k = 4 - 2 = 2 \text{ [min.]}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Ze względu na niskie płace personelu ($p=10$ zł) udało się zatrudnić tylko 3 kasjerki. Wyznaczyć charakterystyki osobowo-czasowe dla systemu z ($n=3$) kasami obsługi.

Średnia liczba osób w systemie obsługi wynosi:

$$L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda/n} = \frac{60}{30 - 60/3} = 6 \text{ [osób]}$$

Średnia liczba klientów czekających w kolejce dla systemu z $n=3$ kasami obsługi wynosi:

$$L_k = \frac{\lambda/n}{\nu} \cdot L_s = \frac{60/3}{30} \cdot 6 = 4 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba osób obsługiwanych wynosi: $L_o = L_s - L_k = 6 - 4 = 2$ [osoby]

Średni czas przebywania w systemie, średni czas oczekiwania na obsługę w kolejce oraz średni czas obsługi klienta wynosi w tym przypadku:

$$T_s = \frac{1}{\nu - \lambda/n} = \frac{1}{30 - 60/3} = \frac{1}{10} \text{ [godz.]} \text{ (6 minut)}$$

$$T_k = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot L_s = \frac{1}{30 \cdot 3} \cdot 6 = \frac{1}{15} \text{ [godz.]} \text{ (4 minuty)}$$

$$T_o = T_s - T_k = 6 - 4 = 2 \text{ [min.]}$$

- Ile warto zapłacić czwartej kasjerce aby zachęcić ją do pracy

Ponieważ $K(3)=102$ zł, zaś $K(4)=88$ zł, to opłaca się dodatkowo zapłacić co najwyżej 14 zł (będzie zarabiać 24 zł na godzinę)