

ANALIZA SIECIOWA PRZEDSIĘWZIĘĆ METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ ALGORYTM – CPM

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Analiza sieci z funkcją czasu. Metoda ścieżki krytycznej – CPM:

Metoda CPM (*Critical Path Method*) jest historycznie najwcześniej opracowaną metodą analizy sieciowej. Umożliwia ona takie zaplanowanie harmonogramu realizacji przedsięwzięcia, przy której jego czas realizacji jest najkrótszy.

Metoda ta wymaga, aby sieć czynności była określona w postaci kanonicznej (deterministyczna jej struktura) oraz aby czasy realizacji wszystkich czynności były zdeterminowane (znane). W sieci takiej czynności są realizowane niezależnie od uwarunkowań losowych.

Kanoniczna **sieć przedsięwzięcia**: $G\langle V, U, t \rangle$ posiada funkcję $t: U \rightarrow R^+$, która każdemu łukowi $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ przypisuje nieujemną liczbę $t_{\alpha\beta} \in R^+$ opisującą czas trwania czynności związanej z łukiem **u**, która zaczyna się zdarzeniem v_α a kończy zdarzeniem v_β .

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Z punktu widzenia menadżera istotne są informacje o **czasie realizacji całego przedsięwzięcia** oraz o **czasach realizacji krytycznych czynności** w tym przedsięwzięciu.

Czynność jest **krytyczna** jeśli czas jej realizacji (pełnego wykonania) decyduje o czasie zakończenia przedsięwzięcia w **zaplanowanym terminie**.

Wszystkie potrzebne informacje (o czasie realizacji przedsięwzięcia, czynnościach krytycznych, zapasach czasu dla poszczególnych czynności) mogą być uzyskane metodą **CPM**.

Metoda ścieżki krytycznej oparta jest na następujących założeniach determinujących jednocześnie odpowiedni sposób postępowania przy określaniu krytycznych czynności przedsięwzięcia:

1. Rozpoczęcie realizacji jakiegokolwiek czynności możliwe jest jedynie wtedy, gdy wszystkie czynności ją poprzedzające zostały zrealizowane.
2. Moment w którym rozpoczyna się realizacja całego przedsięwzięcia uznajemy za zerowy, tzn. $t_1 = 0$ (termin rozpoczęcia zdarzenia odpowiadającego wierzchołkowi początkowemu v_1 w sieci czynności).

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

3. Z uwagi na założenie nr 1 **najwcześniejszy możliwy termin** wystąpienia zdarzenia związanego z węzłem $v_\beta \in V, \beta > 1$ obliczamy rekurencyjnie następująco:

$$t_\beta = \max_{\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{ t_\alpha + t_{\alpha\beta} \} \text{ dla } \beta = 2, 3, \dots, n \text{ (n – liczebność zbioru } V)$$

Czas ten oznacza również najwcześniejszy z możliwych momentów czasowych, w których może być wykonana czynność rozpoczynająca się zdarzeniem v_β .

Czas t_β jest ponadto maksymalnym czasem realizacji wszystkich czynności na każdej ścieżce $[v_1, v_\beta]$ w sieci modelowanej grafem **G**.

Czas realizacji wszystkich czynności ścieżki $[v_1, v_\beta]$ jest rozumiany jako:

$$t_{[1,\beta]} = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,\beta]}} t_{ij}, \text{ gdzie } U_{[1,\beta]} \text{ jest zbiorem łuków ze zbioru } U, \text{ które}$$

tworzą drogę zgodnie skierowaną (czyli ścieżkę) w grafie **G** zaczynającą się węzłem v_1 a kończącą węzłem v_β .

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Jeśli v_n oznacza wierzchołek końcowy (wyjściowy) sieci, to t_n jest czasem wykonania (terminem realizacji całego przedsięwzięcia). Jest to **najkrótszy z możliwych czasów zakończenia całego przedsięwzięcia**, jeśli tylko uwzględnimy spełnienie założenia 1.

Drogi skierowane (ścieżki) $[1, n]$ w sieci G dla których spełniony jest warunek: $t_{[1, n]} = t_n$ nazywamy **drogami (ścieżkami) krytycznymi**.

Czynności odpowiadające łukom leżącym na drodze krytycznej są zatem czynnościami krytycznymi.

4. Oznaczamy przez T_α - **najpóźniejszy dopuszczalny** termin wystąpienia zdarzenia $v_\alpha \in V$. Czas ten określa również najpóźniejszy z możliwych termin rozpoczęcia realizacji czynności (zaczynającej się zdarzeniem v_α), tak aby nie przekroczyć sumarycznego czasu t_n zrealizowania całego przedsięwzięcia (z jednoczesnym zachowaniem założenia 1).

W metodzie CPM najpóźniejsze dopuszczalne czasy wystąpienia dla poszczególnych zdarzeń wyznaczamy rekurencyjnie następująco:

Przyjmujemy, że dla węzła wyjściowego sieci G zachodzi: $T_n = t_n$, natomiast dla pozostałych zdarzeń $v_\alpha \in V - \{v_n\}$ czasy te wyznaczamy następująco:

$$T_\alpha = \min_{\beta \in \Gamma_\alpha^+} \{T_\beta - t_{\alpha\beta}\} \text{ dla } \alpha = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Oczywiste jest, że dla każdego zdarzenia $v_\alpha \in V$ spełnione jest $t_\alpha \leq T_\alpha$, zaś zdarzenia w których $t_\alpha = T_\alpha$ nazywamy zdarzeniami krytycznymi.

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Rezerwy czasowe w sieciowym modelu realizacji przedsięwzięcia:

Znajomość czasów w odniesieniu do poszczególnych czynności: $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ przedsięwzięcia modelowanego siecią czynności z grafem **G** umożliwia określenie odpowiednich rezerw czasowych dla kolejnych czynności.

Dla danej czynności: $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ **oznaczymy przez:**

$t_{\alpha\beta, rozp} = t_\alpha$ - czas najwcześniejszego rozpoczęcia czynności,

$t_{\alpha\beta, zak} = t_\alpha + t_{\alpha\beta}$ - czas najwcześniejszego zakończenia czynności,

$T_{\alpha\beta, rozp} = T_\beta - t_{\alpha\beta}$ - czas najpóźniejszego rozpoczęcia czynności,

$T_{\alpha\beta, zak} = T_\beta$ - czas najpóźniejszego zakończenia czynności,

Ponadto dla kolejnych wierzchołków (zdarzeń) $v_\alpha \in V$ grafu **G** oraz kolejnych jego łuków (czynności) $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ określamy następujące rezerwy czasowe:

- $z(\alpha) = T_\alpha - t_\alpha$ - **luz czasowy** dla zdarzenia v_α ;

Luz czasowy – charakteryzuje rezerwę czasową w zdarzeniu $v_\alpha \in V$ i jest długością przedziału czasu $[t_\alpha, T_\alpha]$, w którym może nastąpić realizacja tego zdarzenia bez zmiany (wydłużenia) czasu realizacji całego przedsięwzięcia.

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_c(\alpha, \beta) = T_{\alpha\beta, rozp} - t_\alpha = T_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas całkowity** czynności **u**;

Zapas całkowity $z_c(\alpha, \beta)$ - jest czasem o jaki można **opóźnić rozpoczęcie** realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (lub **wydłużyć jej realizację**) bez wpływu na **czas wykonania całego przedsięwzięcia**, przy założeniu, że czasy realizacji pozostałych czynności przedsięwzięcia nie ulegają zmianie.

Jeżeli $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ jest czynnością krytyczną (leży na ścieżce krytycznej), to $z_c(\alpha, \beta) = 0$ (**twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe**).

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_s(\alpha, \beta) = t_\beta - t_{\alpha\beta, zak} = t_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas swobodny** dla czynności **u**;
Swobodny (wolny) zapas czasowy $z_s(\alpha, \beta)$ – informuje o ile można **opóźnić** (lub **wydłużyć**) czas realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ **nie zmieniając terminu zajścia** (realizacji) zdarzenia **poprzedzającego** - v_α i **następującego** - v_β po danej czynności.

Wykorzystanie tego zapasu **nie ma wpływu** na zapasy związane z czynnościami należącymi do danej ścieżki.

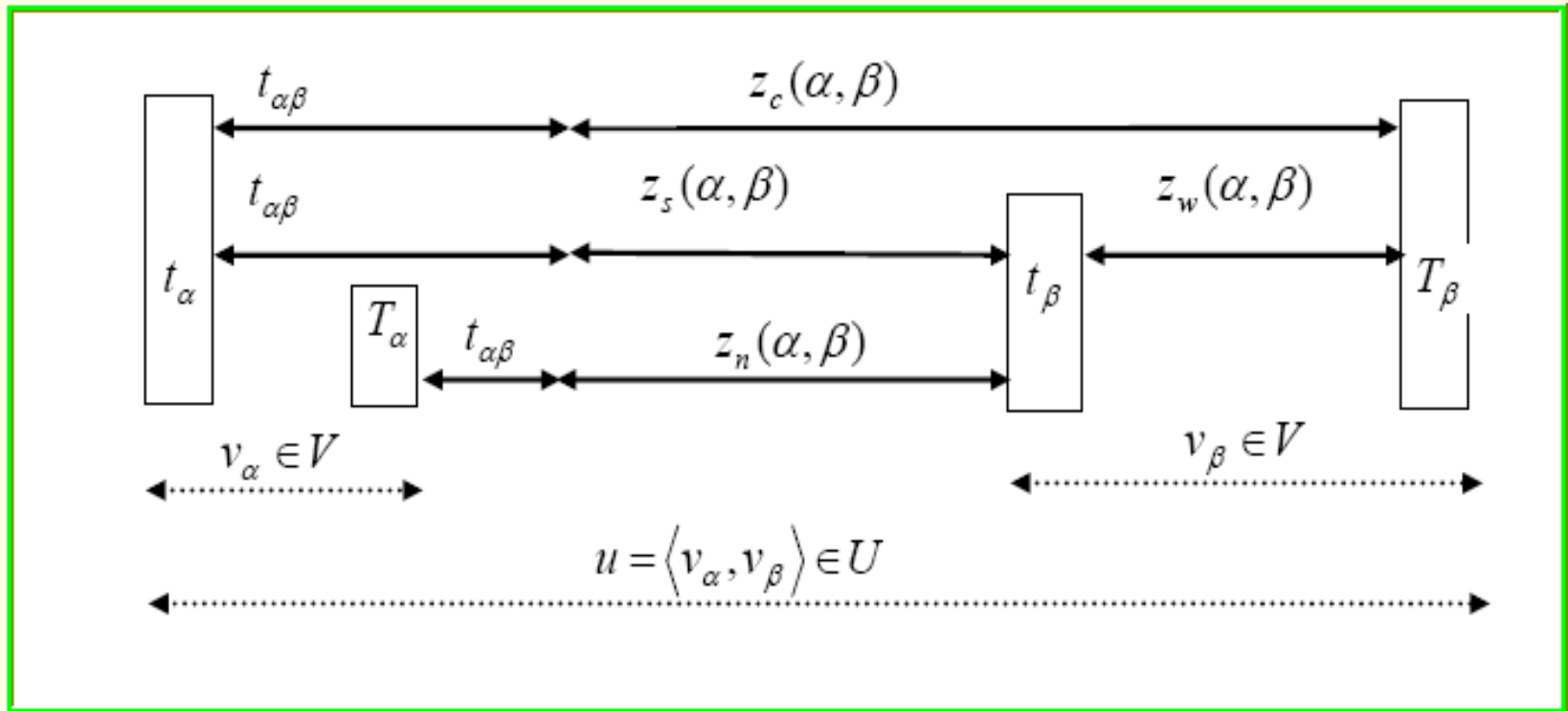
Uwaga: mogą istnieć czynności dla których $z_s(\alpha, \beta) = 0$ i które nie leżą na drodze krytycznej.

- $z_w(\alpha, \beta) = z_c(\alpha, \beta) - z_s(\alpha, \beta) = T_\beta - t_\beta$ - **zapas warunkowy** dla czynności **u**;
Jest zatem **luzem czasowym** dla zdarzenia kończącego czynność. Ta rezerwa czasu może być wykorzystana dla czynności **bez zmniejszenia zapasów poprzednich** określonych dla czynności **danej ścieżki**.

- $z_n(\alpha, \beta) = \max\{0; t_\beta - T_\alpha - t_{\alpha\beta}\}$ - **zapas niezależny** dla danej czynności **u**;
Zapas niezależny $z_n(\alpha, \beta)$ - jest czasem o jaki można opóźnić wykonanie czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ w stosunku do najpóźniejszego terminu T_α i bez naruszenia terminu t_β .

Wykorzystanie tej rezerwy czasu **nie ma wpływu na zapas** jakiegokolwiek innej czynności przedsięwzięcia.

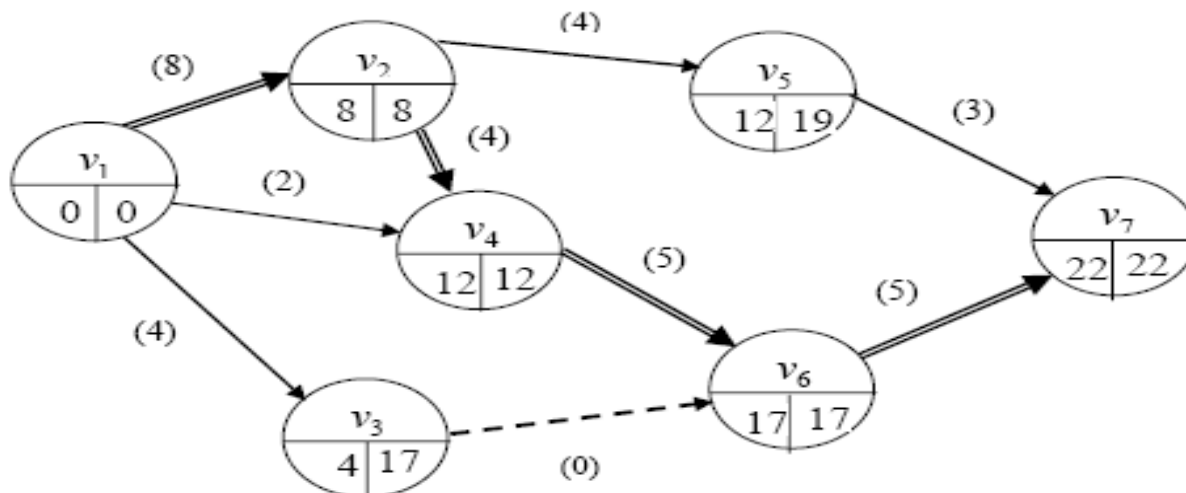
□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM



PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Rezerwy czasowe dla czynności:

Czynność $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle$	Czas trwania czynności $t_{\alpha\beta}$	Czas $t_{\alpha\beta, rozp}$	Czas $t_{\alpha\beta, zak}$	Czas $T_{\alpha\beta, rozp}$	Czas $T_{\alpha\beta, zak}$	Rezerwa czasowa $z_c(\alpha, \beta)$	Rezerwa czasowa $z_s(\alpha, \beta)$	Rezerwa czasowa $z_n(\alpha, \beta)$
$\langle 1,2 \rangle$	8	0	8	0	8	0 (*)	0 (*)	0 (*)
$\langle 1,3 \rangle$	4	0	4	13	17	13	0	0
$\langle 1,4 \rangle$	2	0	2	10	12	10	10	10
$\langle 2,4 \rangle$	4	8	12	8	12	0 (*)	0 (*)	0 (*)
$\langle 2,5 \rangle$	4	8	12	15	19	7	0	0
$\langle 3,6 \rangle$	0	4	4	17	17	13	13	0
$\langle 4,6 \rangle$	5	12	17	12	17	0 (*)	0	0 (*)
$\langle 5,7 \rangle$	3	12	15	19	22	7	7	0
$\langle 6,7 \rangle$	5	17	22	17	22	0 (*)	0	0 (*)



PLANOWANIE SIECIOWE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

(algorytm metody PERT)

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

W dalszej części wykładu zaprezentowana zostanie metoda analizy sieci dla przedsięwzięć o zdeterminowanej strukturze (**sieć kanoniczna**), lecz o **losowym** czasie trwania czynności (oceny czasów trwania poszczególnych czynności charakteryzują się pewną niepewnością).

Metoda **PERT** (**Program Evaluation and Review Technique**), której autorami są: *Malcolm, Roseboom, Clark, Fazar* - została opracowana w 1958 roku dla potrzeb programu opracowania raketowego pocisku balistycznego **Polaris**.

Istotnym elementem metody **PERT** jest sposób oceny czasu trwania czynności (zakładamy, że **nie jest** on **deterministyczny** – czyli znany).

Problem ten jest o tyle złożony, że nie mamy możliwości oszacowania tego czasu metodami statystycznymi (gdyż przedsięwzięcia tego typu, które można analizować metodą PERT są zwykle **jednorazowe** i mają charakter **prototypowy**). Metoda ta może być również stosowana dla przedsięwzięć, których czasy trwania czynności mogą podlegać znacznym wahaniom.

W warunkach losowego czasu trwania czynności analiza sieci dla potrzeb planowania i kontroli realizacji przedsięwzięcia wymaga jednak znajomości charakterystyk rozkładu czasu trwania czynności.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Problem ten rozwiązano następująco. Mimo, że rozkład czasu trwania czynności jest nieznany (nie można również go oszacować statystycznie), to można przyjąć pewne jego hipotetyczne własności:

- Jest to rozkład ciągły,
- Jest rozkładem z jednym ekstremum,
- Jego funkcja gęstości (rozkładu) styka się w dwóch punktach (nieujemnych) z osią poziomą (odciętych).

Jednym z takich rozkładów jest rozkład **beta**, który został wybrany przez autorów metody na zasadzie intuicji wynikającej z doświadczeń praktycznych.

Metoda PERT jest więc analityczną procedurą obliczania czasu realizacji przedsięwzięcia wykorzystującą jego sieć: $G = \langle V, U, t \rangle$, w której struktura topologiczna (geometryczna) przedsięwzięcia jest zdeterminowana (znana), zaś losowy (nieznany) czas $t_{\alpha\beta}$ realizacji poszczególnych czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ jest zmienną losową o rozkładzie **beta**.

❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Rozkład **beta** w metodzie **PERT** został praktycznie uzależniony od kilku parametrów (np. na podstawie oceny ekspertów) posiadających następujące znaczenie praktyczne:

$a_{\alpha\beta}$ - najkrótszy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ (tzw. **ocena optymistyczna**);

$m_{\alpha\beta}$ - czas realizacji czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ posiadający największe prawdopodobieństwo zaistnienia (tzw. **ocena modalna**);

$b_{\alpha\beta}$ - najdłuższy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ (tzw. **ocena pesymistyczna**).

Średni czas oraz wariancję realizacji czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ możemy uzależnić od parametrów $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}$ następująco:

(*)

$$E[t_{\alpha\beta}] = \frac{a_{\alpha\beta} + 4m_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}}{6}, \quad D^2[t_{\alpha\beta}] = \left(\frac{b_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}}{6} \right)^2$$

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Algorytm metody PERT:

Sieć przedsięwzięcia $G = \langle V, U, a, m, b \rangle$ ma trzy funkcje obciążające jej łuki: $a, b, m: U \rightarrow R^+$, których wartości na łuku czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ reprezentują odpowiednio: $a_{\alpha\beta}$ - optymistyczną, $m_{\alpha\beta}$ - najbardziej prawdopodobną oraz $b_{\alpha\beta}$ - pesymistyczną ocenę czasu $t_{\alpha\beta}$ - trwania takiej czynności.

Parametry te służą do aproksymacji wartości oczekiwanej oraz wariancji czasu trwania czynności (zgodnie ze wzorami (*)).

Podstawowym zadaniem metody **PERT** jest oszacowanie wartości oczekiwanych najwcześniejszych terminów - t_α realizacji zdarzeń $v_\alpha \in V$ w badanej sieci realizacji przedsięwzięcia.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Algorytm jest oparty o wzory rekurencyjne i polega na:

1. Przyjęciu założenia, że $E[t_1] = D^2[t_1] = 0$, gdzie v_1 - jest wierzchołkiem początkowym sieci realizacji przedsięwzięcia.
2. Wartość oczekiwaną $E[t_\beta]$ oraz wariancję $D^2[t_\beta]$ najwcześniejszego możliwego terminu zajścia dla pozostałych zdarzeń $\beta = 2, 3, \dots, n$ oblicza się ze wzorów:

$$E[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]\},$$
$$D^2[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-; E[t_\beta] = E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]} \{D^2[t_\alpha] + D^2[t_{\alpha\beta}]\},$$

Zauważmy, że wartości oczekiwane czasów t_β są wyznaczone analogicznie jak w metodzie CPM. Dlatego obie metody dają identyczne wyniki, jeśli tylko dla każdej czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ spełniony jest następujący warunek: $a_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Uwaga: W metodzie PERT definiuje się także drogi krytyczne $[1,n]$, dla których wartość oczekiwana czasu ich realizacji jest równa średniemu czasowi zakończenia całego przedsięwzięcia:

$$E[t_n] = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,n]}} E[t_{ij}],$$

gdzie: $U_{[1,n]}$ - jest zbiorem łuków ścieżki krytycznej od wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego sieci czynności.

Uwaga: Wariancja czasu t_n najwcześniejszej możliwej realizacji zdarzenia końcowego $v_n \in V$ jest równa maksymalnej wariancji ze zbioru wszystkich dróg krytycznych badanej sieci przedsięwzięcia.

Przyjmuje się, że rozkład czasu realizacji całego przedsięwzięcia jest asymptotycznie normalny o średniej $E[t_n]$ i odchyleniu standardowym $\sigma[t_n] = \sqrt{D^2[t_n]}$, czyli korzystając z tego założenia można oszacować prawdopodobieństwo dotrzymania terminu realizacji przedsięwzięcia:

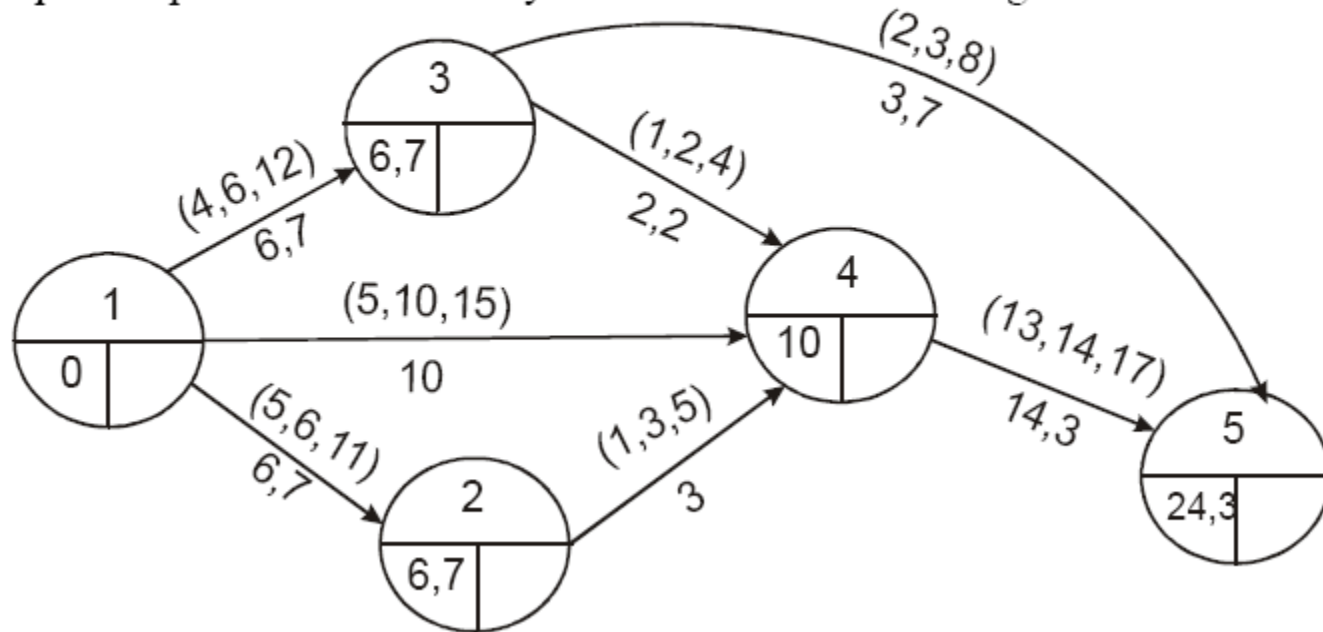
$$P(t_n \leq t_{dane}) \approx \Phi\left(\frac{t_{dane} - E[t_n]}{\sigma[t_n]}\right),$$

gdzie: Φ - jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$.

❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Przykład:

Dla przedsięwzięcia, którego model sieciowy przedstawiono na rysunku obliczyć średni (oczekiwany) czas jego realizacji, wariancję czasu jego realizacji oraz prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego $T^* = 25$ dni.



❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Średnie czasy trwania czynności i wariancje dla czynności obliczamy:

$$E[t_{\alpha\beta}] = \frac{a_{\alpha\beta} + 4m_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}}{6}, \quad D^2[t_{\alpha\beta}] = \left(\frac{b_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}}{6} \right)^2$$

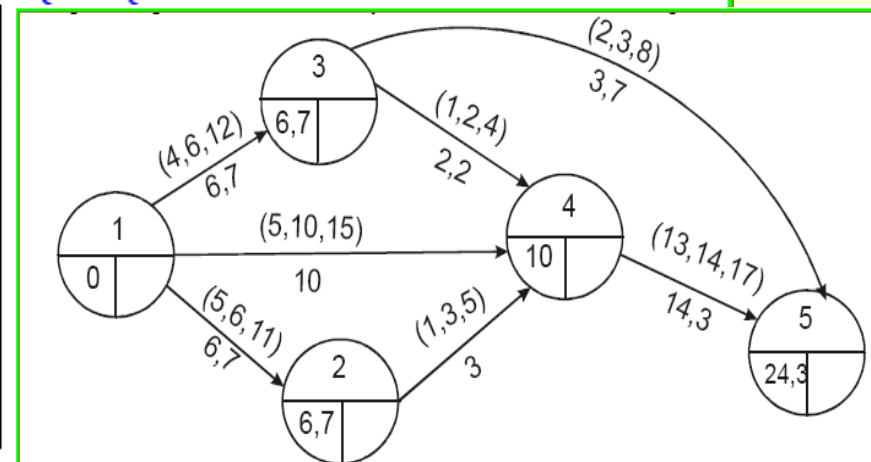
Oczekiwany czas trwania przedsięwzięcia i jego wariancję obliczamy rekurencyjnie:

$$E[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]\},$$

$$D^2[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-; E[t_\beta] = E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]} \{D^2[t_\alpha] + D^2[t_{\alpha\beta}]\}$$

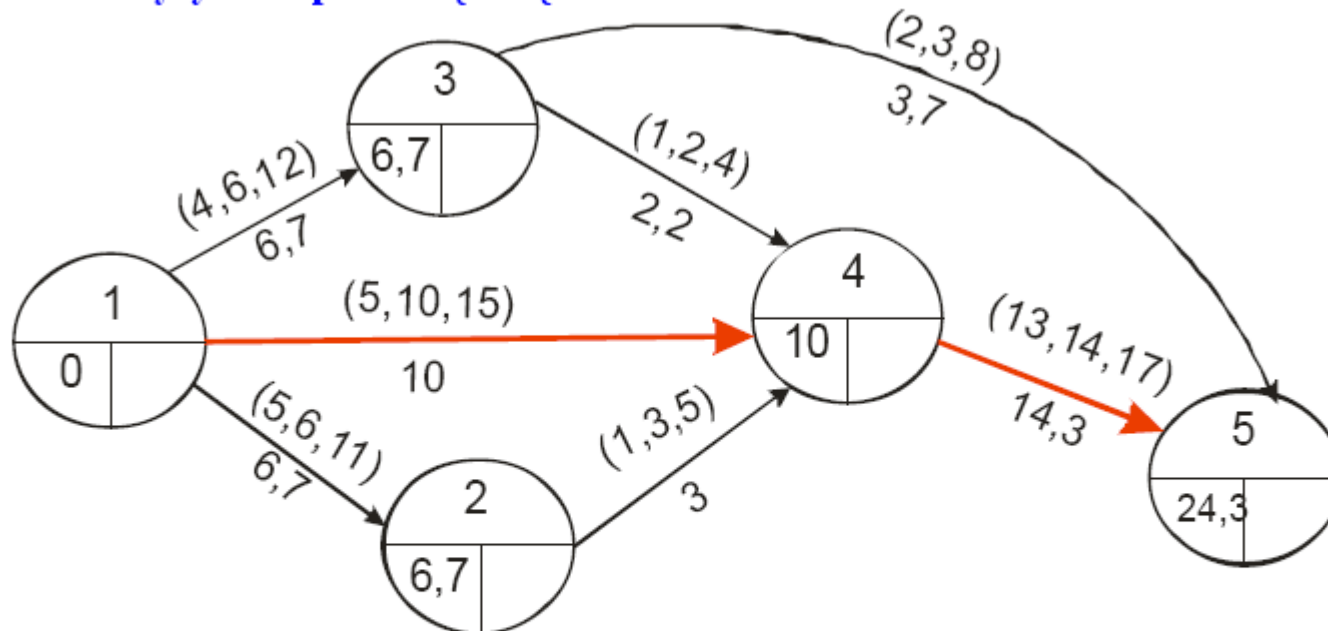
Tabela obliczonych charakterystyk przedsięwzięcia:

Zdarzenie:	$D^2[t_\beta]$	Czynność:	$D^2[t_{\alpha\beta}]$
1	0	(1,2)	1
2	1	(1,3)	1,8
3	1,8	(1,4)	2,8
4	2,8	(2,4)	0,4
5	3,2	(3,4)	0,25
		(3,5)	1
		(4,5)	0,4



❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Ścieżka krytyczna przedsięwzięcia:



- Prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego = 25 dni wynosi:

$$P(t_5 \leq 25) \approx \Phi\left(\frac{25 - 24,3}{\sqrt{3,2}}\right) \approx \Phi(0,39) \approx 0,52 \quad - \quad \text{istnieje przeciętne ryzyko}$$

związane z realizacją tego przedsięwzięcia.

❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

- Jak zmieni się czas wykonania przedsięwzięcia, gdy czynność: (3,4) będzie realizowana w czasie: najkrótszym – 2 dni, modalnym – 4 dni oraz najdłuższym – 6 dni ?

Powstanie nowa ścieżka krytyczna, a oczekiwany termin realizacji ulegnie wydłużeniu do 25 dni.

