Wybrane metody planowania sieciowego
Analiza czasowo-kosztowa

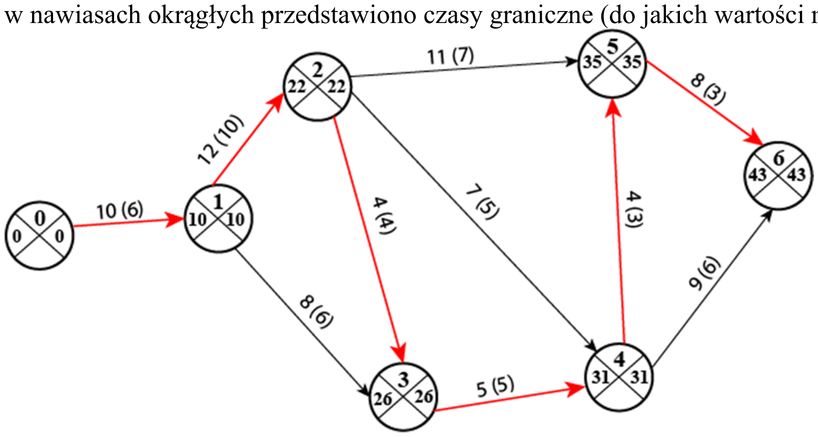
Literatura:
- *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach (K. Kukuła red.) – rozdziały 5.4-5.6, str. 190-196 (zadania: 200-212)*
- *Materiały (PDF) z wykładu*

Przykład 1. (algorytm CPM-Cost) Przedsięwzięcie składa się z 10 czynności, dla których podano czasy normalne (t_n) , czasy graniczne (t_g) [w tygodniach] oraz koszty normalne (K_n) i koszty graniczne (K_g) [w tysiącach złotych] (zob. tabela). Stosując algorytm metody „*CPM-Cost*"

Czynności (i,j)	tn	tg	Kn	Kg
(0,1)	10	6	30	40
(1,2)	12	10	43	45
(1,3)	8	6	26	30
(2,3)	4	4	15	15
(2,4)	7	5	20	22
(2,5)	11	7	24	30
(3,4)	5	5	10	10
(4,5)	4	3	8	11
(4,6)	9	6	16	19
(5,6)	8	3	27	37

a) Wykreślić sieć zależności oraz wyznaczyć najwcześniejszy możliwy termin zakończenia przedsięwzięcia.
b) Do jakiego terminu można skrócić czas realizacji przedsięwzięcia ? Jakie się z tym wiążą koszty ?
c) Skrócić czas realizacji przedsięwzięcia tak, aby koszty skracania nie przekroczyły 14 tys. zł.
d) Skrócić czas realizacji przedsięwzięcia o 5 tygodni przy możliwie najniższym koszcie. Ile wynoszą koszty skrócenia.

Ad a)
Stosując metody planowania ścieżki krytycznej CPM wyznaczono się czynności dla przedsięwzięcia z normalnymi czasami trwania czynności (rys. 1). Na łukach zobrazowano normalne czasy trwania czynności, zaś w nawiasach okrągłych przedstawiono czasy graniczne (do jakich wartości można je maksymalnie skrócić).



Rys. 1. Model sieciowy z normalnymi czasami trwania czynności.

Istnieje zatem jedna ścieżka krytyczna: 0-1-2-3-4-5-6 o długości 43 tygodni. Przedsięwzięcie może zatem najwcześniej zakończyć się po upływie 43 tygodni. Koszty łączne wykonania wszystkich czynności (i,j) wynoszą: $\sum_{(i,j)\in U} K_{(n)}^{(i,j)} = 219$ [tys. zł].

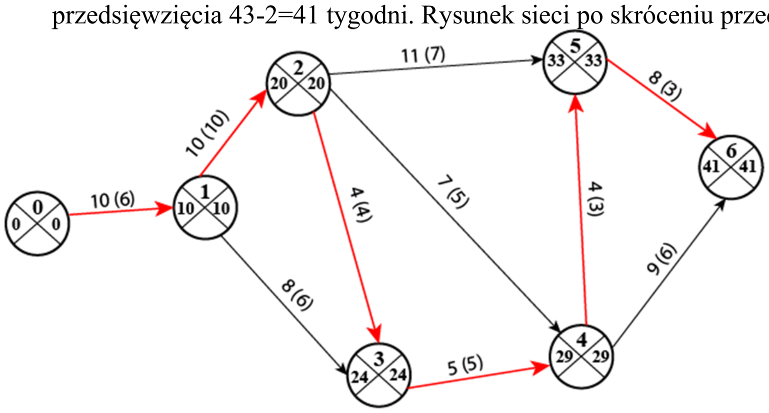
Ad b) Wyznaczamy zapasy czasu całkowitego $Z_c(i,j)$ oraz gradient kosztów $S_{ij} = \frac{K_g^{(i,j)} - K_n^{(i,j)}}{t_n^{(i,j)} - t_g^{(i,j)}}$ dla każdej czynności (tabela):

Czynności (i,j)	**tn**	**tg**	**Kn**	**Kg**	S_{ij}	$Z_c(i,j)$
(0,1)	10	6	30	40	2,5	0 (*)
(1,2)	12	10	43	45	1	0 (*)
(1,3)	8	6	26	30	2	8
(2,3)	4	4	15	15	-	0 (*)
(2,4)	7	5	20	22	1	2
(2,5)	11	7	24	30	1,5	2
(3,4)	5	5	10	10	-	0 (*)
(4,5)	4	3	8	11	3	0 (*)
(4,6)	9	6	16	19	1	3
(5,6)	8	3	27	37	2	0 (*)
Koszty razem			219	259		

Zauważmy, że dla czynności (2,3) oraz (3,4) gradient kosztów nie istnieje, gdyż są one już wykonywane w czasach granicznych i dalsze skracanie jest niemożliwe.

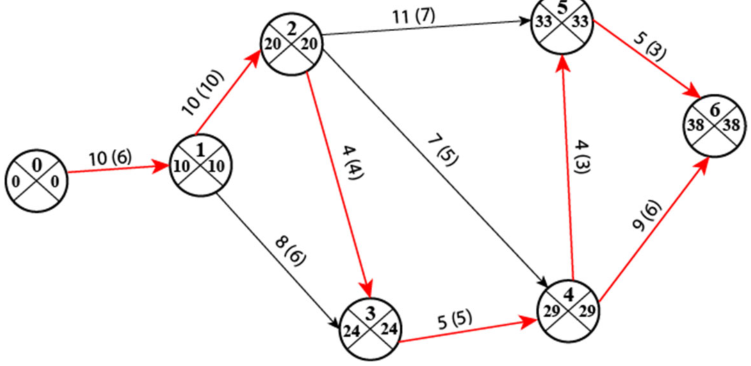
Zaczynamy skracać oczywiście te czynności leżące na ścieżce krytycznej, które mają najmniejszy gradient (najniższy wzrost kosztów akceleracji).

- Skracamy zatem czynność (1,2) o 2 tygodnie do jej czasu granicznego. Koszt akceleracji wynosi zatem $K_1 = 2 * 1 = 2$ [tys. zł]. Ścieżka krytyczna pozostaje ta sama: 0-1-2-3-4-5-6. Czas trwania realizacji przedsięwzięcia 43-2=41 tygodni. Rysunek sieci po skróceniu przedstawia rys. 2.



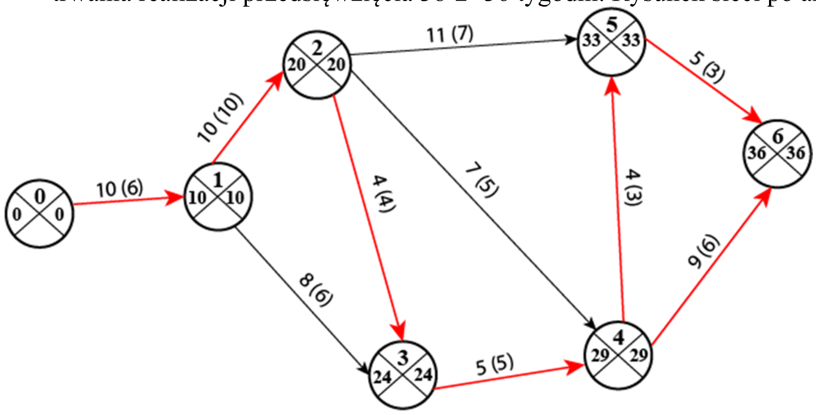
Rys. 2. Sieć po (1) etapie akceleracji.

- Skracamy następnie kolejną czynność na ścieżce krytycznej (według wzrastającego gradientu) tj. (5,6), ale tylko o 3 tygodnie (a nie o 5), gdyż powstanie druga ścieżka krytyczna o tej samej długości i większe skrócenie tej czynności byłoby nieefektywne kosztowo (generuje dodatkowe koszty a czas trwania przedsięwzięcia nie ulega zmianie). Koszt akceleracji wynosi zatem $K_2 = 3 * 2 = 6$ [tys. zł]. Powstają dwie równoległe ścieżki krytyczne: 0-1-2-3-4-5-6 oraz 0-1-2-3-4-6. Czas trwania realizacji przedsięwzięcia 41-3=38 tygodni. Rysunek sieci po akceleracji przedstawia rys. 3.



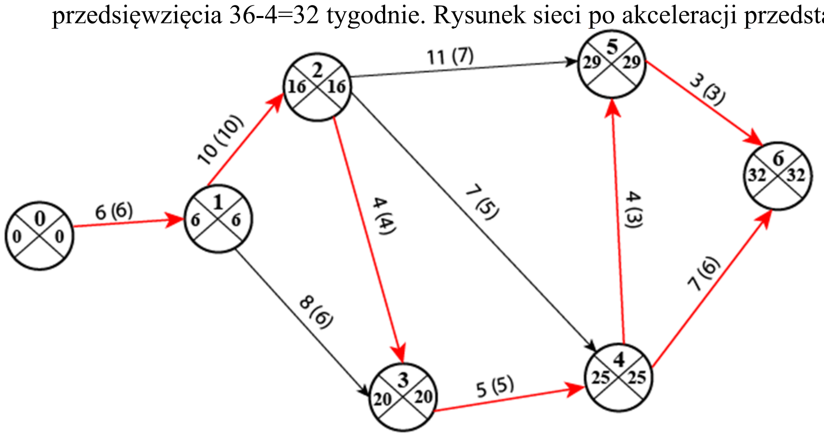
Rys. 3. Sieć po (2) etapie akceleracji.

- Możemy teraz skrócić (5,6) o kolejne 2 tygodnie. Tym samym musimy jednocześnie na drugiej równoległej ścieżce skrócić czynność (4,6) także o 2 tygodnie. Koszt akceleracji wynosi zatem $K_3 = 2 * 2 + 2 * 1 = 6$ [tys. zł]. Ścieżki krytyczne pozostają dalej te same (dwie równoległe): 0-1-2-3-4-5-6 oraz 0-1-2-3-4-6. Czas trwania realizacji przedsięwzięcia 38-2=36 tygodni. Rysunek sieci po akceleracji przedstawia rys. 4.



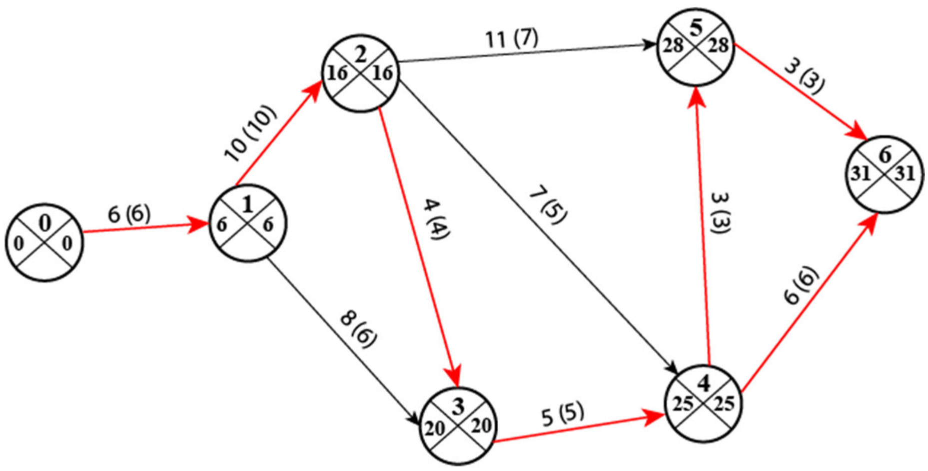
Rys. 4. Sieć po (3) etapie akceleracji.

- Skracamy teraz (0,1) o 4 tygodnie. Koszt akceleracji wynosi zatem $K_4 = 4 * 2{,}5 = 10$ [tys. zł]. Ścieżki krytyczne pozostają dalej te same (dwie równoległe): 0-1-2-3-4-5-6 oraz 0-1-2-3-4-6. Czas trwania realizacji przedsięwzięcia 36-4=32 tygodnie. Rysunek sieci po akceleracji przedstawia rys. 5.



Rys. 4. Sieć po (4) etapie akceleracji.

- W ostatnim (5) etapie możemy wreszcie skrócić (4,5) o 1 tydzień. Tym samym musimy jednocześnie na drugiej równoległej ścieżce skrócić czynność (4,6) także o 1 tydzień. Koszt akceleracji wynosi zatem $K_5 = 1 * 3 + 1 * 1 = 4$ [tys. zł]. Ścieżki krytyczne pozostają dalej te same (dwie równoległe): 0-1-2-3-4-5-6 oraz 0-1-2-3-4-6. Czas trwania realizacji przedsięwzięcia 32-1=31 tygodni. Rysunek sieci po akceleracji przedstawia rys. 5.



Rys. 5. Sieć po (5) etapie akceleracji.

Ponieważ wszystkie czynności na ścieżkach krytycznych zostały skrócone do czasów granicznych dalsze skracanie jest niemożliwe. Tym samym możemy maksymalnie analizowane przedsięwzięcie skrócić do czasu 31 tygodni. Wiąże się to ze zwiększeniem kosztów realizacji o
$\Delta K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 = 2 + 6 + 6 + 10 + 4 = 28$ tys. zł.
Łączne koszty realizacji całego przedsięwzięcia w takim terminie wyniosą zatem:
$K = \sum_{(i,j)} K_{(n)}^{(i,j)} + \Delta K = 219 + 28 = 247$ tys. zł.

Ad c) Możemy skrócić przedsięwzięcie do 36 tygodni, tak aby koszty akceleracji nie były większe niż 14 tys. zł. (akceleracja z 3 pierwszych etapów)

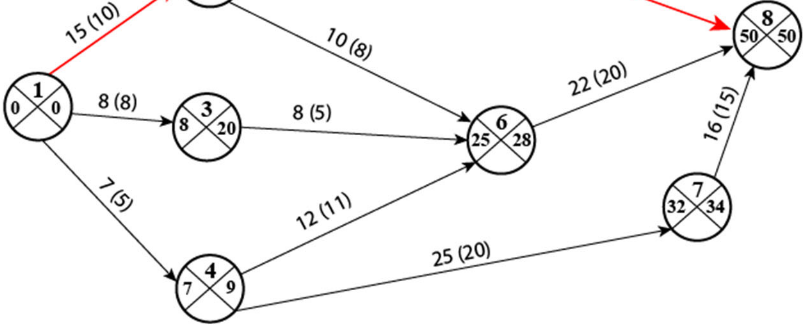
Ad d) Jeżeli skrócimy przedsięwzięcie o 5 tygodni (do 38) to koszty takiej akceleracji wyniosą 8 tys. zł. (koszty akceleracji z 2 pierwszych etapów).

Przykład 2. (algorytm PERT-Cost) Pewien etap większego przedsięwzięcia składa się z 11 czynności, których parametry sieci przedstawia tabela**:**

(i,j)	$\bar{t}_n$	$\bar{t}_g$	K_n	K_g	r_1	r_2
(1,2)	15	10	1200	1300	0,9	1,4
(1,3)	8	8	300	300	-	-
(1,4)	7	5	200	400	0,5	2,5
(2,5)	15	13	250	370	0,6	1,1
(2,6)	10	8	740	820	0,5	1,7
(3,6)	8	5	300	390	0,8	1,2
(4,6)	12	11	620	635	0,7	1,9
(4,7)	25	20	500	625	0,7	1,1
(5,8)	20	17	490	556	0,75	1,5
(6,8)	22	20	1100	1400	0,8	1,6
(7,8)	16	15	950	1200	0,5	1,2
Suma			6650	7996		

a) Narysować model sieciowy tego projektu.
b) Określić normalny koszt jego realizacji, czas zakończenia w warunkach normalnych oraz ścieżkę krytyczną.
c) Stosując metodę PERT-Cost określić koszt programu optymalnego dla najkrótszego czasu jego realizacji. Wskazać różnicę kosztów przy zastosowaniu programu optymalnego oraz kosztów granicznych.
d) Zakładając, że dopuszczalne ryzyko dotrzymania terminu wynosi 20%, wyznaczyć najkrótszy czas zakończenia projektu w tych warunkach.

Ad a) i b)
Model sieciowy tego przedsięwzięcia przedstawia rysunek (rys. 1)



Rys. 1. Model sieciowy projektu z normalnymi czasami (średnimi) realizacji jego czynności.

Gdyby czynności tego projektu (przedsięwzięcia) odbywały się w warunkach normalnych realizacji jego czynności to przedsięwzięcie średnio może zakończyć się po 50 jednostkach czasu. Istnieje 1 ścieżka maksymalna krytyczna: 1-2-5-8. Łączny koszt wykonania przedsięwzięcia w czasach normalnych wyniesie 6650 jednostek pieniężnych.

Ad c)
<u>Założenia:</u>
Podobnie jak w metodzie CPM-Cost przyjmujemy liniowy przebieg zależności kosztów od czasu jednak za czas przyjmujemy czas przeciętny (średni – oczekiwany) wykonania czynności.
Zakłada się, że w miarę skracania czasów poszczególnych czynności od czasu normalnego t_n do czasu granicznego t_g (przy zmianie kosztów od K_n do K_g zachowane są stałe relacje czasów poszczególnych czynności:
- dla czasu optymistycznego (najkrótszego) a: $\frac{a_n}{\bar{t}_n} = \frac{a_s}{\bar{t}_s} = \frac{a_g}{\bar{t}_g} = r_1$
- dla czasu pesymistycznego (najdłuższego) b: $\frac{b_n}{\bar{t}_n} = \frac{b_s}{\bar{t}_s} = \frac{b_g}{\bar{t}_g} = r_2$
gdzie: t_s – jest czasem czynności przyspieszonych (skracanych).

Z relacji tych można wyznaczyć
- czas modalny dla czynności skracanych: $m = \frac{6-(r_1+r_2)}{4}\bar{t}_s$ (1)
- wariancje dla czynności skracanych: $\sigma_{ij}^2 = \frac{(r_2-r_1)^2}{36}\bar{t}_s{}^2$ (2)

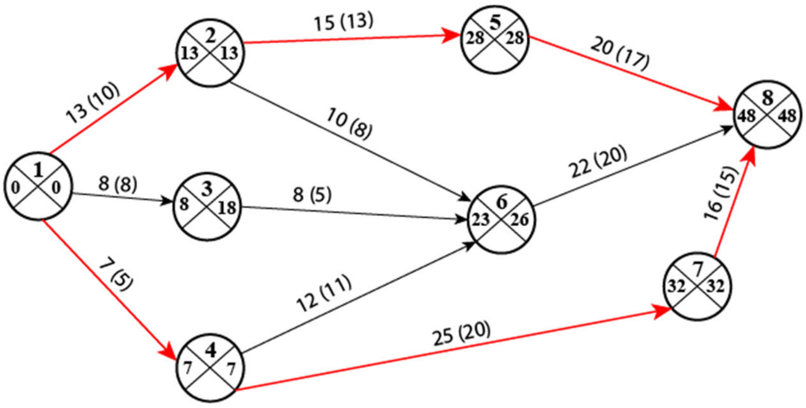
Natomiast gradient kosztów wyznaczamy ze wzoru: $S_{ij} = \frac{K_g-K_n}{\bar{t}_n-\bar{t}_g}$ (3)

Wariancja dla najwcześniejszego czasu zakończenia przedsięwzięcia w czasach normalnych wyniesie zatem przy jednej ścieżce krytycznej: 1-2-5-8 (ze wzorów (2) z czasami normalnymi) $\sigma_{t_k=t_8}^2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{25}^2 + \sigma_{58}^2 = 1{,}56 + 1{,}56 + 6{,}25 = 9{,}37$. Odchylenie standardowe: $\sigma_{t_k=t_8} = \sqrt{9{,}37} = 3{,}06$.

Tabela przedstawia wyznaczone ze wzoru (3) wartości gradientów kosztów oraz zapasy czasu całkowitego dla średnich czasów wykonania czynności w warunkach normalnych.

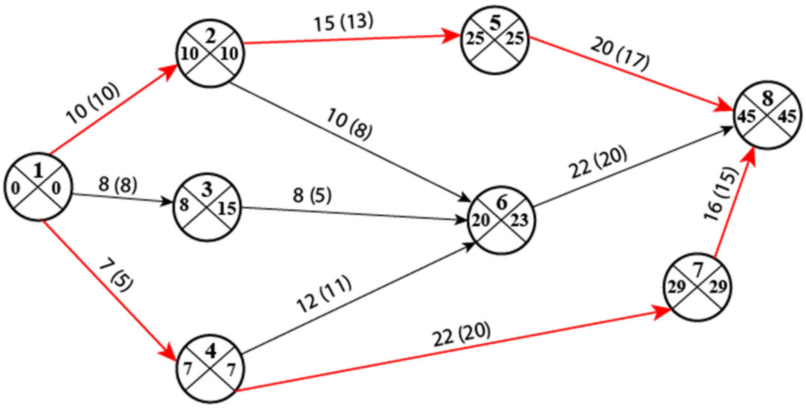
(i,j)	$\bar{t}_n$	$\bar{t}_g$	K_n	K_g	r_1	r_2	S_{ij}	$Z_c(i,j)$
(1,2)	15	10	1200	1300	0,9	1,4	20	**0 ***
(1,3)	8	8	300	300	-	-	-	12
(1,4)	7	5	200	400	0,5	2,5	100	2
(2,5)	15	13	250	370	0,6	1,1	60	**0 ***
(2,6)	10	8	740	820	0,5	1,7	40	3
(3,6)	8	5	300	390	0,8	1,2	30	12
(4,6)	12	11	620	635	0,7	1,9	15	9
(4,7)	25	20	500	625	0,7	1,1	25	2
(5,8)	20	17	490	556	0,75	1,5	22	**0 ***
(6,8)	22	20	1100	1400	0,8	1,6	150	3
(7,8)	16	15	950	1200	0,5	1,2	250	2
Suma			6650	7996				

(iteracja 1)
Skracamy czynność na ścieżce krytycznej o najmniejszym gradiencie kosztów (1,2) tylko o 2 jednostki (a nie o 5), bo powstaną dwie równoległe ścieżki krytyczne: 1-2-5-8 (już istniejąca) oraz 1-4-7-8 (nowa) o tej samej długości 48.
Rysunek sieci po skróceniu przedstawia rysunek (rys. 2). Przedsięwzięcie średnio może zakończyć się najwcześniej po 48 jednostkach czasu.
Koszt skrócenia: $K_1 = 2 * 20 = 40$ [j. k. – jednostek kosztów]
Wariancja dla najwcześniejszego czasu zakończenia przedsięwzięcia na tym etapie skracania (akceleracji) czasów trwania czynności wyniesie przy 2 ścieżkach krytycznych: 1-2-5-8 oraz 1-4-7-8: $\sigma_{t_k=t_8}^2 = \max\{\sigma_{12}^2 + \sigma_{25}^2 + \sigma_{58}^2; \sigma_{14}^2 + \sigma_{47}^2 + \sigma_{78}^2\} = \max\{1{,}17 + 1{,}56 + 6{,}25; 5{,}44 + 2{,}78 + 3{,}48\} = 11{,}7$. Odchylenie standardowe: $\sigma_{t_k=t_8} = \sqrt{11{,}7} = 3{,}42$.



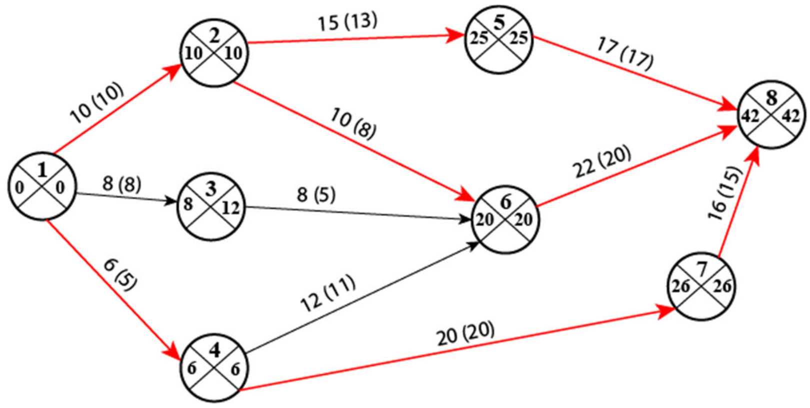
Rys. 2. Model sieciowy projektu po pierwszym etapie skrócenia czynności.

(iteracja 2)
Skracamy czynność (1,2) o kolejne 3 jednostki i jednocześnie na drugiej ścieżce czynność (4,7) – o najmniejszym gradiencie kosztów także o 3 jednostki.
Rysunek sieci po skróceniu przedstawia rysunek (rys. 3). Przedsięwzięcie średnio może zakończyć się najwcześniej po 45 jednostkach czasu.
Koszt skrócenia: $K_2 = 3 * 20 + 3 * 25 = 135$ [j. k. – jednostek kosztów].
Wariancja dla najwcześniejszego czasu zakończenia przedsięwzięcia na tym etapie skracania (akceleracji) czasów trwania czynności wyniesie przy dalej dwóch ścieżkach krytycznych: 1-2-5-8 oraz 1-4-7-8: $\sigma^2_{t_k=t_8} = \max\{\sigma^2_{12} + \sigma^2_{25} + \sigma^2_{58}; \sigma^2_{14} + \sigma^2_{47} + \sigma^2_{78}\} = \max\{0{,}69 + 1{,}56 + 6{,}25; 5{,}44 + 2{,}15 + 3{,}48\} = 11{,}07$. Odchylenie standardowe: $\sigma_{t_k=t_8} = \sqrt{11{,}07} = 3{,}33$.



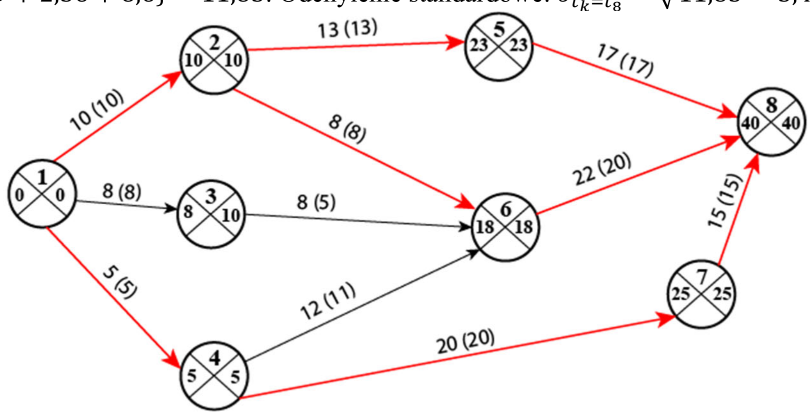
Rys. 3. Model sieciowy projektu po drugim etapie skrócenia czynności.

(iteracja 3)
Skracamy kolejną czynność na pierwszej ścieżce krytycznej o najniższym gradiencie kosztów (5,8) o maksymalne 3 jednostki oraz jednocześnie na drugiej ścieżce czynność (4,7) o 2 jednostki oraz (1,4) o jeszcze 1 jednostkę.
Rysunek sieci po skróceniu przedstawia rysunek (rys. 4). Przedsięwzięcie średnio może zakończyć się najwcześniej po 42 jednostkach czasu.
Koszt skrócenia: $K_3 = 3 * 22 + 2 * 25 + 1 * 100 = 216$ [j. k. – jednostek kosztów].
Powstaje trzecia równoległa ścieżka krytyczna: 1-2-6-8.
Wariancja dla najwcześniejszego czasu zakończenia przedsięwzięcia na tym etapie skracania (akceleracji) czasów trwania czynności wyniesie przy trzech ścieżkach krytycznych: 1-2-5-8, 1-4-7-8 oraz 1-2-6-8: $\sigma^2_{t_k=t_8} = \max\{\sigma^2_{12} + \sigma^2_{25} + \sigma^2_{58}; \sigma^2_{14} + \sigma^2_{47} + \sigma^2_{78}; \sigma^2_{12} + \sigma^2_{26} + \sigma^2_{68}\} = \max\{0{,}69 + 1{,}56 + 4{,}52; 4 + 1{,}78 + 3{,}48; 0{,}69 + 4 + 8{,}6\} = 13{,}29$. Odchylenie standardowe: $\sigma_{t_k=t_8} = \sqrt{13{,}29} = 3{,}65$.



Rys. 4. Model sieciowy projektu po trzecim etapie skrócenia czynności.

(iteracja 4)
Skracamy czynność (2,6) o 2 jednostki oraz jednocześnie na drugiej ścieżce czynność (2,5) o 2 jednostki oraz na trzeciej (1,4) o 1 jednostkę oraz (7,8) też o 1 jednostkę.
Rysunek sieci po skróceniu przedstawia rysunek (rys. 5). Przedsięwzięcie średnio może zakończyć się najwcześniej po 40 jednostkach czasu.
Koszt skrócenia: $K_4 = 2 * 40 + 2 * 60 + 1 * 100 + 1 * 250 = 550$ [j. k. – jednostek kosztów].
Wariancja dla najwcześniejszego czasu zakończenia przedsięwzięcia na tym etapie skracania (akceleracji) czasów trwania czynności wyniesie przy istniejących trzech ścieżkach krytycznych: 1-2-5-8, 1-4-7-8 oraz 1-2-6-8: $\sigma^2_{t_k=t_8} = \max\{\sigma^2_{12} + \sigma^2_{25} + \sigma^2_{58}; \sigma^2_{14} + \sigma^2_{47} + \sigma^2_{78}; \sigma^2_{12} + \sigma^2_{26} + \sigma^2_{68}\} = \max\{0{,}69 + 1{,}17 + 4{,}52; 2{,}78 + 1{,}78 + 3{,}06; 0{,}69 + 2{,}56 + 8{,}6\} = 11{,}85$. Odchylenie standardowe: $\sigma_{t_k=t_8} = \sqrt{11{,}85} = 3{,}44$.



Rys. 5. Model sieciowy projektu po czwartym (ostatnim) etapie skrócenia czynności.

Ponieważ wszystkie czynności na jednej chociaż ze ścieżek krytycznych są wykonywane w czasach średnich granicznych (w tym wypadku na wszystkich) to jest to najkrótszy możliwy termin akceleracji tego projektu.
Projekt można zatem zrealizować w najwcześniejszym terminie po czasie średnio 40 jednostek czasu z odchyleniem 3,44 j. czasu. Koszty takiej akceleracji w porównaniu z kosztami normalnymi (w normalnych - zwykłych warunkach) zwiększą się o $\Delta K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 40 + 135 + 216 + 550 = 941$ [j. p.]. Wyniosą zatem $K_s = K_n + \Delta K = 6650 + 941 = 7591$ [j. p.]

Ad d)
Skorzystamy z zależności (*): $t^D = \bar{t}_{k=8} + \sigma_{t_k} * u_\alpha$, gdzie: t^D – szukany najwcześniejszy termin dyrektywny, zaś u_α – jest wartością odczytana z tablic rozkładu normalnego standaryzowanego Z: N(0,1) dla kwantyla rzędu $\alpha = 20\% = 0{,}2$, dla którego zachodzi zależność: $P(Z \geq u_\alpha) = \alpha$.
W naszym przypadku $u_\alpha = 0{,}84$, bo $P(Z \geq 0{,}84) = 0{,}2\ (20\%)$.
Zatem ze wzoru (*) mamy: $\frac{t^D - \bar{t}_8}{\sigma_{t_8}} = u_\alpha = 0{,}84$. Czyli $t^D = 40 + 3{,}44 * 0{,}84 = 42{,}9$ [j. czasu]

Wniosek: Jeśli dopuszczamy maksymalne ryzyko dotrzymania terminu dyrektywnego na poziomie 20% to ten termin (dyrektywny) zakończenia projektu należy ustalić na poziomie nie mniejszym niż t^D=42,9 (43) jednostki czasu.