BADANIA OPERACYJNE

Prowadzący:
dr Tomasz Pisula
Zakład Metod Ilościowych
e-mail: tpisula@prz.edu.pl

❑ Treści kształcenia (wykłady – 30, laboratoria - 15):

- ❑ Istota i geneza badań operacyjnych. Przedmiot i metodologia badań operacyjnych – 2 godz.
- ❑ Zadania programowania liniowego (wybrane liniowe problemy decyzyjne, dualizm w programowaniu liniowym, algorytm Simplex, zagadnienia transportowe) – 6 godz. (4 godz.)
- ❑ Programowanie nieliniowe w kontekście zadań programowania liniowego – 2 godz., (2 godz.)
- ❑ Zadania programowania dynamicznego (algorytm Bellmana) – 2 godz.
- ❑ Przykładowe problemy optymalizacji dyskretnej, metoda podziału i ograniczeń, zagadnienie komiwojażera - algorytmy heurystyczne poszukiwania rozwiązań – 4 godz. (3 godz.)

❑ Treści kształcenia (wykłady i ćwiczenia):

- ❑ Elementarne pojęcia teorii grafów - problemy decyzyjne w ujęciu sieciowym – 6 godz. (2 godz.)
  - programowanie sieciowe z kryterium czasu: metoda ścieżki krytycznej CPM,
  - planowanie przedsięwzięć z kryterium kosztowym,
  - planowanie w warunkach niepewności - algorytm PERT,
  - maksymalny przepływ w sieci (algorytm Forda-Fulkersona),
- ❑ Elementy programowania wielokryterialnego - 2 godz. (2 godz.)
- ❑ Elementy teorii gier – 2 godz.
- ❑ Wybrane zagadnienia systemów kolejkowych - 2 godz.
- ❑ Praktyczne zaliczenie laboratorium – 2 godz.
- ❑ Pisemne zaliczenie wykładów – 2 godz.

❑ Efekty kształcenia - umiejętności

1. **Zdobycie wiedzy:**
   - **o sposobach modelowania matematycznego zagadnień decyzyjnych;**
   - **o różnych metodach poszukiwania rozwiązań optymalnych zadań decyzyjnych.**
2. **Zdobycie umiejętności:**
   - **budowania modeli matematycznych zagadnień decyzyjnych;**
   - **rozwiązywania problemów decyzyjnych z wykorzystaniem właściwych technik i metod badań operacyjnych;**
   - **wykorzystania oprogramowania komputerowego (np. arkusza kalkulacyjnego „Excel” plus dodatek „Solver”) do rozwiązywania różnorodnych problemów decyzyjnych dotyczących problematyki zarządzania.**

❑ Warunki zaliczenia przedmiotu:

1. **Zaliczenie pisemne wykładów:**

- **zaliczenie testowe (test jednokrotnego wyboru) sprawdzające opanowanie treści kształcenia omawianych na wykładach.**

2. **Praktyczne zaliczenie laboratoriów:**

- **sprawdzenie praktycznych umiejętności modelowania i rozwiązywania wybranych problemów decyzyjnych w zarządzaniu z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego „Excel" oraz modułu „Solver".**

3. **Ocena końcowa jest średnią ocen z zaliczenia testowego wykładów (z wagą 0,4) oraz zaliczenia praktycznego laboratoriów (z wagą 0,6). Obie składowe oceny muszą być pozytywne.**

❑ Literatura podstawowa wykorzystywana podczas zajęć wykładowych:

1. *Gajda J., Badania operacyjne: przykłady zastosowań, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2015.*

2. *Sikora W. (red.), Badania Operacyjne, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2008.*

3. *Trzaskalik T., Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2008.*

❑ Literatura podstawowa wykorzystywana podczas zajęć laboratoryjnych:

1. *Kukuła (red.), Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.*

Literatura Uzupełniająca:

1. *Filipowicz B., Badania operacyjne. Wybrane metody obliczeniowe i algorytmy, Wydawnictwo Poldex, Kraków 1999.*
2. *Gruszczyński M., Kuszewski T., Podgórska M., Ekonometria i badania operacyjne, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2017.*
3. *Ignasiak E. (red.), Badania Operacyjne, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2001.*
4. *Kozubski J. J., Wprowadzenie do badań operacyjnych, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1999.*
5. *Siudak D., Badania operacyjne z wykorzystaniem WinQSB, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2014.*
6. *Siudak M., Badania operacyjne, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996.*
7. *Sysło M. M., Deo N., Kowalik J. S., Algorytmy optymalizacji dyskretnej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.*
8. *Wojeński J., Urich R., Badania operacyjne w praktyce menadżera, Oficyna Wydawnicza Warszawskiej Szkoły Zarządzania, Warszawa 2004.*

❑ Istota Badań Operacyjnych

Badania Operacyjne – Operational Research – Operations Research

Definicja badań operacyjnych (czym są badania operacyjne)

- **Definicja podawana przez Amerykańskie Towarzystwo Badań Operacyjnych (Operations Research Society of America ORSA) w 1990 r.**
  (1) Badania operacyjne to naukowe podejście do procesów podejmowania decyzji
  (2) Badania operacyjne koncentrują się wokół zagadnień naukowego decydowania jak najlepiej projektować i obsługiwać różnorakie systemy (np. systemy produkcyjne, transportowe, logistyczne, gromadzenia i magazynowania zasobów), zazwyczaj w warunkach wymagających wykorzystania (przydziału, alokacji) ograniczonych zasobów.

- **Brytyjskie Towarzystwo Badań Operacyjnych (British Operational Research Society) w 1962 r. definiuje badania operacyjne jako:**
  - Wykorzystanie formalnych modeli matematycznych do badania złożonych problemów decyzyjnych powstających w procesach zarządzania dużymi systemami ludzkimi, maszynowymi, materiałowymi, pieniężnymi w przemyśle, biznesie, zarządzaniu państwem oraz obronności.

❑ Rozwój Badań Operacyjnych

Chronologia czasowa rozwoju

Badań Operacyjnych – ważniejsze osiągnięcia

Źródło: **S. I. Gass, A. A. Assad, *An annotated timeline of operations research – An informal history*, Springer 2005.**

- **Prekursorzy badań operacyjnych (1564-1935)**

1654 **– określenie wartości oczekiwanej (Expected Value)**

Blaise Pascal (francuski matematyk) – opisał jak obliczać wartość oczekiwaną gry hazardowej, jako wartości oczekiwanej (średniej wygranej) w oparciu o prawdopodobieństwo wielokrotnej wygranej w grze – zastosowania w teorii gier i w grach decyzyjnych.

1657 **– pierwsza nowoczesna monografia dotycząca teorii prawdopodobieństwa**

Christiaan Huygens (duński uczony) – napisał pierwszą nowoczesną książkę naukową dotyczącą rachunku prawdopodobieństwa. Zawarł w niej formalną definicję wartości oczekiwanej, rekurencyjną metodę rozwiązywania problemów z rachunku prawdopodobieństwa oraz sposób obliczania tzw. sprawiedliwej wygranej w grze (fair value of game). Jego prace w pewnym sensie powielały badania Pascala, ale pracował od niego niezależnie. Podał własne dowody twierdzeń dla opracowanej przez siebie teorii.

1665 **– opracowanie metod numerycznych obliczania pierwiastków równań pierwszego stopnia: f(x)=0 i warunków istnienia ekstremów funkcji wielu zmiennych**

Sir Isaac Newton (angielski uczony) – opracował numeryczną przybliżoną metodę rozwiązywania tego typu równań. Metoda Newtona jest stosowana do rozwiązywania równań z wieloma zmiennymi oraz poszukiwania ekstremów takich funkcji. Została później zaadoptowana do rozwiązywania nieliniowych problemów optymalizacyjnych z wieloma warunkami.

1713 – pierwsze rozwiązanie minimaksowe dla optymalnej strategii wygranej w grze

James Waldegrave (angielski Baron Waldegrave of Chewton) – opracował metodę obliczania wygranej dla pewnej gry hazardowej w karty dla dwóch osób. Rozpatrywał problem wyboru optymalnej strategii dla gracza, która maksymalizuje prawdopodobieństwo wygranej gracza niezależnie od wyboru strategii przeciwnika – jego metoda zwana strategią minimaksową weszła do kanonu metod optymalizacyjnych mających zastosowania w teorii gier.

1718 – pierwszy kurs teorii prawdopodobieństwa (The Doctrine of Chances)

Abraham de Moivre (francuski uczony - matematyk) – w trzech edycjach swoich monografii zawarł wprowadzenie do elementarnej teorii rachunku prawdopodobieństwa oraz zawarł pokaźny zbiór różnorakich problemów probabilistycznych oraz matematyki ubezpieczeniowej.

1763 – opracowanie reguły Bayesa dla prawdopodobieństwa warunkowego

Thomas Bayes (angielski duchowny) - zaproponował regułę (formułę) oszacowania prawdopodobieństwa warunkowego dla niezależnych zdarzeń, wykorzystując wiedzę a priori o wystąpieniu zdarzenia będącego konsekwencją wcześniejszego zajścia tych zdarzeń.

1788 – metoda czynników nieoznaczonych Lagrange'a

Joseph-Louis de Lagrange's (francuski matematyk) – opracował metodę znajdowania ekstremów warunkowych funkcji wielu zmiennych, dla warunków w postaci równości – zastosowania w optymalizacji nieliniowej.

1789 – początki teorii użyteczności

Jeremy Bentham (angielski prawnik i filozof) – opublikował monografię w której zawarł tzw. regułę użyteczności (principle of utility). Podał założenia i podstawy teorii użyteczności, której był prekursorem.

1795 – opracowanie metody najmniejszych kwadratów

Carl Friedrich Gauss (niemiecki matematyk) i Adrien-Marie Legendre (francuski matematyk) – niezależnie opracowali metodę najmniejszych kwadratów, która jest podstawową metodą znajdowania nieznanych parametrów ogólnego modelu regresji, które często stosowane są w badaniach statystycznych oraz w zastosowaniach badaniach operacyjnych.

1826 – pierwsze metody rozwiązania układu nierówności

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (francuski matematyk) – jako pierwszy sformułował problem decyzyjny, jako liniowe zadanie optymalizacyjne z warunkami w postaci liniowych nierówności oraz zajmował się metodami rozwiązywania układu nierówności liniowych.

1826 – rozwiązanie układu równań liniowych

Carl Friedrich Gauss (matematyk niemiecki) – opracował sposób rozwiązywania układu równań liniowych, który wykorzystuje metodę przekształcenia wierszy macierzy współczynników tego układu równań i sprowadzania tej macierzy do równoważnej jej postaci jako górnej trójkątnej macierzy.

1833 – pierwsza idea zastosowania komputera

Charles Babbage (angielski matematyk i wynalazca) – jako pierwszy opracował ideę budowy komputera ogólnego zastosowania (tzw. Analytical Engine), jednak nigdy go nie zbudował. Zaprojektował specjalne karty na przechowywanie danych i zdefiniował zbiór instrukcji – program.

Jest uważany jako pierwszy badacz, który zajmował się problemami badań operacyjnych – badał problem optymalizacji kosztów obsługi przy wysyłaniu listów na poczcie Brytyjskiej (British Post Office).

1845 – równania przepływów sieciowych

Gustav R. Kirchhoff (niemiecki fizyk) – podał dwa słynne praw przepływu w sieci elektrycznej. Zostały one zaadoptowane do zagadnień optymalizacji sieciowej i przepływów w sieciach.

1900 – opracowanie podstaw planowania realizacji projektów. Wykresy Gantta w planowaniu przedsięwzięć (harmonogram realizacji czynności przedsięwzięcia)

Henry L. Gantt – opracował metodę planowania realizacji projektów i przedstawiania w sposób graficzny w postaci wykresów słupkowych (wykresy Gantta) harmonogramu realizacji przedsięwzięcia: wzajemnego powiązania czynności, kolejności poprzedzania i następowania czynności, czasów zakończenia czynności, aktualnego stanu w którym znajduje się projekt. Do dziś jest to jedna z podstawowych metod zarządzania realizowanymi projektami, zwłaszcza w budownictwie.

1900 – test zgodności Chi-kwadrat

Karl Pearson (brytyjski statystyk) – opracował test zgodności oparty na statystyce Chi-kwadrat, który do dzisiaj jest podstawową metodą badania zgodności rozkładu empirycznego z zadanym rozkładem teoretycznym.

1906 – optimum w sensie Pareto

Vilfredo Pareto (włoski ekonomista) – zaproponował, że w sytuacjach walki konkurencyjnej rozwiązanie dla graczy (konkurujących ze sobą) jest optymalne (efektywne), gdy zadowolenie (korzyść) każdego z graczy nie może być zwiększone, bez obniżenia zadowolenia (korzyści) co najmniej jednego z pozostałych graczy.

W sytuacjach optymalizacji wielokryterialnej (przy wielu celach) optimum Pareto jest praktycznym rozwiązaniem, w którym wzrost wartości jednego celu może być osiągnięte tylko kosztem zmniejszenia wartości co najmniej jednego innego celu.

1907 – proces stochastyczny w sensie Markowa i łańcuchy Markowa

Andrei Andreevich Markov (rosyjski matematyk) – opracował koncepcję procesu Markowa jako procesu kolejno następujących po sobie eksperymentów (połączonych w tzw. łańcuch).

Procesy stochastyczne w sensie Markowa i łańcuchy Markowa są wykorzystywane w metodach badań operacyjnych m.in. w analizach systemów kolejkowych i masowej obsługi.

1909 – pierwsze badania ruchu (zgłoszeń) w centrali telefonicznej

Agner Krarup Erlang (duński inżynier) – jako pierwszy zamodelował proces badania zgłoszeń w centrali telefonicznej (pracował jako główny inżynier w Copenhagen Telephone Company) i pokazał, że proces zgłoszeń może być modelowany rozkładem Poissona. W 1917 podał wzory dla słynnych formuł strat dla zgłoszeń telefonicznych (Erlang loss formulas). Był prekursorem nowoczesnej teorii kolejek.

1909 – pierwsza monografia dotycząca problemów optymalnego zlokalizowania instalacji (obiektu) – Facility location problem

Alfred Weber (niemiecki ekonomista) – napisał monografię dotyczącą problemów optymalnej lokalizacji obiektów (budynków, fabryk, magazynów, hurtowni). Zwrócił tym samym uwagę ekonomistów i analityków na ważność tego typu problemów - przemysłowej lokalizacji obiektów.

Weber nie podawał metody rozwiązywania tego typu problemów, ale omawiał szczegółowo ogólne problemy lokalizacji centralnego obiektu (fabryka, magazyn), które muszą zaopatrywać (lub być zaopatrywane) kilka innych punktów dystrybucji (centra dystrybucyjne, sklepy), tak aby ważona suma odległości do wszystkich punktów dostaw była minimalna. W jego modelu wagi były udziałem wielkości zasobów wysyłanych z obiektu centralnego do każdego punktu dystrybucji.

1913 – początek teorii Zapasów – model Economic Order Quantity (EOQ)

Ford W. Harris – podał dobrze znaną pierwiastkową formułę obliczania tzw. ekonomicznie uzasadnionej wielkości zamówienia (EOQ – opublikowany w 1915), która stała się kamieniem węgielnym rozwoju współczesnej teorii zarządzania zapasami.

1930 – pionierskie badania systemów kolejkowych - formuła Pollaczka dla systemów kolejkowych typu M|G|1

Félix Pollaczek – był pionierem badań nad systemami kolejkowymi i podał formułę na obliczanie średniego czasu oczekiwania w systemach kolejkowych typu M|G|1. Analizował później bardziej złożone systemy kolejkowe, ale analiza tego typu systemów okazała się bardzo trudnym problemem decyzyjnym do opisu analitycznego.

1931 – początek teorii kontroli jakości w przemyśle

Walter A. Shewhart – stworzył podstawy tzw. statystycznej kontroli jakości i opracował graficzną metodę przedstawiania procesu kontroli jakości (tzw. control charts), która wyznaczyła kierunki dalszego rozwoju w tej dziedzinie.

1932 – opracowanie podstaw teorii testowania hipotez statystycznych

Jerzy Neyman i Egon S. Pearson – opracowali podstawy teorii testowania hipotez statystycznych, która była znacznym krokiem naprzód w stosunku do stosowanego dotychczas podejścia ad-hoc Ronalda A. Fishera. Wprowadzili m.in. pojecie hipotezy zerowej, alternatywnej, optymalnego testu oraz podstawowe dwa typy błędów wnioskowania statystycznego (błąd I i II-rodzaju, moc i poziom istotności testu).

- ## Narodziny Badań Operacyjnych (1936-1946)

1936 – data zerowa – Brytyjskie zastosowania militarne – pojawienie się nazwy: badania operacyjne (operational research)

W tym roku Brytyjski minister lotnictwa powołał ośrodek badawczy kontroli radarowej kraju Bawdsey Manor Research Station,w Suffolk, w celu przeprowadzenia badać na ile skuteczny może okazać się nowo wprowadzany system ochrony radarowej do przechwytywania wrogich samolotów. Pierwszym kierownikiem ośrodka był Robert Watson-Watt kierownik wydziału Radiowego w National Physical Laboratory. Wysiłki grupy oficerów RAF, cywilnych naukowców dały początek nowej działalności badawczo-naukowej w naukach stosowanych, które wkrótce zostały nazwane - operational research (badania operacyjne).

W 1941 roku grupa badawcza przyjęła nazwę - Operational Research Section, RAF Fighter Command.

1936 – pierwsza maszyna licząca – maszyna Turinga

Alan M. Turing (angielski matematyk) jako pierwszy sformalizował język zapisu obliczeń komputerowych oraz wprowadził model maszyny Turinga jako model uniwersalnej maszyny do obliczeń (składała się z 1 - jednostki sterującej (obliczeniowej), 2 - taśmy do wprowadzania danych – podzielonej na pola, z których każdy kwadrat mógł odczytywać tylko jeden symbol ze zbioru dyskretnych dopuszczalnych symboli danych oraz 3 – głowicy odczytująco - zapisującej, która przesuwała się wzdłuż taśmy i przesyłała odczytane dane do jednostki sterującej)

1937 – sformułowanie problemu komiwajażera (travelling salesman problem)

Albert W. Tucker – jako pierwszy sformułował najsłynniejszy problem kombinatoryczny tzw. zagadnienie komiwojażera (sprzedawca – komiwojażer zamierza odwiedzić zbiór miast tylko jeden raz i powrócić do miasta startowego, tak aby droga przebyta przez niego, lub koszt marszruty był minimalny).

Później Merrill M. Flood spopularyzował problem w 1956 roku na łamach wydawnictwa Operations Research.

1941 – sformułowanie zagadnienia transportowego

Frank L. Hitchcock – sformułował klasyczne zagadnienie transportowe - przewozu towarów od grupy nadawców do grupy odbiorców po minimalnym koszcie. W swojej pracy podał także zarys procedury rozwiązania tego problemu. W czasie II wojny światowej Tjalling C. Koopmans niezależnie zajmował się tego typu problemem i podał dokładną metodę jego rozwiązania. Później George B. Dantzig dokonał formalnego zapisu zagadnienia transportowego, sformułował jego teorię oraz dokonał powtórnego rozwiązania - zastosowaniem metody Simplex.

1943 – początki teorii sieci neuronowych

Warren S. McCulloch and Walter H. Pitts wprowadzili model sieci neuronowych jako odzwierciedlenie modelu funkcjonowania ludzkiego mózgu i sytemu nerwowego

1945 – sformułowanie zagadnienia diety (jeden z najczęściej podawanych przykładów problemów decyzyjnych dotyczących optymalizacji liniowej)

George Stigler (ekonomista) – sformułował liniowy problem decyzyjny polegający na określeniu optymalnej ilości potrzebnych produktów żywieniowych, aby sporządzić dietę wymagającą dostarczenia odpowiedniej ilości składników odżywczych (oraz wymaganej liczby kalorii), przy minimalnym koszcie zakupu produktów.

1946 – pierwszy cyfrowy komputer ENIAC

ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) – był pierwszym nowoczesnym, ogólnego zastosowania komputerem na świecie. Możliwość zastosowania komputerów w badaniach operacyjnych była milowym krokiem w rozwoju tej dziedziny nauki.

1946 – opracowanie założeń metod symulacyjnych symulacji Monte Carlo

Stanisław Ulam (polski matematyk i fizyk teoretyczny) – opracował podstawy teoretyczne metod symulacyjnych opartych na tzw. metodach Monte Carlo (polegających na symulacji eksperymentu w oparciu o wielokrotne losowanie liczby o zadanym rozkładzie teoretycznym).

- **Ekspansja badań operacyjnych (1947-1950)**

1947 – formalny zapis matematyczny zagadnień programowania liniowego

George B. Dantzig – podał formalny matematyczny zapis problemów programowania liniowego - określając funkcję celu oraz warunki ograniczające.

1947 – algorytm Simplex (algorytm rozwiązywania zadań programowania liniowego)

George B. Dantzig – podał procedurę rozwiązywania zagadnień programowania liniowego. Algorytm ten mógł być wykorzystywany do rozwiązywania wielu różnorodnych problemów optymalizacji liniowej z wykorzystaniem coraz powszechniej stosowanych cyfrowych komputerów – co przyczyniło się do ogromnego rozwoju praktycznych zastosowań badań operacyjnych. Algorytm simplex został wybrany do 20 najznakomitszych algorytmów XX wieku.

1950 – pierwszy periodyk dotyczący badań operacyjnych

Operational Research Quarterly – był pierwszym kwartalnikiem wydanym od marca 1950 roku, w którym publikowano artykuły z zakresu badań operacyjnych. W 1978 roku zmieniono nazwę na Journal of the Operational Research Society.

1950 – equilibrium (równowaga) Nasha

John F. Nash – rozszerzył von Neumanna teorię minimax dla gier dwuosobowych o sumie zerowej i wykazał, że każda skończona n-osobowa gra o dowolnej sumie ma co najmniej jeden punkt równowagi w zbiorze strategii mieszanych. W 1994 otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii za jego pionierskie badania nad teorią równowagi w teorii gier niekooperacyjnych (duże zastosowania praktyczne w negocjacjach wojskowych, handlowych, negocjacjach na rynku pracy)

1950 – programowanie dynamiczne

Richard Bellman – wprowadził technikę optymalizacyjną dla wielostanowego problemu decyzyjnego, bazując na kryterium optymalności: dla każdej optymalnej strategii, niezależnie od obecnego stanu i bieżącej decyzji, pozostałe decyzje muszą stanowić strategię optymalną, z punktu widzenia stanu wynikającego z podjęcia bieżącej decyzji.

Dalszy rozwój badań operacyjnych (1951-2000)

1951 – programowanie nieliniowe

Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker – opracowali formalny model matematyczny problemów decyzyjnych optymalizacji nieliniowej. Podali również warunki konieczne warunki istnienia rozwiązań tego typu zagadnień optymalizacyjnych.

1951 – określenie optymalnej dynamicznej strategii odnawiania zapasów (S, s)

Kenneth Arrow, Theodore Harris, and Jacob Marschak – pokazali, że optymalną strategią dla system magazynowego (w którym przegląd zapasów odbywa się okresowo z losowym popytem) jest strategia: zamów gdy poziom zapasów spadnie poniżej progu „s" i dokonaj uzupełnienia poziomu zapasów do poziomu „S"

1951 – zastosowanie łańcuchów Markowa w teorii kolejek

David G. Kendall – zastosował łańcuchy markowa i procesy stochastyczne w sensie Markowa dla analizy systemów kolejkowych (analizował systemy typu M|G|1), W 1953 dokonał on również usystematyzowania (klasyfikacji) oraz opracował symboliczny sposób kodowania tego typu systemów.

1952 – początki analizy portfelowej

Harry M. Markowitz – opracował podstawy analizy portfelowej na rynkach finansowych z wykorzystaniem metod badań operacyjnych. Podał model nieliniowego programowania umożliwiający inwestorom wyznaczanie optymalnych wartości portfela inwestycyjnego dla oczekiwanej stopy zysku przy zakładanym ryzyku (lub dla minimalnego ryzyka przy zakładanej stopie zysku).

1953 – RAND – program badań logistycznych

RAND Corporation – firma badawcza (ośrodek badawczy), która zajmowała się wykorzystaniem metod badań operacyjnych w zastosowaniach logistycznych (głównie optymalnym rozmieszczeniem bombowców w bazach strategicznych) .

1954 – algorytm maksymalnego przepływu w sieci

Lester R. Ford, Jr. i Delbert Ray Fulkerson – opracowali algorytm wyznaczania maksymalnego przepływu w sieciach, których model matematyczny podali. Podali również słynne twierdzenie, że maksymalny przepływ w sieci równa się minimalnemu przekrojowi.

1954 – idea metody podziału i ograniczeń (branch and bound)

George B. Dantzig, Lester Ford, and Ray Fulkerson – badali wcześniejsze próby i metody rozwiązania dla problemu komiwojażera. Opracowali podstawy tzw. metody podziału i ograniczeń, która jest do dzisiaj wykorzystywana jako ogólna technika przy rozwiązywaniu zadań programowania całkowitoliczbowego.

1955 – początki programowania stochastycznego

G. B. Dantzig and E. M. L. Beale – podali podstawy programowania stochastycznego (w warunkach niepewności i ryzyka). W standardowym wariancie programowania liniowego zakłada się że wszystkie dane są deterministyczne. W programowaniu stochastycznym zakłada się, że są to zmienne losowe.

1955 – kinematyczna teoria przepływów w ruchu ulicznym (traffic flow)

M. J. Lighthill and G. B. Whitham – zaproponowali model, który opisywał proces zachowania się w ruchu ulicznym. Wprowadzili między innymi pojęcia fal w ruchu ulicznym i kolejek wynikających z zakorkowania się ruchu. Ich pionierskie badania doczekały się później wielu zastosowań i adaptacji.

1956 – programowanie kwadratowe

Wiele problemów optymalizacyjnych jest formułowanych w postaci modelu matematycznego z warunkami w postaci równań z nieujemnymi zmiennymi, ale o funkcji celu w postaci kwadratowej. M. Frank, P. Wolfe – opracowali algorytm rozwiązywania tego typu zadań decyzyjnych.

1956 – problem najkrótszej ścieżki w sieci

Edsger W. Dijkstra – opublikował pierwszy efektywny algorytm (o złożoności obliczeniowej rzędu $O(n^2)$) wyznaczania najkrótszej ścieżki w grafie (sieci) o n-wierzchołkach i nieujemnych kosztach zdefiniowanych na jego krawędziach.

1957 – pierwsza międzynarodowa (światowa) konferencja badań operacyjnych

W Oxford w Anglii – odbyła się 1 konferencja światowa badań operacyjnych. Uczestniczyło 250 delegatów z 21 krajów.

1957 – zarządzanie projektem (metody planowania sieciowego)

D. G. Malcolm, J. H. Roseboom, C. E Clark, W. Fazar – opracowali algorytm harmonogramowania realizacji projektów (PERT - Program Evaluation and Review Technique). Inne metody to metoda ścieżki krytycznej Critical-Path Method (CPM) i Metra Potential Method (MPM). Do dziś są z powodzeniem stosowane w zarządzaniu projektami (zwłaszcza w budownictwie).

1958 – multi-eszelonowy model zapasów

Andrew J. Clark – wprowadził pojęcie tzw. wielo-eszelonowych systemów gromadzenia zapasów, składających się z kilku lokalizacji magazynowych, z których każdy zaopatrywany jest tylko z poprzedniej lokacji. Prowadził badania symulacyjne nad takimi systemami zapasów. Clark i Herbert Scarf opracowali optymalną strategię gospodarki zapasami w takich systemach wykorzystując metodykę programowania dynamicznego.

1958 – programowanie całkowitoliczbowe – tzw. metoda płaszczyzn tnących

Ralph E. Gomory – opracował tzw. metodę płaszczyzn tnących, która przy zastosowaniu zmodyfikowanego algorytmu simplex daje zbieżne rozwiązania dla liniowego problemu optymalizacji dyskretnej (całkowitoliczbowej).

1962 – teoria zbiorów rozmytych

L. A. Zadeh – sformułował teorię zbiorów rozmytych. Analizował zastosowania teorii do rozwiązywania wielokryterialnych problemów decyzyjnych.

1964 – Vehicle routing savings algorithm (algorytm wyznaczania optymalnych marszrut dla floty pojazdów)

G. Clarke, J. W. Wright – opracowali przybliżony i w ogólności prawie optymalny algorytm wyznaczania przydziału centralnie zlokalizowanych pojazdów do obsługi tras (dostaw towarów), tak aby całkowity koszt przydziału pojazdów do marszrut (tras) był minimalny.

1967 - gry o niepełnej informacji

John C. Harsanyi – badał czy można modelować teoretycznie gry i strategie graczy, gdy niektórzy z graczy nie posiadają pełnej informacji o ważnych parametrach gry (funkcji wypłat gry, strategii innych graczy).

Obok teorii równowagi Nasha jego teoria stanowi chyba jedną z najbardziej znaczących innowacji, z punktu widzenia praktycznych zastosowań w ekonomii i zarządzaniu.

1980 – pierwsze analizy tzw. Flexible manufacturing systems (elastycznych systemów produkcyjnych)

Systemy typu FMS zaczęły funkcjonować przemyśle od wczesnych lat 70-tych. Składają się z wielu sterowanych komputerowo (maszyn narzędzi), każda z nich może wykonywać wiele operacji. Do sterowania tego typu systemami i do modelowania ich funkcjonowania wykorzystuje się metodologię badań operacyjnych: sieci kolejkowe, liniowe, nieliniowe oraz całkowito liczbowe programowanie, metody symulacyjne, algorytmy heurystyczne).

1981 – pierwszy komputer osobisty

IBM wprowadziło do sprzedaży pierwszy komputer osobisty, co zrewolucjonizowało i upowszechniło praktyczne wykorzystanie komputerów i technik obliczeniowych.

1984 – sieci neuronowe w zastosowaniach optymalizacyjnych (Hopfield network)

John J. Hopfield – opracował architekturę sieci neuronowych wielowarstwowych (wiele warstw neuronów ukrytych). Wykorzystał modele sieciowe i opracowane algorytmy do rozwiązywania wielu zagadnień optymalizacyjnych, np. zagadnienia komiwojażera.

1989 – pierwsze badania dotyczące zarządzania łańcuchem dostaw (Supply Chain Management)

Problem wyniknął z konieczności redukcji zapasów komputerów osobistych i drukarek w HP.

Łańcuchy dostaw związane są z wszelkiego rodzaju aktywnością wynikającą z przepływu towarów od dostawców do wielu lokalizacji odbiorców.

Zarządzanie łańcuchem dostaw odnosi się do problemów wzajemnej integracji elementów tego systemu i wzajemnych przepływów produktów pomiędzy nimi, w celu zapewnienia dostępności produktu w wymaganych ilościach we właściwej lokalizacji, tak aby zapewnić wymagany (założony) poziom obsługi przy minimalnym koszcie całkowitym funkcjonowania systemu.

1995 – wystartował portal internetowy INFORMS online

http://www.informs.org – portal wymiany informacji dotyczącej badań operacyjnych i nauk o zarządzaniu

- wyszukiwanie informacji o publikacjach i książkach z zakresu badań operacyjnych

- przegląd i recenzje oprogramowania

- możliwość wymiany informacji na forach, pomoc w rozwiązywaniu problemów, porady itp.

2000 – obchody 50-lecia pierwszego wydania Journal of Operational Research

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

1. **Wyjaśnienie podstawowych pojęć:**

- **Sytuacja decyzyjna:**

  - Okoliczności rozwiązywania problemu – okoliczności w jakich podejmowana jest decyzja

- **Decydent (osoba lub ciało kolegialne):**

  - podejmuje decyzję – przejmuje odpowiedzialność

  - ustala priorytety działania i hierarchę celów działania – kolejność rozwiązywania problemów (hierarchia działania, ważność stawianych celów)

  - definiuje dostępność zasobów – formułuje ograniczenia: finansowe, techniczne, personalne, surowcowe, itp.

  - nie posiada jednoznacznej odpowiedzi na pojawiające się pytania

- **Problem decyzyjny:**

  – brak racjonalnej i jednoznacznej decyzji (brak prostego i jednoznacznego wyłonienia rozwiązania problemu, uwzględniając okoliczności podejmowania decyzji)

  - trudność w wyborze optymalnej decyzji – jednej z wielu możliwych decyzji

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

- **Decyzja (wariant, rozwiązanie)**

  - skutek podjęcia działania (określone rozwiązanie)

  Przykład:

  dysponujesz 80 mln € - która decyzja jest najlepsza ?

Decyzje do podjęcia	**D1**	**D2**	**D3**
Nakłady inwestycyjne (mln €)	60	80	50
Spodziewane zyski (mln €)	6	4	2,5

  - rodzaj decyzji:

    - dopuszczalna (spełniająca założenia realności i wykonalności w danych warunkach
    - optymalna (najlepsza spośród decyzji dopuszczalnych)

- **Kryterium oceny różnych decyzji:**

  - miernik „doskonałości" (jakości) rozwiązania dopuszczalnego, tzw. funkcja celu (dla poszukiwań)

  - liczba kryteriów (jednokryterialne i wielokryterialne problemy decyzyjne)

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

- **Identyfikacja problemu decyzyjnego:**

  - dokładne zidentyfikowanie aktualnego stanu

    - rozpoznanie realizowanych działań
    - wskazanie obszaru występowania trudności

  - werbalny opis sytuacji (zaistniałego problemu)

- **Model matematyczny problemu:**

  - zapis problemu decyzyjnego w postaci matematycznej - ma na celu sprowadzenie problemu wyboru najlepszej (optymalnej) decyzji do rozwiązania pewnego jednoznacznie określonego zadania matematycznego.

  PARAMETRY:

  - wielkości znane
  - zdefiniowane a'priori
  - niezmienne podczas procesu podejmowania decyzji (rozwiązywania problemu)

  ZMIENNE DECYZYJNE:

  - wielkości nieznane
  - wielkości do ustalenia w trakcie procesu podejmowania decyzji (rozwiązywania problemu)

  - wyrażony w postaci równań i nierówności

  FUNKCJA CELU:

  - wyrażona za pomocą zmiennych decyzyjnych
  - określa kryterium wyboru rozwiązania dopuszczalnego

  OGRANICZENIA:

  - wyrażone za pomocą zmiennych decyzyjnych
  - określają dostępność (posiadanych zasobów)

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

Algorytm konstrukcji modelu matematycznego problemu decyzyjnego:

- zidentyfikować zmienne decyzyjne

  - czego poszukujemy ?
  - jakie wielkości mają być wyznaczone ?

- zidentyfikować parametry zadania

  - jakie wielkości są znane (stałe) ?

- jasno zdefiniować cel swoich poszukiwań (funkcję celu)

  - jaki cel chce osiągnąć decydent ?

- określić wszystkie ograniczenia podjęcia decyzji (warunki ograniczające)

  - co stanowi ograniczenie dla podejmowanych decyzji ?
  - co charakteryzuje się ograniczoną dostępnością ?

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

Rozwiązanie problemu - wybór najlepszej decyzji:

- problem o charakterze jednokryterialnym

(DECYZJA OPTYMALANA)

- ustalenie takiej decyzji dopuszczalnej, przy której funkcja celu osiąga wartość najkorzystniejszą (optymalną)

  minimalną
  np.: koszty eksploatacji taboru

  np.: czas przejazdu

  np.: zużycie energii elektrycznej

  maksymalną

  np.: zysk

  np.: udział w rynku,

  np.: efektywność wykorzystania taboru

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

Niech:

D – oznacza zbiór dopuszczalnych decyzji,

x – dowolną decyzję,

f – funkcję celu,

to zadanie decyzyjne opisujące problem wyboru najlepszej decyzji można zapisać następująco:

Znajdź taką decyzję dopuszczalną $x^* \in D$, że

$f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in D\}$, gdy maksymalizujemy funkcję celu

$f(x^*) = \min\{f(x) \mid x \in D\}$, gdy minimalizujemy funkcję celu

Ogólna postać zadania programowania matematycznego jest zatem postaci:

$f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x \in D \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x_1,\dots,x_n) \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \,;\, i = 1,\dots,m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie problemu - wybór najlepszej decyzji:

- problem o charakterze wielokryterialnym

(DECYZJA KOMPROMISOWA)

- poszukiwanie decyzji dopuszczalnej, przy której uzyskiwany jest kompromis wszystkich kryteriów (celów)

PROGRAMOWANIE LINIOWE

Zadanie programowania liniowego – istota programowania liniowego

2. Istota programowania liniowego:

- Jedna z najpopularniejszych i najbardziej użytecznych technik optymalizacyjnych stosowanych w badaniach operacyjnych

- Programowanie liniowe znajduje powszechne zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów alokacji (przydziału) ograniczonych zasobów do konkurencyjnych operacji (zadań), np.:

  - wybór portfela oferowanych usług transportowych przy ustalonych kosztach przewozu i posiadanym taborze
  - określenie rodzaju magazynowanych wyrobów przy uwzględnieniu ich zyskowności oraz możliwościach magazynowych

- Problemy sformułowane w kategoriach programowania liniowego polegają głównie na:

  - maksymalizacji zysku
  - minimalizacji kosztów
  - osiągnięciu zakładanej wartości

❑ Zadania programowania liniowego – postacie zadań programowania liniowego

3. Postacie zadań programowania liniowego:

Ogólna postać ZPL:

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - wektor zmiennych decyzyjnych

$c = (c_1, \dots, c_n)$ - wektor współczynników funkcji celu

$$Max(Min)\ F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \begin{array}{c} \le \\ = \\ \ge \end{array} b_i;\ (i = 1, \dots, m) \\ x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

$b = (b_1, \dots, b_m)$ - wektor ograniczeń warunków ograniczających (występujących po prawej stronie równań i nierówności)

$A = \left[a_{i,j} \right]_{m \times n}$ - macierz współczynników warunków ograniczających (występujących po lewej stronie równań i nierówności)

❑ Zadania programowania liniowego – postacie zadań programowania liniowego

Postać standardowa ZPL:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad Min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i; \ (i = 1,\dots,m) \\ x_j \ge 0; \ (j = 1,\dots,n) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i; \ (i = 1,\dots,m) \\ x_j \ge 0; \ (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$

Postać kanoniczna ZPL:

$$Max(Min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i; \ (i = 1,\dots,m) \\ x_j \ge 0; \ (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$

w zapisie macierzowym:

$$Max(Min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = (c, x)$$

$$\begin{cases} A \cdot x^T = b^T \\ x^T \ge 0 \end{cases}$$

❑ Zadania programowania liniowego – postacie zadań programowania liniowego

Każdą postać ZPL możemy sprowadzić do postaci kanonicznej poprzez wprowadzenie zmiennych swobodnych.

Dla warunków postaci $\leq$, jeżeli i-ty warunek jest taką nierównością, wprowadzamy zmienną swobodną: $x_{n+i} \geq 0;\ x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ ze współczynnikiem (+1)

np. $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ zamieniamy na warunek $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

Dla warunków postaci $\geq$, jeżeli i-ty warunek jest taką nierównością, wprowadzamy zmienną swobodną: $x_{n+i} \geq 0;\ x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i$ ze współczynnikiem (-1)

np. $7x_1 - x_2 \geq 2$ zamieniamy na warunek $7x_1 - x_2 - x_4 = 2$

Uwaga: Do funkcji celu zmienne swobodne wchodzą ze współczynnikami równymi zero, w przykładzie $c_3 = 0, c_4 = 0$.

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

4. Dualność w programowaniu liniowym:

Z każdym zadaniem PL sprzężone jest pewne inne zadanie PL, zwane **zadaniem dualnym** ZD PL.

Dla zadania pierwotnego (ZP) na maksimum w postaci standardowej:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i; \ (i = 1, \dots, m) \\ x_j \ge 0; \ (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Zadaniem dualnym ZD PL będzie zadanie:

$$Min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \ge c_j; \ (j = 1, \dots, n) \\ y_i \ge 0; \ (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Z relacji zachodzących pomiędzy zadaniem ZP (pierwotnym) i ZD (zadaniem dualnym) wynika, że:

- w zadaniu dualnym jest tyle zmiennych, ile warunków w zadaniu pierwotnym (każdemu warunkowi odpowiada jedna zmienna)
- w zadaniu dualnym jest tyle warunków, ile zmiennych w zadaniu pierwotnym
- wagi funkcji celu zadania pierwotnego są wyrazami wolnymi (prawymi ograniczeniami warunków) w zadaniu dualnym
- wyrazy wolne zadania pierwotnego są wagami funkcji celu w zadaniu dualnym
- macierz współczynników zadania dualnego jest transpozycją macierzy współczynników zadania pierwotnego
- jeżeli zadanie pierwotne jest ma maksimum, to zadanie dualne jest na minimum (i odwrotnie)

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Stosuje się także następujące dodatkowe reguły tworzenia zadania dualnego:

- jeżeli z ZP i-ty warunek jest równością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym nie ma ograniczeń (przyjmuje dowolne wartości)
- jeżeli z ZP i-ty warunek jest typową nierównością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym jest nieujemna
- jeżeli z ZP i-ty warunek jest nietypową nierównością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym jest niedodatnia ($y_i \leq 0$)
- jeżeli w ZP na zmienną x_j nie nałożono ograniczeń, to j-ty warunek w ZD jest równością
- jeżeli w ZP zmienna $x_j \geq 0$ (jest nieujemna), to j-ty warunek w ZD jest typową nierównością
- jeżeli w ZP zmienna $x_j \leq 0$ (jest niedodatnia), to j-ty warunek w ZD jest nietypową nierównością

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

5. Twierdzenia o Dualności:

Twierdzenie 1 (o istnieniu)

Jeżeli ZP i ZD mają rozwiązania dopuszczalne, to oba mają rozwiązania optymalne. Jeżeli natomiast chociaż jedno z nich nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to obydwa nie mają rozwiązań dopuszczalnych.

Twierdzenie 2

Jeżeli $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania pierwotnego, a $y_1, \ldots, y_m$ rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego, to pomiędzy wartościami funkcji celu zachodzi nierówność:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Dla rozwiązań dopuszczalnych wartość funkcji celu ZP nie może być większa od wartości funkcji celu ZD

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Twierdzenie 3 (o optymalności)

Jeżeli istnieją dwa takie rozwiązania dopuszczalne $x_1^*,\dots,x_n^*$ (ZP) i $y_1^*,\dots,y_m^*$ (ZD), że

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*,$$

to obydwa rozwiązania są rozwiązaniami optymalnymi.

Twierdzenie 4 (o równowadze)

Jeżeli $x_1,\dots,x_n$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania pierwotnego oraz $y_1,\dots,y_m$ rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego, to aby te rozwiązania były rozwiązaniami optymalnymi wystarcza, że spełniane będą następujące warunki:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i > c_j \Rightarrow x_j = 0$

(3) $y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

(4) $x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$