Systemy masowej obsługi (systemy kolejkowe) – rozwiązane przykłady

Literatura:
- Karol Kukuła (red.), Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, rozdział 4, str. 168-179
- Materiały „PDF" z wykładów

Przykład 1. Wycinkowe obserwacje dotyczące czasów przybyć samochodów z towarem oraz czasów ich rozładunku dla pewnej hurtowni posiadającej jeden front rozładunkowy (kanał obsługi) podaje tabela:

Numer klienta (samochodu) z towarem	Czas przybycia liczony od przybycia poprzedniego (godziny)	Czas rozładunku samochodów (minuty)
1	1	35
2	1,5	60
3	1	65
4	0,75	60
5	1,25	55
6	2	75
7	3	65
8	0,75	45
9	0,5	60
10	0,75	80
suma	**12,5**	**600**

Zakładamy, że istnieje możliwość nieograniczonej kolejki samochodów. Traktując front rozładunkowy hurtowni jako system masowej obsługi typu: $M|M|1|\infty$ wyznaczyć:

a) Intensywność przybyć klientów oraz intensywność obsługi [na godzinę].

b) Współczynnik obciążenia (zajętości) systemu.

c) Zbadać czy system funkcjonuje w wariancie regularnym (stacjonarnym)

d) Oszacować prawdopodobieństwo, że:

- w systemie kolejkowym znajduje się więcej niż 4 samochody;

- kolejce na rozładunek czeka nie więcej niż 2 samochody;

e) Średnią liczbę samochodów czekających w kolejce na rozładunek i jego wariancję.

f) Średni czas oczekiwania samochodów w kolejce na rozładunek oraz jego wariancję.

g) Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce na rozładunek samochodów będzie większy niż 45 minut.

h) Prawdopodobieństwo, że łączny czas przebywania samochodów w systemie (w hurtowni) nie będzie większy niż 2 godziny.

Rozwiązanie:

Ad a)
Wyznaczamy średni czas jaki upłynął miedzy przybyciem dwóch kolejnych klientów:
$$\bar{t}_p = \frac{12{,}5}{10} = 1{,}25\ \left[\frac{godz.}{samochód}\right]$$
Zatem intensywność przybyć klientów λ wyznaczymy jako odwrotność tego średniego czasu:
$$\lambda = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8\ \left[\frac{samochodów}{godz.}\right]$$
Podobnie intensywność obsługi ν wyznaczymy obliczając średni czas obsługi pojedynczego klienta i wyznaczając jego odwrotność:
$$\bar{t}_o = \frac{600}{10} = 60\ \left[\frac{min.}{samochód}\right]$$
$$\nu = \frac{1}{60}\left[\frac{samochodów}{min.}\right] = \frac{1}{60} * 60 = 1\left[\frac{samochodów}{godz.}\right]$$

W analizowanym systemie masowej obsługi (kolejkowym) średni w ciągu każdej jednostki czasu (godziny) pojawia się ok. 0,8 nowego klienta (nowego samochodu z towarem do rozładunku), zaś w ciągu tej samej jednostki czasu jest obsługiwany średnio ok. 1 klient (rozładowywany 1 samochód).

Ad b) i c)
Współczynnik zajętości systemu informuje nas czy system nie jest przeciążony. Wyznaczamy go ze wzoru: $\frac{\lambda}{n*\nu}$, gdzie n – to liczba kanałów obsługi systemu.
W naszym przypadku mamy system z jednym kanałem obsługi (front rozładunkowy hurtowni) n=1, zatem zajętość systemu wynosi $\frac{0{,}8}{1*1} = 0{,}8$. Czyli system jest zajęty (obciążony) w 80 [%].

System będzie funkcjonował w prostszym do analizy wariancie tzw. regularnym, gdy intensywność przybyć, intensywność obsługi nie jest nieskończona $\lambda, \nu < \infty$ oraz zajętość systemu spełnia warunek: $\frac{\lambda}{n*\nu} < 1$.
Wariant regularny pracy systemu oznacza wariant w którym wszystkie charakterystyki stabilizują się z czasem i od niego nie zależą.
Rozpatrywany system posiada wariant regularny, bo zajętość $0{,}8 < 1$.
Oznaczmy iloraz intensywności przybyć przez intensywność obsługi pojedynczego kanału przez: $\rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{0{,}8}{1} = 0{,}8$.

Uwaga: w tym przypadku (gdy analizowany systemu posiada n=1 pojedynczy kanał obsługi, to iloraz ten jest równy także zajętości systemu – gdy mamy więcej kanałów już nie)

Ad d)
Skorzystamy z podstawowej charakterystyki rozważanego systemu z jednym kanałem obsługi w wariancie regularnym, tzn. prawdopodobieństwa, że w systemie kolejkowym jest k_0 – zgłoszeń (w tym jedno obsługiwane na kanale obsługi).
$P_k = P(k = k_0) = (1 - \rho) * \rho^k$, k=0,1,2,…
Szukane prawdopodobieństwo, że w systemie kolejkowym (hurtowni) jest więcej niż $k_0 = 4$ samochody możemy wyznaczyć następująco:
$$P(k > k_0) = P_{k_0+1} + P_{k_0+2} + \cdots = (1 - \rho) * \rho^{k_0+1} + (1 - \rho) * \rho^{k_0+2} + \cdots$$
$$= (1 - \rho) * \rho^{k_0+1} * [1 + \rho + \rho^2 + \cdots] = (1 - \rho) * \rho^{k_0+1} * \frac{1}{1 - \rho} = \rho^{k_0+1}$$
Zatem $P(k > k_0 = 4) = \rho^{4+1} = \rho^5 = 0{,}8^5 = 0{,}33$ (33%)
Szukane prawdopodobieństwo, że w kolejce na rozładunek czeka nie więcej niż $r_0 = 2$ samochody oszacujemy korzystając ze zdarzenia przeciwnego, że czeka więcej niż 2 samochody.
$P(r > r_0) = P(k > r_0 + 1) = P_{r_0+2} + P_{r_0+3} + \cdots = \rho^{r_0+2}$.
Wtedy $P(r \le r_0) = 1 - P(r > r_0) = 1 - \rho^{r_0+2} = 1 - 0{,}8^4 = 0{,}59$ (59%).

Ad e)
Średnią liczbę samochodów czekających w kolejce na rozładunek i jego wariancję wyznaczymy w przypadku wariantu regularnego systemu ze wzorów:
$E[r] = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{0,8^2}{(1-0,8)} = 3,2$ [samochody] – średnia liczba samochodów czekających w kolejce na rozładunek w hurtowni.
$D^2[r] = \frac{\rho^2 * (1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2} = \frac{0,8^2 * (1+0,8-0,8^2)}{(1-0,8)^2} = 18,56\ [samochodów^2]$
Zatem odchylenie standardowe dla szukanej liczby samochodów czekających w kolejce wynosi: $D[r] = \sqrt{18,56} = 4,31$ [samochodu]. Typowy przedział zmienności to przedział od 0 do nawet 7,5 (ok. 8) samochodów.

Ad f)
Średni czas oczekiwania w kolejce samochodów na rozładunek i jego wariancję wyznaczymy w przypadku wariantu regularnego systemu ze wzorów:
$E[T] = \frac{\rho}{(\nu-\lambda)} = \frac{0,8}{(1-0,8)} = 4$ [godziny] – średni czas czekania samochodów w kolejce na rozładunek w hurtowni.
$D^2[T] = \frac{\rho * (2-\rho)}{(\nu-\lambda)^2} = \frac{0,8 * (2-0,8)}{(1-0,8)^2} = 24\ [godziny^2]$
Zatem odchylenie standardowe dla szukanego czasu oczekiwania w kolejce wynosi: $D[T] = \sqrt{24} = 4,9$ [godz.]. Typowy przedział zmienności to przedział od 0 do nawet 8,9 (ok. 9) godzin.

Ad g)
Wyznaczając prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce na rozładunek samochodów będzie większy niż 45 minut skorzystamy ze wzoru: ($t_0 = 45\ [min] = \frac{45}{60} = 0,75\ [godz.]$)
$P(T > t_0) = \rho * e^{-(\nu-\lambda)*t_0} = 0,8 * 2,7173^{-(1-0,8)*0,75} = 0,69$ (69%)

Ad h)
Aby wyznaczyć prawdopodobieństwo, że łączny czas przebywania samochodów w systemie (w systemie hurtowniczym) nie będzie większy niż $t_0 = 2$ [godziny] skorzystamy ze wzoru na zdarzenie przeciwne, że będzie on dłuższy niż 2 godziny:
$P(Z > t_0) = e^{-(\nu-\lambda)*t_0} = 2,7173^{-(1-0,8)*2} = 0,67$ (67%).
Zatem szukane prawdopodobieństwo wyniesie: $P(Z \leq t_0) = 1 - P(Z > t_0) = 1 - 0,67 = 0,33$ (33 %).

Przykład 2. W porcie znajdują się 3 dźwigi portowe realizujące rozładunek kontenerowców. Każdy z dźwigów pracuje z jednakową wydajnością i jest w stanie rozładować jeden statek średnio w ciągu 6 godzin. Czasy przybyć [w godzinach] na nabrzeże portowe w celu rozładunku dla losowo wybranych 20 statków podaje tabela:

Numer klienta (statku) zgłoszenie rozładunku na nabrzeżu portowym	Czas przybycia liczony od przybycia poprzedniego (godziny)	Numer klienta (statku)	Czas przybycia [w godzinach]
1	4	11	2,5
2	5	12	3
3	2	13	2
4	1	14	5
5	3,5	15	6
6	1,5	16	5
7	3	17	3,5
8	4	18	8
9	5,5	19	7,5
10	3,5	20	5,5

Zakładamy, że na redzie portowej może czekać w kolejce na rozładunek nieograniczona liczba statków oraz, że kolejka do doków przeładunkowych jest jedna (wspólna).

Traktując port przeładunkowy jako system masowej obsługi typu (M|M|n|∞) wyznaczyć:

a) Współczynnik obciążenia (zajętości) systemu.
b) Zbadać czy system funkcjonuje w wariancie regularnym (stacjonarny)
c) Oszacować prawdopodobieństwo, że:
   - losowo przybywający na nabrzeże portowe statek zostanie rozładowany bez czekania w kolejce
   - zajęte rozładunkiem są 2 dźwigi portowe
   - w kolejce na obsługę (rozładunek) czeka 1 kontenerowiec
d) Średnią liczbę statków czekających w kolejce na rozładunek.
e) Średnią liczbę zajętych (oraz wolnych) dźwigów przeładunkowych.
f) Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce kontenerowców na rozładunek nie będzie dłuższy niż 120 minut.
g) Średni czas czekania w kolejce na rozładunek statków oraz jego wariancję.
h) Na podstawie parametrów pracy systemu kolejkowego odpowiedzieć na pytanie: czy ma sens zlikwidowanie jednego dźwigu przeładunkowego ?
   - ile wtedy będzie wynosił parametr zajętości systemu ?
   - jakie będzie prawdopodobieństwo, że statek będzie musiał czekać w kolejce na rozładunek ?
   - jaka będzie średnia długość kolejki do rozładunku ?
   - jaki będzie średni czas oczekiwania statku na rozładunek ?

Rozwiązanie:

Ad a) i b)

Jest to system masowej obsługi podobny jak w przykładzie 1 tylko posiadający n=3 kanały obsługi (dźwigi przeładunkowe).

Wyznaczymy średni czas jaki upłynął miedzy przybyciem dwóch kolejnych klientów (statków z towarem):

$$\bar{t}_p = \frac{\sum t_p}{m} = \frac{81}{20} = 4{,}05 \left[\frac{godz.}{statek}\right]$$

Zatem intensywność przybyć klientów λ wyznaczona jako odwrotność tego średniego czasu:

$$\lambda = \frac{1}{4{,}05} = 0{,}25 \left[\frac{statku}{godz.}\right]$$

Podobnie intensywność obsługi dla pojedynczego kanału obsługi (jednego dźwigu przeładunkowego) "ν" wyznaczymy przyjmując, że średni czas obsługi pojedynczego statku $\bar{t}_o = 6 \left[\frac{godz.}{statek}\right]$ i wyznaczając jego odwrotność:

$$\nu = \frac{1}{6}\left[\frac{statku}{godz.}\right] = 0{,}17 \left[\frac{statku}{godz.}\right]$$

Współczynnik zajętości systemu wynosi w tym przypadku:

$\frac{\lambda}{n*\nu}$, gdzie n – to liczba kanałów obsługi systemu.

W naszym przypadku mamy: $\frac{0{,}25}{3*0{,}17} = 0{,}49$. Czyli system jest zajęty (obciążony) w ok. 49 [%].

System będzie funkcjonował w wariancie regularnym w analizowanym przypadku systemu, gdy zajętość systemu spełnia warunek: $\frac{\lambda}{n*\nu} < 1$. Rozpatrywany system posiada zatem wariant regularny, gdyż zajętość systemu $0{,}49 < 1$.

Oznaczmy iloraz intensywności zgłoszeń do obsługi przez $\rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{0{,}25}{0{,}17} = 1{,}47$

Ad c)

Dla wariantu regularnego pracy takiego systemu kolejkowego prawdopodobieństwo, że w systemie kolejkowym znajduje się k-zgłoszeń (z których n=3 jest obsługiwane na kanałach – dźwigach przeładunkowych) obliczamy ze wzorów:

$P_k = \frac{\rho^k}{k!} * P_0$, gdy k=0,1,2,…,n oraz $P_k = \frac{\rho^k}{n!*n^{k-n}} * P_0$, gdy k=n+1,n+2,…,

Są to wzory rekurencyjne uzależnione od P_0, gdzie P_0 – oznacza prawdopodobieństwo, że system jest pusty i niewykorzystany (nie ma żadnego zgłoszenia i wszystkie kanały są wolne i czekają na klientów).

Wyznaczamy go ze wzoru: $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!*(n-\rho)}\right]^{-1}$

Dla naszego przykładu $P_0 = \left[\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}\right) + \frac{\rho^3}{(3-1)!*(3-\rho)}\right]^{-1} = 0{,}22$ (22%)

- Aby oszacować prawdopodobieństwo, że losowo przybywający na nabrzeże portowe statek zostanie rozładowany bez czekania w kolejce skorzystamy ze wzoru:
$1 - \Pi = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!}\right) * P_0$, gdzie: Π – prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie musiało czekać w kolejce na rozładunek.
Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi: $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!}\right) * P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}\right) * P_0 = \left(1 + 1{,}47 + \frac{1{,}47^2}{2}\right) * 0{,}22 = 0{,}78$ (78%)
- W celu oszacowania prawdopodobieństwa, że zajęte rozładunkiem są 2 dźwigi portowe skorzystamy ze wzoru: $P(s = s_0 = 2) = \frac{\rho^{s_0}}{s_0!} * P_0 = \frac{1{,}47^2}{2!} * 0{,}22 = 0{,}24$ (24%).
- Wreszcie aby wyznaczyć prawdopodobieństwo, że w kolejce na obsługę (rozładunek) czeka $r_0 = 1$ kontenerowiec skorzystamy ze wzoru:
$P(r = r_0 = 1) = \frac{\rho^{n+r_0}}{n!*n^{r_0}} * P_0 = \frac{1{,}47^{3+1}}{3!*3^1} * 0{,}22 = 0{,}057$ (5,7 %).

Ad d)
Średnią liczbę statków czekających w kolejce na rozładunek (na redzie) wyznaczamy ze wzoru:
$E[r] = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} * \frac{1}{(n-\rho)^2} * P_0 = \frac{1{,}47^{3+1}}{(3-1)!} * \frac{1}{(3-1{,}47)^2} * 0{,}22 = 0{,}22$ [statku]

Ad e)
Średnią liczbę wolnych (kanałów) dźwigów przeładunkowych wyznaczamy ze wzoru:
$n - \rho = 3 - 1{,}47 = 1{,}53$ [dźwigu]
Średnią liczbę zajętych dźwigów przeładunkowych ze wzoru: $n - (n - \rho) = \rho = 1{,}47$ [dźwigu].

Ad f)
Mamy wyznaczyć prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce kontenerowców na rozładunek nie będzie dłuższy niż 120 minut (2 godziny).
Skorzystamy zatem ze wzoru na zdarzenie przeciwne: $P(T > t_0 = 2\ [h]) = \frac{n}{n-\rho} * \frac{\rho^n}{n!} * P_0 * e^{-(n-\rho)*\nu*t_0}$.
Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi:
$P(T \le 2\ [h]) = 1 - \frac{3}{3-1{,}47} * \frac{1{,}47^3}{3!} * 0{,}22 * 2{,}7173^{-(3-1{,}47)*0{,}17*2} = 0{,}86$ (86 %).

Ad g)
Średni czas czekania w kolejce na rozładunek statków oraz jego wariancję obliczymy ze wzorów:
Czas średni czekania na rozładunek: $E[T] = \frac{\Pi}{n*\nu-\lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)*\nu} = \frac{0{,}22}{(3-1{,}47)*0{,}17} = 0{,}85$ [godziny]
Wariancja tego czasu: $D^2[T] = \frac{\Pi*(2-\Pi)}{(n-\rho)*\nu} = \frac{0{,}22*(2-0{,}22)}{(3-1{,}47)*0{,}17} = 1{,}51\ [godziny^2]$.
Zatem odchylenie standardowe tego czasu wynosi: $D[T] = \sqrt{1{,}51} = 1{,}23$ [godziny].
Typowy przedział zmienności czasu czekania na rozładunek na nabrzeżu portowym statków to przedział od 0 do 2,1 (ok. 2) godzin.

Ad h)
Analizowany system posiada zajętość tylko ok. 49 [%] (jest nawet mniej niż w połowie zdolności obsługowych obciążony). Sensowna wydaje się analiza czy zmniejszenie liczby kanałów (dźwigów) o 1 ma sens ? Przyczyniłoby się to oczywiście do mniejszych kosztów funkcjonowania systemu, ale czy poprawi efektywność pracy całego systemu (system nie będzie zbyt obciążony, a parametry jego pracy np. czasów oczekiwania na obsługę zbyt długie ?). Sprawdźmy zatem jakie będą w przypadku redukcji jednego kanału parametry pracy systemu.

- Parametr (współczynnik zajętości) systemu wynosi: $\frac{\lambda}{n*\nu} = \frac{0,25}{2*0,17} = 0,74$ (74 %). Zatem wykorzystanie zwiększa się do ok. 74 %, a system dalej funkcjonuje w wariancie regularnym (nie jest przeciążony).

- Aby wyznaczyć prawdopodobieństwo, że statek będzie musiał czekać w kolejce na rozładunek obliczymy najpierw prawdopodobieństwo, że w systemie nie ma żadnego zgłoszenia (system jest pusty). Wynosi ono: $P_0 = \left[(1+\rho) + \frac{\rho^2}{(2-1)!*(2-\rho)}\right]^{-1} = 0,15.$

Zatem szukane prawdopodobieństwo $\Pi = \frac{\rho^n}{(n-1)!*(n-\rho)} * P_0 = \frac{1,47^2}{(2-1)!*(2-1,47)} * 0,15 = 0,61$ (61 %). Wzrasta ono z 22% do 61% (w przypadku zmniejszenia o 1 liczby dźwigów). Jest to znaczne, ale jeszcze jednak sensowne i dopuszczalne prawdopodobieństwo.

- Średnia długość kolejki statków do rozładunku wyniesie:
$E[r] = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} * \frac{1}{(n-\rho)^2} * P_0 = \frac{1,47^{2+1}}{(2-1)!} * \frac{1}{(2-1,47)^2} * 0,15 = 1,7$ [statku]. Zatem wzrasta z 0,22 [statku] dla n=3 kanałów obsługi do 1,7 [statku] przy n=2 tylko dźwigach przeładunkowych.

- Średni czas oczekiwania statku na rozładunek wynosił będzie teraz:
$E[T] = \frac{\Pi}{(n-\rho)*\nu} = \frac{0,61}{(2-1,47)*0,17} = 6,8$ [godziny]. Wzrasta zatem od 0,85 (ok. 1) [godziny] do wartości ok. 7 [godzin] przy likwidacji jednego dźwigu (wydłuża się o ok. 6 godzin).

Wniosek:
Można zlikwidować jeden dźwig przeładunkowy (nie wpłynie to na efektywność systemu – dalej wariant regularny z obciążeniem ok. 74 %)
Jednakże parametry efektywnej pracy systemu, np. średnia długość kolejki, czy też czas czekania na obsługę ulegną znacznemu zwiększeniu.
Należałoby jeszcze porównać czy zmniejszenie kosztów eksploatacji jednego dźwigu rekompensuje ewentualne straty wynikające z wydłużenia czasów: czekania na obsługę (i całkowitego przebywania zgłoszeń w systemie) oraz zwiększenia się długości kolejki zgłoszeń (statków czekających na rozładunek).