

WYBRANE ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA I ANALIZY SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Literatura:

- [1] Bogusław Filipowicz, Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych, Analiza i synteza systemów obsługi i sieci kolejkowych, PWN Warszawa 1996.
- [2] Jan Mikuś, Metody wspomagania procesu zarządzania, Modele sieciowe i obsługi masowej, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1993.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

1. Uwagi wstępne.

Przez „system obsługi masowej” rozumie się różnego rodzaju urządzenia ze *stanowiskami obsługi (kanałami obsługi)*, do których zgłaszają się w stałych lub losowych odstępach czasu *klienci*, którzy chcą być obsłużeni.

Przykładami tego rodzaju systemów może być:

<i>Numer systemu obsługi</i>	<i>Klient</i>	<i>Stanowisko obsługi Kanał obsługi</i>	<i>Rodzaj obsługi</i>
1	statek	nabrzeże portowe	załadunek lub rozładunek statku
2	pacjent	gabinet lekarski	badanie stanu zdrowia pacjenta
3	abonent telefoniczny	centrala telefoniczna	połączenie z wybranym numerem
4	samochód	stacja benzynowa	tankowanie paliwa
5	samochód	stacja obsługi samochodów	naprawa samochodu (badanie stanu technicznego)
6	maszyna	konserwator maszyn	naprawa uszkodzonej maszyny
7	widz kinowy	kasa biletowa	sprzedaż biletu do kina
8	kupujący w supermarkecie	kasa supermarketu	pobieranie należności za towar

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte, to zgłaszający się klient ma dwie możliwości:

- zrezygnować z obsługi
- ustawić się w kolejce (nie jest to skutkiem złej organizacji pracy, lecz faktem obiektywnym wynikającym z losowego czasu przybywania klientów do stanowisk obsługi oraz losowego czasu trwania ich obsługi)

Uwaga:

Całkowita likwidacja kolejek (przez znaczne zwiększenie liczby stanowisk obsługi) jest rozwiązaniem nie tylko ekonomicznie najgorszym (*najbardziej kosztownym*), ale także fizycznie *niemożliwym* (zmniejszeniu się liczby klientów oczekujących na obsługę towarzyszyć będzie znaczny wzrost liczby niewykorzystanych stanowisk obsługi oczekujących na klientów - powstaje zatem *inny rodzaj kolejki*).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Aby skrócić czas oczekiwania klientów w kolejce na obsługę menadżer systemu może:

- zwiększyć ilość stanowisk obsługi,
- skrócić czas obsługi klientów przez wszystkie kanały obsługi lub tylko ich część,

Uwaga:

Oba rozwiązania wymagają poniesienia *dodatkowych kosztów* na inwestycje oraz powodują, że *wydłuży się czas* w którym wszystkie stanowiska obsługi lub ich część *będą niewykorzystane* (system ponosi wtedy niepotrzebne straty). Menadżer systemu musi podjąć decyzje, które są pewnym *kompromisem* pomiędzy *interesami klientów* (brak kolejek, szybszy czas obsługi) oraz *interesami zarządzającego systemem* (niższe koszty funkcjonowania systemu, brak strat).

Zakres zastosowań *teorii masowej obsługi* obejmuje różne dziedziny działalności ludzkiej. Teoria ta znalazła zastosowanie m.in. przy rozwiązywaniu bardzo wielu *problemów ekonomicznych*. Do zadań z teorii masowej obsługi należą również zadania z zakresu *teorii niezawodności*, oraz *zarządzania zapasami*.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

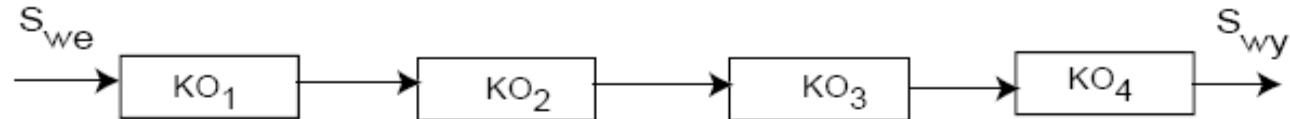
2. Struktura systemów obsługi i ich podstawowe elementy.

Systemy masowej obsługi (jak np. wielkie przedsiębiorstwa, systemy zaopatrzeniowo – magazynowe, systemy transportu miejskiego) poza dużą różnorodnością indywidualnych właściwości posiadają wiele wspólnych cech. Główną ich wspólną cechą jest występowanie w nich trzech podstawowych elementów:

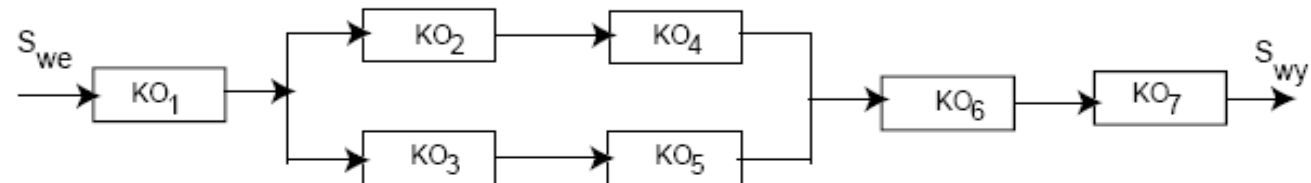
- *Źródło zgłoszeń* - zbiór potencjalnych *zgłoszeń* (klienci, życzenia, potrzeby, przedmioty) do systemu, które czekają na *obsługę* (sprzedaż, przegląd, obróbkę) przez urządzenia obsługujące.
- *Urządzenia obsługujące (kanały obsługi)* - realizują obsługę na podstawie zgłoszeń wchodzących do systemu. Mogą to być zarówno obsługujący zgłoszenia *ludzie* jak i *maszyny*.
- *Kolejka* (powstaje, gdy liczba wolnych kanałów obsługi jest mniejsza od liczby zgłoszeń). Nie jest to jedynie *zbiór oczekujących na obsługę*, ale także pewna struktura podlegająca pewnemu zbiorowi reguł – *regulamin kolejki*.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

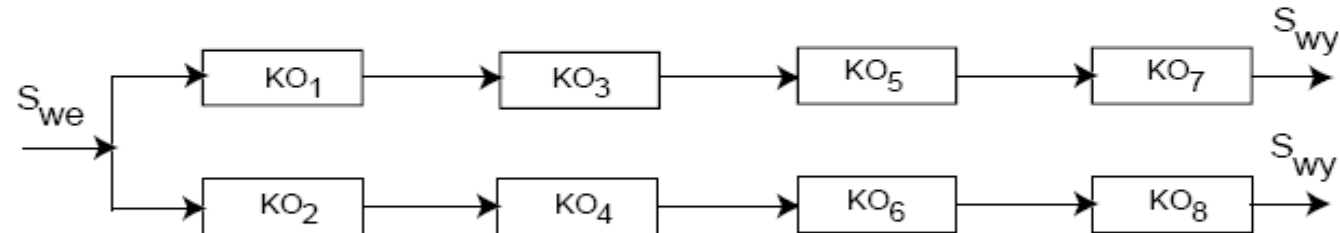
Schemat funkcjonowania przykładowych systemów masowej obsługi przedstawia poniższy rysunek:



a) szeregową strukturą wielofazowego systemu obsługi masowej



b) szeregowo - równoległą strukturą wielofazowego systemu obsługi masowej



c) równoległą strukturą wielofazowego systemu obsługi masowej

Powstałe w źródle zgłoszenia pojawiają się w stałych lub losowych chwilach czasu i tworzą tzw. **wejściowy strumień zgłoszeń** (S_{we}). Każde zgłoszenie przechodzi kolejno przez kilka kanałów (faz) i przed każdym może czekać w kolejce (obsługa kończy się po przejściu wszystkich faz). Wszystkie obsłużone zgłoszenia tworzą **strumień wyjściowy** (S_{wy}). Obsługa zgłoszeń przez oddzielny kanał obsługi podlega określonym prawidłowościom – tzw. **mechanizm obsługi** (zależy on m.in. od systemu, celu obsługi, kanału obsługi).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka wejściowego strumienia zgłoszeń.

Zgłoszenia wchodzące do systemu (pojedynczo lub grupowo) tworzą tzw. *wejściowy strumień zgłoszeń*. Strumień zgłoszeń jest *określony* - jeśli znane są prawidłowości rządzące powstawaniem zgłoszenia w przedziale czasu $[t, t + T]$ od chwili „t” – powrotu jego do źródła do chwili „t+T” ponownego jego pojawienia się w systemie (znana jest *probabilistyczna charakterystyka zmiennej losowej* „T”) oraz *liczba zgłoszeń* „N”.

Jeżeli w wejściowym strumieniu zgłoszeń nie występują przypadki pojawienia się dwóch lub większej liczby zgłoszeń (tzw. *strumień pojedynczy*), to jest on w pełni charakteryzowany za pomocą długości przedziału czasu „ ξ_n ” pomiędzy kolejnym (n – „tym”, $n=1,2,3,\dots$) oraz poprzednim (n-1 – „szym”) zgłoszeniem.

Wejściowy strumień zgłoszeń może być *strumieniem regularnym* (zgłoszenia wpływają w jednakowych odstępach czasu: $\xi_n = \text{const}$). W praktyce przypadek ten bardzo rzadko występuje (czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami zależy od bardzo wielu czynników przypadkowych). Zatem najczęściej wejściowy strumień zgłoszeń jest *strumieniem losowym* (ξ_n - są zmiennymi losowymi o określonych funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa).

Jeżeli długości przedziałów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami nie wpływają wzajemnie na siebie (zmienne losowe ξ_n - są niezależne), to strumień nazywa się *strumieniem bez następstw (bez pamięci)*. W szczególności, gdy zmienne losowe ξ_n mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa to taki strumień nazywa się *strumieniem rekurencyjnym*.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W zależności od typu rozkładu zmiennych losowych ξ_n strumienie rekurencyjne posiadają pewne specyficzne nazwy. Często w systemach obsługi masowej rozpatruje się wejściowy rekurencyjny strumień zgłoszeń będący tzw. *strumieniem Poissona*.

Dla wejściowego strumienia zgłoszeń *typu Poissona* zmienne losowe $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ ($n=1,2,\dots$) określające czas pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, a zatem posiadają rozkład prawdopodobieństwa określony za pomocą dystrybuanty postaci:

$$F(t) = P(\xi_n < t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad \lambda > 0, t \geq 0.$$

Wynika to z poniższego twierdzenia

Twierdzenie:

Jeśli proces zgłoszeń do systemu jest *procesem Poissona* z intensywnością $\lambda > 0$, to odstępów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami (zmienne losowe ξ_n) posiadają ten sam *rozkład wykładniczy* z parametrem $\lambda > 0$.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Niech $X(t)$ - będzie *sygnałowym procesem Poissona* (proces jednorodny o przyrostach niezależnych i pojedynczych) oraz oznacza ilość sygnałów (zgłoszeń) jakie pojawiły się w przedziale czasu $[0,t]$.

Dla strumienia wejściowego będącego *strumieniem Poissona* prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale $[0,t]$ pojawiło się „k” – zgłoszeń (sygnałów) wynosi:

$$P(X(t) = k) = e^{-\lambda \cdot t} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}; k = 0, 1, 2, \dots$$

Oczekiwana (średnia) ilość zgłoszeń (sygnałów) w przedziale czasu $[0,t]$ wynosi zatem: $E[X(t)] = \lambda \cdot t$. Stąd parametr „ $\lambda > 0$ ” – interpretujemy jako ilość zgłoszeń w jednostce czasu, a więc jako *intensywność zgłoszeń* dla strumienia typu Poissona.

W praktycznych zastosowaniach rozważa się także wejściowy strumień zgłoszeń *typu Erlanga* (rzędu „k”). W tym przypadku strumień napływających zgłoszeń może być *strumieniem Poissona*, lecz do obsługi dopuszcza się tylko jedno (ostatnie) z każdych „k” – kolejno napływających zgłoszeń.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W dotychczasowych rozważaniach wejściowy strumień zgłoszeń charakteryzował się tym, że kolejne zgłoszenia pojawiały się pojedynczo. W praktyce występują również takie przypadki, gdzie zgłoszenia pojawiają się *grupowo* w dowolnych chwilach czasu i liczba tych zgłoszeń może być *losowa*.

W zależności od tego czy struktura probabilistyczna (rozkład) strumienia wejściowego *zmienia się w czasie czy też nie*, strumienie dzielimy na *niestacjonarne* oraz *stacjonarne* (znacznie prostsze do analizy).

Oznaczmy przez:

N_t - liczba zgłoszeń, które weszły do systemu od chwili początkowej „ $t_0 = 0$ ” do chwili czasu „ $t > 0$ ”, $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ kolejne chwile pojawiania się zgłoszeń, zaś przez $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - liczba zgłoszeń (liczba serii zgłoszeń) pojawiająca się w tych chwilach.

Uwaga: Strumień wejściowy uważa się za określony jeśli znany jest rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego:

$$(\xi_1 = t_1 - t_0, \dots, \xi_n = t_n - t_{n-1}; X_1, \dots, X_n),$$

gdzie: $\xi_j = t_j - t_{j-1}$; $j = 1, 2, \dots, n$ - czas pomiędzy pojawieniem się „j-tej” serii zgłoszeń.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Analiza strumienia zgłoszeń wpływającego do systemu obsługi określa jego typ:

- Jeżeli zmienne losowe $\xi_1, \dots, \xi_n; X_1, \dots, X_n$ są niezależne to strumień wejściowy nazywamy z *ograniczonymi następstwami* (z ograniczoną pamięcią). Strumień taki określa się za pomocą następujących rozkładów:

$$F_n(t) = P(\xi_n < t); n=1,2,\dots \quad A_n(k) = P(\{X_n = k\}); k=0,1,\dots; n=1,2,\dots$$
$$P(\{\xi_1 < t_1^0, \dots, \xi_n < t_n^0; X_1 = k_1^0, \dots, X_n = k_n^0\}) = F_1(t_1^0) \cdot \dots \cdot F_n(t_n^0) \cdot A_1(k_1^0) \cdot \dots \cdot A_n(k_n^0)$$

- Jeżeli praktycznie niemożliwe jest pojawienie się dwóch lub więcej zgłoszeń w jednej i tej samej chwili, to strumień wejściowy nazywamy *strumieniem pojedynczym* (np. strumień Poissona).
- Jeżeli prawdopodobieństwo pojawienia się „k” zgłoszeń w przedziale czasu $[t, t+T)$ nie zależy od tego ile zgłoszeń i w jaki sposób pojawiło się w czasie poprzedzającym ten przedział to strumień taki nazywa się *strumieniem bez następstw* (bez pamięci). Jeżeli $N_{t,t+T}$ - oznacza liczbę zgłoszeń, które pojawiły się w przedziale czasu $[t, t+T)$, to warunek braku następstw dla strumienia wejściowego możemy zapisać następująco:

$$P(\{N_{t,t+T} = k \mid N_t = n\}) = P(\{N_{t,t+T} = k\}), \quad k, n - \text{całkowite nieujemne.}$$

Inaczej: brak pamięci określa wzajemną niezależność liczby zgłoszeń, które wpływają w rozłącznych przedziałach czasu

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Jeżeli dla dowolnej skończonej liczby rozłącznych przedziałów czasu: $[t_1, t_1 + \Delta_1), \dots, [t_r, t_r + \Delta_r)$ prawdopodobieństwo pojawienia się w tych przedziałach odpowiednio: k_1, \dots, k_r - zgłoszeń zależy tylko od długości tych przedziałów, a nie od położenia względem pozostałych przedziałów, to strumień wejściowy nazywa się *strumieniem stacjonarnym*.
- Jeżeli strumień wejściowy jest: stacjonarny, pojedynczy oraz bez następstw, to jest tzw. *strumieniem prostym*.

Charakterystyka mechanizmu obsługi.

Teoria masowej obsługi bada procesy, w których z jednej strony powstaje zapotrzebowanie na wykonanie pewnych prac (usług), a z drugiej powstaje konieczność zaspokojenia tych potrzeb. Związane jest to z odpowiednim mechanizmem obsługi, który *określa sposoby postępowania ze zgłoszeniami, ale od strony kanału obsługi*.

Do podstawowych charakterystyk kanału obsługi należą:

- *Czas trwania obsługi.*
- *Zdolność przepustowa systemu*
- *Dostępność systemu*

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Czas trwania obsługi - to przedział czasu niezbędny dla realizacji obsługi dla pojedynczego zgłoszenia.

Przyjmuje się, że czasy trwania obsługi dla poszczególnych zgłoszeń są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach.

Jeżeli jednak występuje *kilka rodzajów zgłoszeń*, to każdy rodzaj ma *własny czas trwania* obsługi. Podobnie każdy *kanal obsługi* (jeśli jest ich wiele) może posiadać własny czas trwania obsługi.

Typ rozkładu czasu trwania obsługi określa nazwę odpowiedniej obsługi (możemy mieć do czynienia z obsługą: *wykładniczą, deterministyczną, Erlanga, dowolną*). Badania systemów obsługi masowej pokazują, że najczęściej rozkład czasu trwania obsługi jest *rozkładem wykładniczym*.

Niech η_k - oznacza czas konieczny do obsługi „k-tego” zgłoszenia ($k=1,2,\dots$). Zakładając ponadto, że zmienne losowe $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, to rozkład prawdopodobieństwa dla wykładniczego czasu trwania obsługi „k - tego” zgłoszenia określa dystrybuanta:
$$B(t) = P(\eta_k < t) = 1 - e^{-\nu \cdot t}.$$

Stąd otrzymujemy, że *średni czas trwania obsługi* dla jednego zgłoszenia (w przypadku rozkładu wykładniczego) wynosi: $t_{sr} = E[\eta_k] = \frac{1}{\nu}$. Odwrotność

średniego czasu obsługi nazywamy *intensywnością obsługi*: $\nu = \frac{1}{t_{sr}}$ (liczba zgłoszeń obsłużona w jednostkowym przedziale czasu).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Jeżeli system obsługi jest systemem wieloetapowym (każde zgłoszenie jest obsługiwane przez jeden kanał w „ m ” etapach), zaś czas trwania obsługi dla każdego etapu ma identyczny rozkład wykładniczy, to rozkład pełnego czasu trwania obsługi (po zakończeniu wszystkich etapów) jest *rozkładem Erlanga*

postaci: $B(t) = P(\eta < t) = 1 - e^{-\nu t} \left[1 + \frac{\nu t}{1!} + \frac{(\nu t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\nu t)^m}{m!} \right]$

Zdolność przepustowa systemu – to *maksymalna liczba zgłoszeń*, które mogą być jednocześnie obsługiwane przez system.

W zależności od liczby jednocześnie obsługiwanych zgłoszeń rozróżniamy systemy: *jednokanałowe* (tylko jedno zgłoszenie w tym samym czasie obsługiwane) oraz *wielokanałowe* (więcej niż jedno zgłoszenie może być jednocześnie obsługiwane).

W praktyce spotyka się również tzw. *systemy wielofazowe* (każde zgłoszenie musi przejść przez kilka kanałów obsługi i przy każdym z nich może czekać w kolejce).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Dostępność systemu – określa dostęp zgłoszeń do różnych kanałów obsługi. System jest w *pełni dostępny*, gdy każde zgłoszenie może być obsłużone przez dowolny kanał. Jeżeli jest to niemożliwe, to system należy do grupy systemów *niepełnodostępowych*.

Najczęściej w systemach masowej obsługi zgłoszenia są obsługiwane zgodnie z *kolejnością* ich napływania. Mogą jednak zdarzyć się takie systemy obsługi, w których niektóre zgłoszenia są *uprzywilejowane* (systemy z *priorytetem*).

Mogą być to systemy z *priorytetem bezwzględnym* (przerywana jest obsługa zgłoszeń o niższym priorytecie) oraz o *priorytecie względnym* (zgłoszenie o wyższym priorytecie musi czekać na zakończenie rozpoczętej obsługi zgłoszenia o niższym priorytecie). Możliwe zasady obsługi zgłoszeń zawiera *regulamin* (dyscyplina) obsługi.

Uwaga: Do charakterystyk mechanizmu obsługi należy również *niezawodność kanału obsługi* (określa się ją za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla *przedziału czasu sprawnej - niezawodnej pracy* kanału obsługi oraz dla *przedziału czasu trwania jego odnowy* – naprawy w sytuacji awarii).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka regulaminu kolejek.

Regulamin kolejki – to reguła wyboru zgłoszenia, które ma zostać obsłużone, gdy tylko zakończy się obsługa poprzedniego.

Jeżeli zgłoszenia ustawiają się w kolejce w kolejności ich przybywania to taki porządek tworzenia kolejki nazywa się *naturalnym*.

Występują też inne zasady w *regulaminie kolejki*: wybór zgłoszenia, którego obsługa zajmuje najmniej czasu, *losowy* wybór zgłoszeń, *priorytetowy* (względny lub bezwzględny) wybór zgłoszeń oraz *mieszany* wybór zgłoszeń.

Regulamin kolejki obejmuje również:

- Ograniczenia liczby oczekujących zgłoszeń (*systemy z odmową* lub ze stratą).
- Ograniczenia dotyczące czasu oczekiwania na obsługę oraz pobytu zgłoszenia w systemie (mogą być to wielkości stałe lub zmienne losowe).
- Przepisy regulujące możliwości przechodzenia z jednej kolejki do drugiej.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

3. Klasyfikacja systemów masowej obsługi.

Najczęściej systemy masowej obsługi charakteryzowane są za pomocą kodu zaproponowanego przez D. G. Kendalla (jednego z twórców teorii). Oznaczenie systemu masowej obsługi ma postać: $X|Y|n|N|f_i^j$, gdzie:

„X” – oznacza typ strumienia wejściowego,

„Y” – oznacza typ rozkładu czasu trwania obsługi,

Przyjmuje się kod X=M – oznaczający Poissonowski (Markowski) strumień zgłoszeń (wykładniczy rozkład czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami), Y=M – wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi, X=D – deterministyczne (regularne) zgłoszenia klientów do systemu, Y=D – stały czas obsługi, X=G – dowolny proces zgłoszeń klientów do systemu, Y=G – dowolny rozkład prawdopodobieństw czasu trwania obsługi, X= E_k – rozkład Erlanga (z parametrami λ, k) odstępów czasu między zgłoszeniami, Y= E_k – rozkład Erlanga (z parametrami ν, k) prawdopodobieństw czasu trwania obsługi.

„n” – liczba kanałów w systemie (system z nieograniczoną liczbą kanałów obsługi oznacza się $n = \infty$),

„N” – maksymalna liczba miejsc oczekiwania (systemy z odmową mają N=0, dla nieograniczonej kolejki $N = \infty$),

f_i^j – regulamin obsługi (wskaźnik „i”) i regulamin kolejki (wskaźnik „j”)

Znaczenie indeksów: „i=0” – *niepriorytetowa* obsługa (porządek naturalny FIFO lub odwrotny LIFO), „i=1” *względny* priorytet obsługi, „i=2” – *bezwzględny* priorytet obsługi, „j=0” – priorytet w kolejce *nie obowiązuje* (zgłoszenie, które zastaje wszystkie miejsca zajęte w kolejce odchodzi), „j=2” – *bezwzględny* priorytet zgłoszeń (zgłoszenie z wyższym priorytetem usuwa z kolejki jedno zgłoszenie z niższym priorytetem).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

4. Przykłady systemów masowej obsługi i ich podstawowe charakterystyki.

Bardzo ważną charakterystyką systemów masowej obsługi jest prawdopodobieństwo: $P_k(t) = P(V_t = k)$ - losowo wchodzące do systemu zgłoszenie w chwili „t” zastaje w nim „k” innych zgłoszeń (jako „k-te” ustawia się w kolejce). Rozkład tego prawdopodobieństwa zależy od czasu. W praktyce można jednak zauważyć, że dla pewnych systemów (*systemy stabilne*) wpływ czasu na charakterystyki zmniejsza się wraz z jego upływem. Jest to ważna własność ustalania się tzw. *trybu stacjonarnego systemu*. Wariant stacjonarny interpretuje się jako graniczny wariant systemu niestacjonarnego: $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k$.

Nie dla każdego systemu *wariant stacjonarny istnieje*. Systemy z ograniczoną liczbą miejsc oczekiwania zawsze mają wariant stacjonarny, gdy intensywności zgłoszeń (parametr λ) oraz obsługi (parametr ν) są skończone. Dla systemów z nieograniczoną liczbą miejsc oczekiwania wariant regularny istnieje tylko

wtedy, gdy tzw. *współczynnik obciążenia* (zajętości systemu) $\frac{\lambda}{n\nu} < 1$.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|1|\infty$ - jest to jednokanałowy system obsługi, z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanał obsługi posiada wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0 < \nu < \infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0 < \lambda < \infty$). Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa zgodnie z kolejnością przybyć do systemu (porządek naturalny). Dla takiego systemu *wariant regularny* istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda < \nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych). Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ (dla tego systemu jest to *obciążenie systemu*), to prawdopodobieństwo $P_k = (1 - \rho)\rho^k$, $k=0,1,2,\dots$

Prawdopodobieństwo, że w systemie w kolejce oczekuje więcej niż r_0 zgłoszeń wynosi:

$$\begin{aligned} P(r > r_0) &= P_{r_0+2} + P_{r_0+3} + \dots = (1 - \rho)\rho^{r_0+2} + (1 - \rho)\rho^{r_0+3} + \dots = \\ &= (1 - \rho)\rho^{r_0+2} [1 + \rho + \rho^2 + \dots] = \rho^{r_0+2} \end{aligned}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w systemie obsługi wynosi: $E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń w systemie obsługi wynosi:

$$D^2[V] = E[V^2] - E[V]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k - \left(\sum_{k=0}^{\infty} kP_k \right)^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce wynosi: $\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_{k+1} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} \right)^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \rho e^{-(\nu - \lambda)t_0}$$

Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce (na obsługę) oraz jego wariancja wynoszą: $E[T] = \frac{\rho}{\nu - \lambda}$, $D^2[T] = \frac{\rho(2 - \rho)}{(\nu - \lambda)^2}$,

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie przebywać w systemie dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(Z > t_0) = e^{-(\nu - \lambda)t_0}$$

Średni całkowity czas przebywania zgłoszenia w systemie oraz jego wariancja wynoszą: $E[Z] = \frac{1}{\nu - \lambda}$, $D^2[Z] = \frac{1}{(\nu - \lambda)^2}$,