



# **ZAGADNIENIA TRANSPORTOWE**

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

## WYBRANE ZAGADNIENIA OPTYMALIZACJI LINIOWEJ W PROBLEMACH TRANSPORTOWYCH

### 1. Zagadnienie transportowe – zamknięte (ZZT)

Przedsiębiorstwo potrzebuje przetransportować produkt z  $m$  - punktów lokalizacji (magazynów, lokalizacji początkowych) do  $n$  - lokalizacji docelowych.

Zakłada się, że w każdej lokalizacji początkowej znajduje się  $a_i, i = 1, \dots, m$  jednostek towaru (dostępna podaż towaru), zaś do każdej lokalizacji docelowej należy dostarczyć  $b_j, j = 1, \dots, n$  jednostek tego towaru (popyt – zapotrzebowanie na produkt).

Zakłada się ponadto, że całkowita wielkość towaru dostępna w punktach początkowych równa jest wymaganej całkowitej wielkości towaru niezbędnej do

dostarczenia do punktów docelowych: 
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Jeżeli jednostkowy koszt transportu (1 jednostki towaru) z  $i$ -tego punktu początkowego do  $j$ -tego punktu docelowego wynosi  $c_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  należy odpowiedzieć na pytanie:

Ile jednostek towaru powinno być przetransportowanych pomiędzy każdym punktem początkowym, a każdym punktem docelowym jego lokalizacji, aby zminimalizować całkowity koszt transportu.

## □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zakładając  $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  - wielkości produktu transportowane z  $i$ -tego punktu początkowego do  $j$ -tego punktu docelowego, powyższy problem decyzyjny można zapisać za pomocą następującego zadania optymalizacji liniowej:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(x_{ij}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{array} \right. \end{aligned}$$

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

## 3. Modyfikacje zagadnienia transportowego:

- Otwarte zagadnienie transportowe - OZT

Jeżeli zmodyfikujemy założenie o bilansie pomiędzy całkowitą podażą oraz całkowitym popytem, tzn. przyjmiemy założenie, że  $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ , to zadanie

transportowe jest zadaniem otwartym (OZT) postaci:

$$\text{Min } F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

- Zagadnienie transportowo-produkcyjno-magazynowe (ZTP-M)

Jeżeli założymy, że istnieje nadwyżka podaży nad popytem:  $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ , to

nadwyżka towaru:  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ , jaka pozostaje w magazynach punktów

początkowych i nie jest wysyłana do punktów docelowych musi być składowana w punktach początkowych.

Założmy, że wielkości magazynowanego towaru w punktach początkowych

opisują zmienne:  $x_{i,n+1} \geq 0, i = 1, \dots, m$ ,  $\left( \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} = b_{n+1} \right)$ , zaś jednostkowy koszt

jego składowania wynosi  $h_i, i = 1, \dots, m$ .

W analizowanym problemie decyzyjnym uwzględniamy dodatkowo jednostkowe koszty wytworzenia (wyprodukowania) przewożonych towarów w każdym punkcie początkowym.

Koszt ten opisują parametry:  $p_i, i = 1, \dots, m$ .

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zadanie optymalizacji liniowej dla tak sformułowanego problemu decyzyjnego jest postaci:

$$\text{Min } F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (p_i + c_{ij}) \cdot x_{i,j} + \sum_{i=1}^m h_i x_{i,n+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i=1, \dots, m) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1, \dots, n+1) \end{array} \right.$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n+1)$$

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

## 4. Zagadnienie pośrednika:

Pośrednik (sprzedawca) nabywa towar od  $m$  - dostawców, przewozi go oraz sprzedaje  $n$  - odbiorcom.

Dane są:

$a_i$  - maksymalna ilość towaru jaką można kupić u  $i$ -tego dostawcy (jego podaż)

$b_j$  - maksymalna ilość towaru jaką można sprzedać  $j$ -temu odbiorcy (jego popyt)

$k_i$  - cena zakupu u  $i$ -tego dostawcy

$p_j$  - cena sprzedaży  $j$ -temu odbiorcy

$c_{ij}$  - jednostkowy koszt transportu na trasie od  $i$ -tego dostawcy do  $j$ -tego odbiorcy

Należy ustalić taki plan zakupów, transportu i sprzedaży, aby dochód pośrednika był maksymalny (dochód = przychód ze sprzedaży - koszty zakupu - koszty transportu)

$d_{ij} = p_j - k_i - c_{ij}$  - dochód jednostkowy z trasy zaopatrzeń  $\langle i, j \rangle$

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

**Zmienne decyzyjne:**

$x_{ij}$  - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń  $\langle i, j \rangle$

**Funkcja celu:**

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} \cdot x_{ij}) \rightarrow \max$$

**Warunki ograniczające:**

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

## 5. Zagadnienie transportowe z ograniczoną przepustowością tras:

Mamy  $m$  - dostawców pewnego towaru oraz  $n$  - jego odbiorców.

Znana jest:

$a_i$  - podaż  $i$ -tego dostawcy

$b_j$  - popyt  $j$ -tego odbiorcy

$c_{ij}$  - jednostkowe koszty transportu na trasie  $\langle i, j \rangle$  od  $i$ -tego dostawcy do  $j$ -tego odbiorcy

Zakładamy, że przepustowość niektórych lub wszystkich tras jest ograniczona (np. dostępną ładownością środków transportu).

Oznaczmy:

$H$  - zbiór tras z ograniczoną przepustowością

$h_{ij}$  - maksymalna przepustowość na trasie  $\langle i, j \rangle$

Zakłada się również, że: 
$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

Należy ustalić taki plan dostaw towarów od nadawców do odbiorców, aby łączny ich koszt był minimalny.

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

**Zmienne decyzyjne:**

$x_{ij}$  - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń  $\langle i, j \rangle$

**Funkcja celu:**

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} \cdot x_{ij}) \rightarrow \min$$

**Warunki ograniczające:**

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \leq h_{ij} & \langle i, j \rangle \in H \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

## □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

### 6. Minimalizacja pustych przebiegów (dotyczy optymalnego krążenia środków transportu rozwożących towar):

Założmy, że istnieje  $n$  - miast pomiędzy którymi odbywa się wymiana towarowa.

Miasta te tworzą układ zamknięty, tzn. wymiana towarów odbywa się tylko pomiędzy nimi i każde z nich może być zarówno dostawca jak i odbiorcą towarów.

Do każdego miasta przywozi się i z każdego wywozi się określoną masę towarową nadającą się do przewozu określonym środkiem transportu (o określonej ładowności)

Znane są:

$d_{ij}$  - odległości pomiędzy  $i$ -tym oraz  $j$ -tym miastem

$a_{ij}$  - przewóz masy towarowej pomiędzy miastami - wyrażony liczbą pełnych środków transportu (samochodów, wagonów)

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Dla każdego miasta określa się:

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do wywiezienia masy towarowej (wywóz) równą:  $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do przywiezienia masy towarowej (przywóz) równą:  $p_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

Dla całego układu spełniona jest równość:  $\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n p_i$ .

Natomiast dla poszczególnych miast wywóz ( $w_i$ ) wcale nie musi być równy przywozowi ( $p_i$ ).

Miasta w których  $w_i > p_i$  - są odbiorcami tzw. pustych przebiegów, a ich zapotrzebowanie na puste środki transportu wynosi:  $b_i = w_i - p_i > 0$ .

Miasta w których  $w_i < p_i$  - są dostawcami pustych przebiegów, a ich podaż pustych środków transportu wynosi:  $a_i = p_i - w_i > 0$ .

Miasta w których  $p_i = w_i$  eliminujemy z dalszych rozważań (bo nie występuje dla nich problem pustych przebiegów)

# □ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

**Problem decyzyjny jest następujący:**

Znaleźć taki plan przebiegów pustych środków transportu pomiędzy miastami, aby łączny pojazdokilometraż (samocho dokilometraż, wagonokilometraż) pustych przebiegów był minimalny.

**Zmienne decyzyjne:**

$x_{ij}$  - liczba pustych środków transportu wysyłanych z miasta  $i$  do miasta  $j$   
 $i = 1, 2, \dots, k$  - indeks miast dostawców, dla których występuje problem pustych przebiegów

$j = 1, 2, \dots, l$  - indeks miast odbiorców, dla których występuje problem pustych przebiegów

**Funkcja celu:**

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (d_{ij} \cdot x_{ij}) \rightarrow \min$$

**Warunki ograniczające:**

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^l x_{ij} = a_i & (i = 1, \dots, k) \\ \sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, l) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l) \end{cases}$$

## 1. Praktyczny przykład problemu decyzyjnego – sformułowanego za pomocą zamkniętego zadania transportowego ZZT.

Cztery piekarnie zlokalizowane na terenie miasta są zaopatrywane w mąkę z dwóch magazynów znajdujących się na peryferiach miasta. Zapasy mąki w magazynach wynoszą odpowiednio: I magazyn – 130 t, II – magazyn – 200 t. Natomiast zapotrzebowanie piekarń jest równe odpowiednio: I piekarnia – 80 t, II – piekarnia – 120 t, III – piekarnia – 70 t, III – piekarnia – 60 t. Koszty dostawy mąki do piekarń zależą tylko od odległości dostaw i są podane w tabeli kosztów:

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Należy wyznaczyć, taki plan dostaw mąki z magazynów do piekarń, aby dostarczyć piekarniom wymagane ilości, przy minimalnych sumarycznych kosztach jej transportu.

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

## 1. Algorytm wyznaczania rozwiązań ZZT.

Idea poszukiwania rozwiązań ZZT jest podobna do idei algorytmu „simpleks”.

Najpierw należy znaleźć jakiegokolwiek początkowe rozwiązanie bazowe (ponieważ rząd macierzy  $\text{rz}(A) = n + m - 1$ ), to rozwiązanie bazowe niezdegenerowane posiada  $n + m - 1$  dodatnich wartości w wektorze zmiennych decyzyjnych – zmienne bazowe, pozostałe wartości to zera – dla zmiennych niebazowych.

Następnie sprawdza się, czy rozwiązanie bazowe aktualne jest optymalne, czy też nie. Jeśli nie to znajdujemy kolejne rozwiązanie nie gorsze od poprzedniego i znów sprawdzamy jego optymalność. Powyższe postępowanie kończymy, gdy wreszcie uzyskamy rozwiązanie bazowe optymalne.

Algorytmicznie otrzymywanie rozwiązań ZZT można przedstawić następująco:

**ETAP I** (wyznaczenie dopuszczalnego początkowego rozwiązania bazowego).

W literaturze opisanych jest wiele metod konstrukcji początkowego rozwiązania bazowego, np.:

- Metoda *kąta północno – zachodniego* (N-W) – prosta ale mało efektywna (wymagane jest zazwyczaj przeprowadzenie dużej liczby iteracji, aby uzyskać z niego końcowe rozwiązanie optymalne).
- Metoda *minimalnego elementu* macierzy kosztów transportu – na ogół bardziej efektywna od poprzedniej.
- Metoda VAM (*aproxymacyjna*) – nieco bardziej złożona od poprzednich, ale daje rozwiązania początkowe bliskie rozwiązaniom optymalnym.

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

## Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów:

Oznaczmy przez  $(r, k)$  – numer zmiennej wybieranej w danej  $(p - \text{tej})$  iteracji za zmienną bazową:  $x_{r,k}^{(p)} > 0$ . Oznaczmy przez:  $I$  – zbiór indeksów dostawców, których zasoby w danym kroku nie zostały jeszcze rozdysponowane, zaś przez  $J$  – zbiór indeksów odbiorców, których zapotrzebowanie w danym kroku nie zostało jeszcze zaspokojone. Numer zmiennej wprowadzanej do bazy w każdej iteracji wyznaczamy zgodnie z formułą:

$$c_{r,k} = \min\{c_{i,j} : (i, j) \in I \times J\}$$

Następnie przypisujemy  $(p - \text{tej})$  - zmiennej bazowej aktualną wielkość transportu od dostawcy  $(r - \text{tego})$  do odbiorcy  $(k - \text{tego})$  zgodnie ze wzorem:

$$\begin{aligned}x_{r,k}^{(p)} &= \min\{a_r^{(p-1)}, b_k^{(p-1)}\}, p = 1, 2, \dots, m + n - 1; \\a_r^{(p)} &= a_r^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, b_k^{(p)} = b_k^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, p = 1, 2, \dots, m + n - 1; \\a_i^{(p)} &= a_i^{(p-1)}, b_j^{(p)} = b_j^{(p-1)}, \text{ dla } i \neq r, j \neq k, p = 1, \dots, m + n - 1; \\a_i^{(0)} &= a_i, b_j^{(0)} = b_j; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m;\end{aligned}$$

Eliminujemy z dalszych rozważań ze zbioru indeksów dostawców „ $I$ ” lub odbiorców „ $J$ ” ten indeks, dla którego  $a_r^{(p)} = 0$  (zapasy tego dostawcy zostały wyczerpane) lub  $b_k^{(p)} = 0$  (zapotrzebowanie tego odbiorcy zostało zrealizowane).

Powtarzamy tę procedurę i na ogół po  $(m + n - 1)$  krokach znajdujemy wartości wszystkich zmiennych bazowych dla rozwiązania początkowego.

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Tablica przewozów (kolejne iteracje):

i \ j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1		$x_{1,2}^{(4)} = 70$		$x_{1,4}^{(1)} = 60$	130	70	70	70	0	0
2	$x_{2,1}^{(3)} = 80$	$x_{2,2}^{(5)} = 50$	$x_{2,3}^{(2)} = 70$		200	200	130	50	50	0
$b_j^{(0)}$	80	120	70	60	330					
$b_j^{(1)}$	80	120	70	0						
$b_j^{(2)}$	80	120	0	0						
$b_j^{(3)}$	0	120	0	0						
$b_j^{(4)}$	0	50	0	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0	0						

Iteracja p=5:  $I = \{2\}$ ;  $J = \{2\}$ ; 5 zmienna bazowa:  $x_{2,2}^{(5)} = \min\{50, 50\} = 50$

modyfikujemy:  $a_1^{(4)} = a_1^{(3)} - x_{1,2} = 70 - 70 = 0$ ;  $b_2^{(4)} = b_2^{(3)} - x_{1,2} = 120 - 70 = 50$ ;

pozostałe:  $a_i^{(4)} = a_i^{(3)}$ ;  $b_j^{(4)} = b_j^{(3)}$ . Skreślamy ze zbioru nadawców 1 – nadawcę.

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tablica przewozów (ostateczna)

i \ j	1	2	3	4
1	0	70	0	60
2	80	50	70	0

Otrzymujemy zatem rozwiązanie bazowe początkowe postaci:

$$f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 70 \cdot 24 + 50 \cdot 30 + 70 \cdot 15 + 60 \cdot 13 = 6370$$

**ETAP II** (sprawdzenie optymalności rozwiązania bazowego).

Wyznaczamy tzw. *tablicę kosztów zastępczych*  $\hat{c}_{i,j}$  w następujący sposób:

- Koszty zastępcze dla aktualnych przewozów rozwiązania bazowego ( $x_{i,j} > 0$ ) przyjmujemy równe kosztom wyjściowym podanym w tablicy:  $c_{i,j}$ .
- Znajdujemy parę takich wierszy lub kolumn dla których możemy wyznaczyć ich różnicę (w tej samej kolumnie lub wierszu są dwie zmienne bazowe).
- Znając ile wynosi taka różnica - wyznaczamy pozostałe elementy w macierzy kosztów zastępczych, których wartości jeszcze nie znamy, rozwiązując odpowiednie równania, tak aby zgadzała się wyznaczona różnica.

Po wyznaczeniu kosztów zastępczych wyznaczamy *tablicę różnic*:  $r_{i,j} = c_{i,j} - \hat{c}_{i,j}$ .

**Uwaga:** Dla zmiennych bazowych  $r_{i,j} = 0$ .

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

## Kryterium optymalności rozwiązania bazowego:

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, jeżeli wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie.

Dla naszego przykładu (w przypadku otrzymanego rozwiązania początkowego metodą minimalnego elementu macierzy kosztów) mamy:

### Macierz kosztów zastępczych (początkowa)

j	1	2	3	4
i				
1		24		13
2	17	30	15	

Różnica np. między drugim i pierwszym wierszem wynosi: 6, zatem pozostałe elementy tej macierzy wyznaczamy rozwiązując równania:  $17 - \hat{c}_{1,1} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,1} = 11$ ,  $15 - \hat{c}_{1,3} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,3} = 9$ ,  $\hat{c}_{2,4} - 13 = 6 \Rightarrow \hat{c}_{2,4} = 19$ .

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

## Macierz kosztów zastępczych (pełna)

i \ j	1	2	3	4
1	11	24	9	13
2	17	30	15	19

## Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	14	0	19	0
2	0	0	0	7

Ponieważ wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie to otrzymane rozwiązanie początkowe jest optymalne.

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

## ETAP III (modyfikacja rozwiązania bazowego i poprawa wartości funkcji celu):

Z każdym zadaniem transportowym związany jest graf tego zadania odpowiadający aktualnemu rozwiązaniu bazowemu. Jeżeli rozwiązanie bazowe nie jest zdegenerowane, to taki graf jest grafem *spójnym* i *bezkonturowym*.

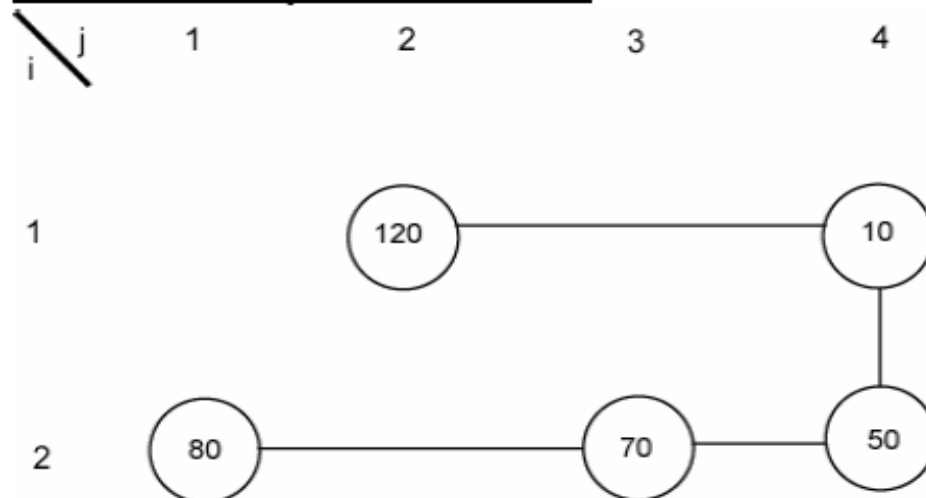
Np. dla naszego przykładu dla rozwiązania bazowego postaci:

Tablica przewozów

i \ j	1	2	3	4
1	0	120	0	10
2	80	0	70	50

Funkcja celu wynosi:  $f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 120 \cdot 24 + 70 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 50 \cdot 26 = 6720$  (więcej niż dla rozwiązania optymalnego).

Graf tego rozwiązania jest postaci:



# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

**Macierz kosztów zastępczych:**

j	1	2	3	4
i				
1	4	24	2	13
2	17	37	15	26

**Macierz różnic**

j	1	2	3	4
i				
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

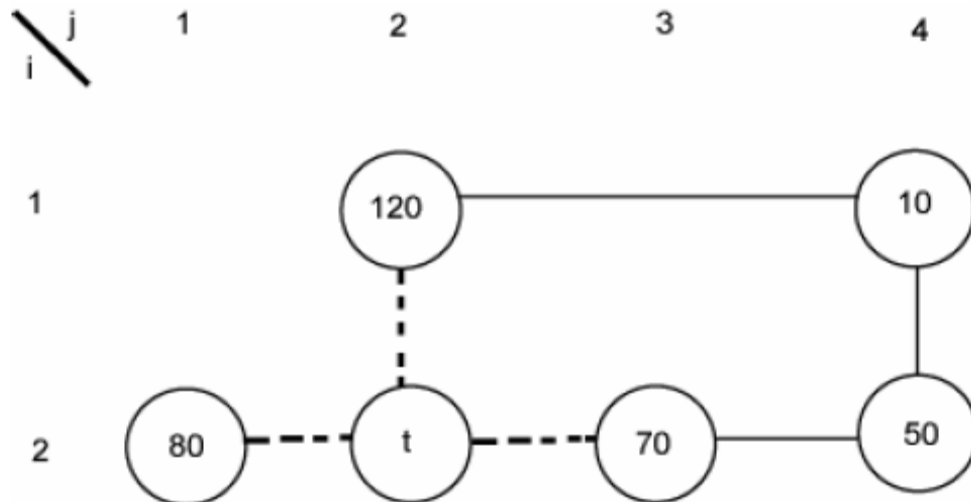
Ponieważ  $\hat{c}_{2,2} = -7$ , to rozwiązanie to nie jest oczywiście optymalne. Należy go zatem poprawić.

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

## Kryterium wejścia do bazy:

Do bazy wprowadzamy tę zmienną niebazową, dla której element macierzy różnic jest najmniejszy (z ujemnych). W naszym przypadku zmienną  $x_{2,2}$ . Wprowadzając tę zmienną (przypisując jej wielkość transportu „ $t > 0$ ” jednostek) poprawiamy rozwiązanie bazowe. Po wprowadzeniu tej zmiennej otrzymalibyśmy dla zadania graf konturowy postaci:

Węzły narożne konturu określają numery zmiennych, których wartości się zmieniają, gdy wprowadzamy do bazy nową zmienną.



Należy ustalić, zatem którą zmienną z aktualnej bazy (spośród narożnych konturu) należy usunąć. Określa to kryterium wyjścia dla zadania transportowego.

## Macierz różnic

j	1	2	3	4
i				
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

## Kryterium wyjścia:

Niech  $G = \{(k, l)\}$ , gdzie:  $(k, l)$  - węzły narożne konturu. Zbiór ten ma parzystą liczbę wierzchołków (dla nas 4). Wierzchołki te cechujemy na przemian (+/-) poczynając od wierzchołka, który wprowadzamy do bazy (otrzymuje on cechę plus). Cechowanie dzieli ten zbiór na 2 rozłączne zbiory  $G^+$  oraz  $G^-$ .

W naszym przykładzie:  $G^+ = \{(2,2), (1,4)\}$ ;  $G^- = \{(1,2), (2,4)\}$ .

Wartość nowo wprowadzanej zmiennej bazowej w  $(p - \text{tej})$  iteracji wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$x^{(p)}_{k,l} = \min_{(i,j) \in G^-} \{x_{i,j}^{(p-1)}\}$$

Nowe wartości zmiennych narożnych obliczamy zgodnie ze wzorami:

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} - x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla } (i, j) \in G^-;$$

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} + x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla } (i, j) \in G^+, (i, j) \neq (k, l);$$

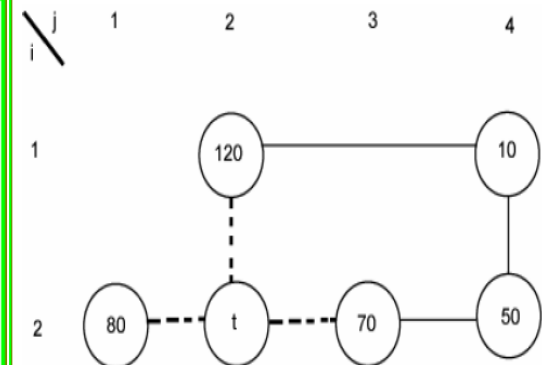
$$x_{i,j}^0 = x_{i,j};$$

Pozostałe zmienne nie będące narożne w grafie nie zmieniają wartości.

W naszym przykładzie:

$$x_{2,2}^{(1)} = \min \{x_{1,2}^0, x_{2,4}^0\} = \min \{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$

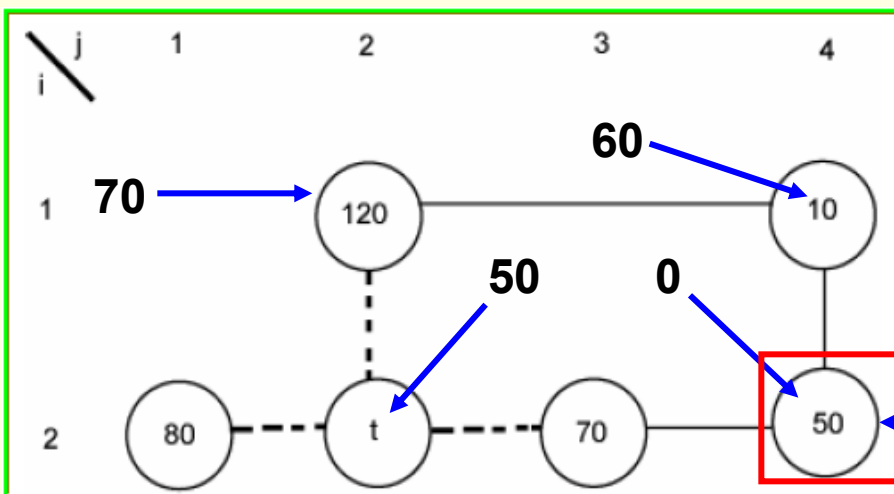


# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

**Treść kryterium wyjścia:** z bazy usuwamy tę zmienną ze zmiennych należących do zbioru indeksów  $G^-$ , dla której policzona nowa wartość (zgodnie ze wzorami redukcyjnymi) jest najmniejsza. Dla naszego przykładu usuwaną zmienną jest zmienna:  $x_{2,4}$ . Tak utworzone nowe rozwiązanie bazowe da wyznaczone już wcześniej rozwiązanie optymalne.

$$x_{2,2}^{(1)} = \min \{x_{1,2}^0, x_{2,4}^0\} = \min \{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$



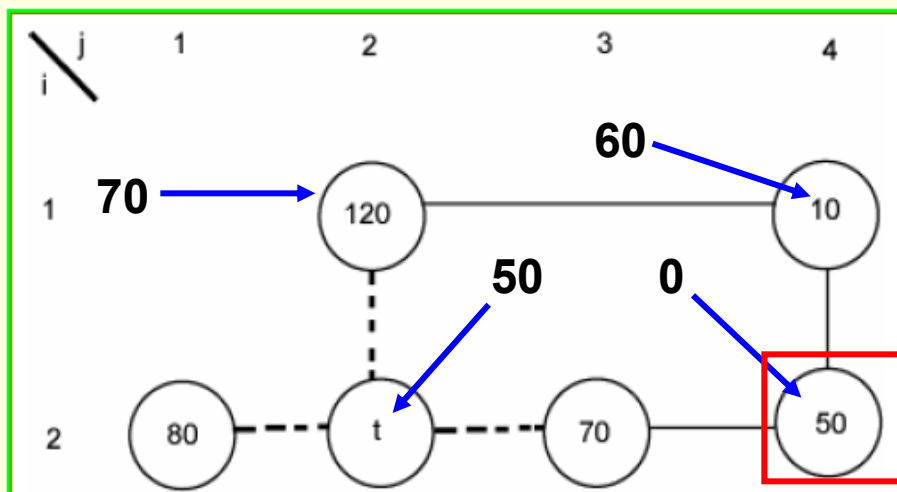
**niebazowa**

# □ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Interpretacja współczynnika różnic  $r_{2,2} = -7$  (dla rozwiązania nieoptymalnego) prowadzi do wniosku, że nieoptymalne rozwiązanie aktualne można poprawić o wartość  $(-7 \cdot 50 = -350)$  - tzn. zmniejszyć o 350 koszty transportu (tyle wynosi różnica  $f$  - celu rozwiązania bieżącego oraz optymalnego), dostarczając drugiemu odbiorcy nie 120 j. jego pełnego zapotrzebowania z magazynu 1-go, lecz w porcjach - 70 z 1-go i 50 z 2-go. Tym samym zamówienie 4-go odbiorcy mogło być zrealizowane (60 - jednostek) w całości z magazynu 1-go.

## Uwaga:

Jeżeli w macierzy różnic rozwiązania optymalnego jest więcej zer niż zmiennych bazowych, to istnieje wiele rozwiązań optymalnych o tej samej wartości funkcji celu.



**Macierz różnic**

j	1	2	3	4
i				
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0