

Cz. 1
Problemy optymalizacji liniowej systemach logistycznych
(metoda graficzna) – przykłady

Literatura:

Zbigniew Jędrzejczyk, Karol Kukula (red.), Jerzy Skrzypek, Anna Walkosz. Badania Operacyjne w przykładach i zadaniach. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2004 (wydanie 7, 2019).

Przykład 1. Określić ilość kursów poszczególnych środków transportu, przy których koszty przewozu gotowych wyrobów z przedsiębiorstwa do hurtowni będą najniższe.

Opis sytuacji decyzyjnej:

- przedsiębiorstwo ma do wyboru 2 rodzaje środków transportu do przewozu własnych wyrobów do hurtowni: transport kolejowy i transport samochodowy
- przedsiębiorstwo musi przesłać na dobę 120 ton ładunku (dobowy strumień ładunków = 120 t/dobę)
- środki transportu kolejowego umożliwiają przewiezienie jednym kursem 30 ton produktu
- środki transportu samochodowego umożliwiają przewiezienie jednym kursem 10 ton produktu
- koleje są w stanie zrealizować 2 kursy na dobę
- transportem samochodowym jest możliwość zrealizowania 10 kursów na dobę
- koszty transportu kolejowego wynoszą 100 zł / kurs
- koszty transportu samochodowego wynoszą 300 zł / kurs

Model matematyczny problemu:

1. Określenie zmiennych decyzyjnych: (wielkości zmieniane, które w procesie podejmowania decyzji należy wyznaczyć)

Wprowadzamy dwie zmienne decyzyjne $x_1 \geq 0$ – liczba kursów środkami transportu kolejowego, $x_2 \geq 0$ – liczba kursów środkami transportu samochodowego.

2. Zapisanie kryterium decyzyjnego w sposób matematyczny – w tym wypadku kryterium,, jakim będziemy się kierować podejmując optymalne decyzje będzie kryterium łącznych kosztów transportu (zł).

Funkcja celu $F(x_1, x_2) = 100 * x_1 + 300 * x_2 \rightarrow min$

3. Określenie wszystkich ograniczeń rozpatrywanych w problemie decyzyjnym i zapisanie ich jako układ warunków w postaci (równań lub nierówności) definiujących łącznie tzw. obszar poszukiwania rozwiązań dopuszczalnych.

$$\begin{cases} 30 * x_1 + 10 * x_2 \geq 120 & (1) \\ x_1 \leq 2 & (2) \\ x_2 \leq 10 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Ostateczny model matematyczny rozwiązywanego problemu optymalizacyjnego zapisany w postaci tzw. zadania programowania liniowego (zarówno funkcja celu jak i wszystkie warunki ograniczające są liniowe) jest postaci:

ZPL (Zadanie Programowania Liniowego)

$$F(x_1, x_2) = 100 * x_1 + 300 * x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 30 * x_1 + 10 * x_2 \geq 120 & (1) \\ x_1 \leq 2 & (2) \\ x_2 \leq 10 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Zadanie to możemy sprowadzić do prostszej postaci – przekształcając funkcje celu oraz dzieląc obustronne przez 10 (1) warunek:

$$F(x_1, x_2) = 100 * (x_1 + 3 * x_2) = 100 * Z(x_1, x_2) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3 * x_1 + 1 * x_2 \geq 12 & (1) \\ x_1 \leq 2 & (2) \\ x_2 \leq 10 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Rozwiązanie analizowanego problemu decyzyjnego zapisanego w postaci zadania ZPL – metodą graficzną (przypadek tylko dla dwóch zmiennych decyzyjnych).

Ilustracja graficzna obszaru rozwiązań dopuszczalnych

Aby znaleźć optymalne rozwiązania zadania ZPL należy po pierwsze zilustrować w układzie współrzędnych (X1,X2) obszar rozwiązań dopuszczalnych zadania.

Ilustracją graficzną dla pierwszego warunku (1) jest półpłaszczyzna o krawędzi $3 * x_1 + 1 * x_2 = 12$. Przechodzi ona m.in. przez punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych: $x_1 = 0 \rightarrow 3 * 0 + 1 * x_2 = 12 \rightarrow x_2 = 12$, oraz $x_2 = 0 \rightarrow 3 * x_1 + 1 * 0 = 12 \rightarrow x_1 = 4$. Zatem przechodzi ona przez punkty (0,12) oraz (4,0). Ilustracją warunku (1) z racji współczynnika przy x_2 (równego $1 > 0$) będzie półpłaszczyzna powyżej tej krawędzi (zob. Rys. 1).

Ilustracją graficzną dla drugiego warunku (2) jest półpłaszczyzna o krawędzi $1 * x_1 + 0 * x_2 = 2$. Krawędź ta jest równoległa do osi X_2 i przechodzi przez punkt (2,0), a więc szukaną półpłaszczyzną jest obszar na lewo od tej krawędzi (zob. Rys. 1).

Podobnie ilustracją graficzną dla trzeciego warunku (3) jest półpłaszczyzna o krawędzi $0 * x_1 + 1 * x_2 = 10$. Krawędź ta jest równoległa do osi X_1 i przechodzi przez punkt (10,0), a więc szukaną półpłaszczyzną jest obszar w dół od tej krawędzi (zob. Rys. 1).

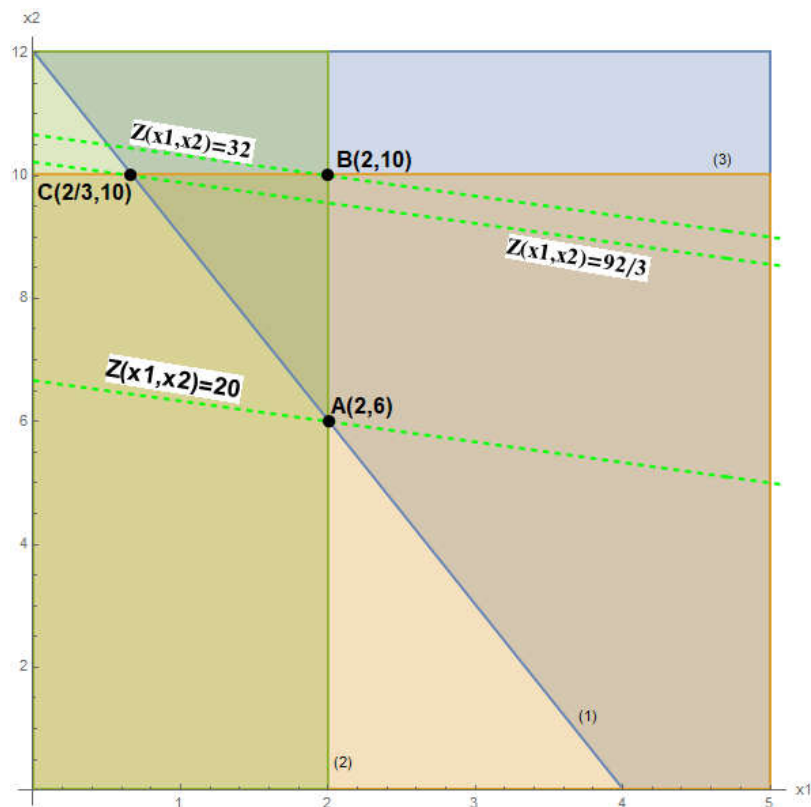
Częścią wspólną w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych wszystkich (1)-(3) warunków ograniczających właściwych i warunku brzegowego (4) jest zatem na czerwono zilustrowany trójkąt ABC o współrzędnych wierzchołków A(2,6); B(2,10) i C(2/3,10).

Współrzędne wierzchołków znajdujemy rozwiązując układy równań jako przecięcia krawędzi odpowiednich warunków.

Dla punktu A – przecięcie krawędzi warunku (1) i (2). Zatem wstawiając za $x_1=2$ do równania (1) mamy: $3 * 2 + 1 * x_2 = 12 \rightarrow x_2 = 6$.

Dla punktu B – przecięcie krawędzi warunku (2) i (3) mamy od razu jego współrzędne (2,10).

Dla punktu C – przecięcie krawędzi warunku (1) i (3). Zatem wstawiając za $x_2=10$ do równania (1) mamy: $3 * x_1 + 1 * 10 = 12 \rightarrow x_1 = 2/3$.



Rys. 1. Ilustracja obszaru rozwiązań dopuszczalnych dla przykładu 1.

Jeżeli istnieje rozwiązanie optymalne tego zadania, to będziemy go poszukiwać w obszarze trójkąta ABC.

Analiza przebiegu warstwic funkcji celu

Przeanalizujmy jak zachowuje się pomocnicza funkcja celu $Z(x_1, x_2) = 1 * x_1 + 3 * x_2$.

Przechodząc przez początek układu współrzędnych ma ona równanie:

$$Z(x_1, x_2) = 1 * x_1 + 3 * x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}x_1.$$

Przesuwając równolegle warstwicę funkcji celu w górę, tak by przebiegała ona przez obszar rozwiązań dopuszczalnych zauważamy, że jako pierwszy zostanie osiągnięty wierzchołek A(2,6), a wartość funkcji celu w tym punkcie wyniesie: $Z(A)=Z(2,6)=1*2+3*6=20$, następnie

wierzchołek $C(2/3, 10)$, $Z(C) = Z(2/3, 10) = 1 \cdot 2/3 + 3 \cdot 10 = 92/3$, a jako ostatnim punktem obszaru rozwiązań dopuszczalnych osiągnięty przez warstwicę funkcji celu będzie wierzchołek $B(2, 10)$, $Z(B) = Z(2, 10) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 10 = 32$. Zatem rozwiązaniem optymalnym (minimum funkcji celu) są współrzędne $A(2, 6)$ (jednoznaczne - jedno rozwiązanie).

Rozwiązanie optymalne:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 6, F_{min}^* = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ zł}$$

Należy zatem wykonać 2 kursy koleją oraz 6 kursów samochodem, a optymalne (minimalne) koszty transportu wyniosą 2000 zł.

Przykład 2. Hurtownia położona w pewnym mieście jest zaopatrywana z dwóch magazynów. Magazyn M1 położony jest w bliskiej odległości od hurtowni 52 km, zaś magazyn M2 (większy) położony jest w odległości 147 km. W magazynie M1 (przeznaczonym do szybkich, doraźnych dostaw) zgromadzono 18 ton towarów, zaś w magazynie M2 (przeznaczonym do większych dostaw) zgromadzono 300 ton. Samochody realizujące dostawy z magazynu M1 do hurtowni mają ładowność 6[t], zaś do obsługi dostaw z magazynu M2 przeznaczono samochody o ładowności 20[t]. Samochody jeżdżące z zaopatrzeniem z magazynu M2 są w stanie zrealizować tylko 2 kursy w ciągu dnia, zaś samochody zaopatrujące w towar z magazynu M1 tylko 5 kursów w ciągu dnia.

- Oszacować koszty dostaw dla jednego kursu z magazynów do hurtowni przyjmując średnie spalanie samochodów o ładowności 6[t] na poziomie 10 l/100km, zaś dla samochodów cięższych o ładowności 20[t] na poziomie 21 l/100km oraz przyjmując koszt paliwa na poziomie 3,9 zł za 1l.
- Wymagane jest, aby do hurtowni w ciągu dnia dostarczyć co najmniej 38[t] towarów. Obliczyć ile należy wykonać kursów z obu magazynów aby zrealizować zamówienie przy istniejących ograniczeniach przyjmując jako kryterium decyzyjne sumaryczne koszty dostaw z obu magazynów. Sformułować model problemu i rozwiązać zadanie metodą geometryczną.
- Jak zmieni się rozwiązanie, gdy minimalne dostawy do hurtowni zostaną zwiększone o 20 [t] ?

Ad a) Oszacowanie kosztów dla 1 kursu:

Magazyn M2: $147[\text{km}] \cdot 21[\text{l}]/100[\text{km}] \cdot 3,9[\text{zł}]/1[\text{l}] = \text{ok. } 120 \text{ zł}$.

Magazyn M1: $52[\text{km}] \cdot 10[\text{l}]/100[\text{km}] \cdot 3,9[\text{zł}]/1[\text{l}] = \text{ok. } 20 \text{ zł}$.

Ad b) Model matematyczny rozpatrywanego problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne: Wprowadzamy dwie zmienne decyzyjne $x_1 \geq 0$ – liczba kursów z magazynu M2, $x_2 \geq 0$ – liczba kursów z magazynu M1.

Funkcja celu - łączne koszty dostaw dla wszystkich kursów:

$$F(x_1, x_2) = 120 * x_1 + 20 * x_2 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 20 * x_1 + 6 * x_2 \geq 38 & (1) \\ 20 * x_1 & \leq 300 & (2) \\ & 6 * x_2 \leq 18 & (3) \\ 1 * x_1 & \leq 2 & (4) \\ & 1 * x_2 \leq 5 & (5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (6) \end{cases}$$

Warunek (1) - wyraża ograniczenie realizacji wymaganych dostaw do hurtowni, (2) i (3) – określają ograniczenia posiadanych zasobów w obu magazynach, zaś warunki (4) i (5) ograniczenia dla liczby możliwych kursów.

Po uproszczeniu ostateczny model matematyczny rozwiązywanego problemu optymalizacyjnego zapisany w postaci zadania programowania liniowego jest następujący:

ZPL

$$F(x_1, x_2) = 20 * (6 * x_1 + 1 * x_2) = 20 * Z(x_1, x_2) \rightarrow \min$$

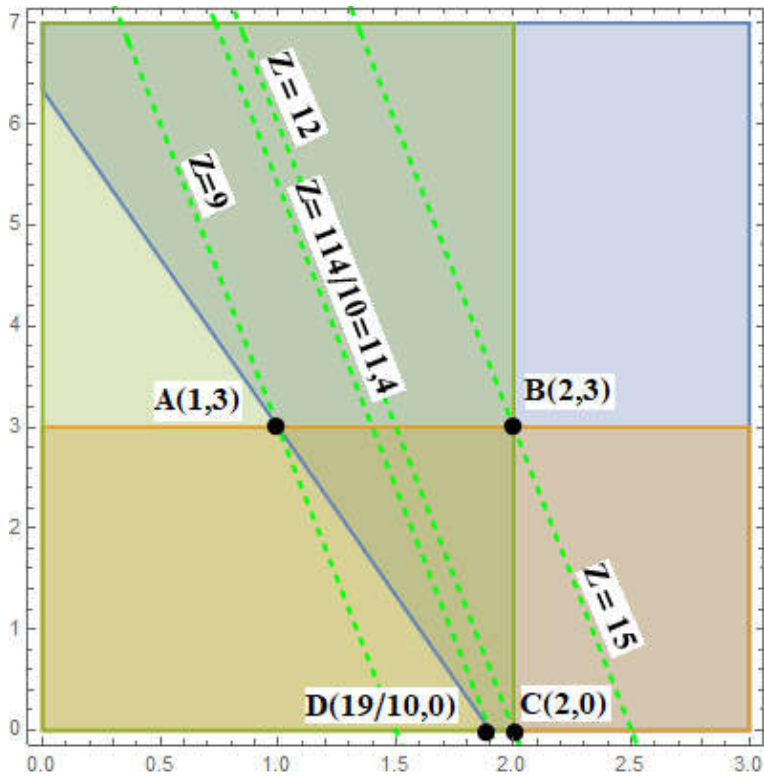
Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10 * x_1 + 3 * x_2 \geq 19 & (1) \\ 1 * x_1 & \leq 15 & (2) \\ & 1 * x_2 \leq 3 & (3) \\ 1 * x_1 & \leq 2 & (4) \\ & 1 * x_2 \leq 5 & (5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (6) \end{cases}$$

Rozwiązanie metodą graficzną:

Obszar rozwiązań dopuszczalnych czworokąt ABCD o wierzchołkach: A(1,3); B(2,3); C(2,0) oraz D(19/10,0). Optymalne rozwiązanie istnieje zatem w wierzchołku A(1,3) – rys. 2.

Rozwiązanie optymalne: $x_1^* = 1, x_2^* = 3, F_{min}^* = 20 * 9 = 180$ zł. Należy wykonać 1 kurs samochodami 20[t] z magazynu odległego M2 oraz 3 kursy samochodami 6[t] z magazynu M1. Koszty minimalne dostaw wyniosą 180 zł.



Rys. 2. Ilustracja obszaru rozwiązań dopuszczalnych dla przykładu 2.

Ad c) **Rozwiązać ten przypadek samodzielnie !!!**

Model ZPL – jest następujący:

ZPL

$$F(x_1, x_2) = 20 * (6 * x_1 + 1 * x_2) = 20 * Z(x_1, x_2) \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10 * x_1 + 3 * x_2 \geq 29 & (1) \\ 1 * x_1 \leq 15 & (2) \\ 1 * x_2 \leq 3 & (3) \\ 1 * x_1 \leq 2 & (4) \\ 1 * x_2 \leq 5 & (5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (6) \end{cases}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zad. 1. Przedsiębiorstwo transportowe dysponuje ciężarówkami o ładowności 5t. Klient zlecił przedsiębiorstwu przewóz co najmniej 8 ładunków w opakowaniach po 3t oraz 10 ładunków w opakowaniach po 2t. Wiadomo ponadto że firma dysponuje tylko maksymalnie 10 środkami transportu. W jaki sposób należy załadować towar na ciężarówki aby zrealizować zamówienie przy istniejących ograniczeniach? Jako kryterium decyzyjne przyjąć liczbę środków transportu wykorzystanych do zrealizowania zamówienia.

- Ile wynosi łączna niewykorzystana ich ładowność?
- Określić model matematyczny problemu decyzyjnego i rozwiązać zadanie metodą geometryczną.

Uwaga: Rozpisać możliwe sposoby załadunku i wykorzystać te informacje do zapisu modelu.

Opakowania (palety)	Sposoby załadunku	
	I sposób (x1)	II sposób (x1)
3[t]	1	0
2[t]	1	2
Niewykorzystana ładowność [t]	0	1

Zad. 2. Pewien dysponuje 1000 zł gotówki. Hurtownik kupuje u producenta dwa typy produktów A i B. Produkt A kosztuje 10 zł i wymaga 3m² powierzchni, produkt B kosztuje 20 zł i wymaga 4m² powierzchni. Wiadomo także, że hurtownik będzie mógł kupić u producenta co najwyżej 20 jednostek produktu A oraz co najwyżej 30 jednostek produktu B. Zakładając, że hurtownik ustalił marżę zysku ze sprzedaży poszczególnych produktów odpowiednio: 10% i 15% z ceny jednostkowej ich zakupu oraz że zamierza osiągnąć na sprzedaży wyrobów odbiorcom detalicznym zysk w wysokości co najmniej 100 zł

- Określić optymalne wielkości zakupu poszczególnych produktów, które zapewniają optymalne wykorzystanie powierzchni magazynowej hurtownika przy istniejących ograniczeniach.
- Określić model matematyczny i rozwiązać zadanie metodą geometryczną.

Zad. 3. Dystrybutor wózków podnośnikowych sprzedaje na polskim rynku 2 typy wózków. Na zakup u producenta wózków widłowych firma może przeznaczyć maksymalnie 800 000 zł/rok. Cena jednostkowa zakupu wózków typu 1 wynosi - 10 000 zł, zaś wózków typu 2 – 20 000 zł. Firma sprzedaje wózki na rynku ze stopą zysku wynoszącą: 10% - dla wózków typu 1 oraz 15% - dla wózków typu 2. Ponadto wiadomo, że maksymalny czas pracy, jaki pracownicy firmy mogą poświęcić na przygotowanie i sprzedaż wózków wynosi 200 roboczogodzin/rok. Proces przygotowania sprzedaży wózka typu 1 wymaga 3h czasu pracy pracowników, zaś dla wózków typu 2 – 4h czasu pracy. Maksymalna dostępność liczby wózków obu typów u producenta przedstawia się następująco: wózki typu 1 – 50 szt., wózki typu 2 – 25 szt.

- Ustalić optymalny plan zakupu wózków obu typów, przyjmując jako kryterium decyzyjne zysk firmy.
- Sformułować model problemu decyzyjnego i rozwiązać go metodą geometryczną.