Ćwiczenia 1
Optymalizacja liniowa - metoda graficzna (przykłady)

Literatura:
Zbigniew Jędrzejczyk, Karol Kukuła (red.), Jerzy Skrzypek, Anna Walkosz. Badania Operacyjne w przykładach i zadaniach. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2004 (wydanie 7, 2019).

Przykład 1. (zad. 1 lista zadań)
Hurtownia położona w pewnym mieście jest zaopatrywana z dwóch magazynów. Magazyn M1 położony jest w bliskiej odległości od hurtowni 52 [km], zaś magazyn M2 (większy) położony jest w odległości 147 [km]. W magazynie M1 (przeznaczonym do szybkich, doraźnych dostaw) zgromadzono 18 [ton] towarów, zaś w magazynie M2 (przeznaczonym do większych dostaw) zgromadzono 300 [ton]. Samochody realizujące dostawy z magazynu M1 do hurtowni mają ładowność 6[t], zaś do obsługi dostaw z magazynu M2 przeznaczono samochody o ładowności 20[t]. Samochody jeżdżące z zaopatrzeniem z magazynu M2 są w stanie zrealizować tylko 2 kursy w ciągu dnia, zaś samochody zaopatrujące w towar z magazynu M1 tylko 5 kursów w ciągu dnia.

a) Oszacować koszty dostaw dla jednego kursu z magazynów do hurtowni przyjmując średnie spalanie samochodów o ładowności 6[t] na poziomie 10[l]/100[km], zaś dla samochodów cięższych o ładowności 20[t]na poziomie 21[l]/100[km] oraz przyjmując koszt paliwa na poziomie 3,9 [zł] za 1[l].
b) Wymagane jest, aby do hurtowni w ciągu dnia dostarczyć co najmniej 38[t] towarów. Obliczyć ile należy wykonać kursów z obu magazynów aby zrealizować zamówienie przy istniejących ograniczeniach przyjmując jako kryterium decyzyjne sumaryczne koszty dostaw z obu magazynów. Sformułować model problemu i rozwiązać zadanie metodą geometryczną.
c) Jak zmieni się rozwiązanie, gdy minimalne dostawy do hurtowni zostaną zwiększone o 20 [t] ?

<u>Ad a) Oszacowanie kosztów dostaw dla jednego kursu</u>

Dla magazynu M1: 52[km]*10[l]/100[km]*3,9[zł]/[l]=20,28[zł] (przyjmijmy: 20 [zł])

Dla magazynu M2: 147[km]*21[l]/100[km]*3,9[zł]/[l]=120,39[zł] (przyjmijmy: 120 [zł])

<u>Ad b) Model matematyczny problemu decyzyjnego:</u>

1. Określenie zmiennych decyzyjnych: (wielkości zmieniane, które w procesie podejmowania decyzji należy wyznaczyć)
   Wprowadzamy dwie zmienne decyzyjne:
   $x_1 \geq 0$ – liczba kursów samochodami 6[t] z magazynu M1 do hurtowni,
   $x_2 \geq 0$ – liczba kursów samochodami 20[t] z magazynu M2 do hurtowni.
2. Określenie kryterium decyzyjnego w sposób matematyczny (określenie tzw. funkcji celu). W tym wypadku kryterium, jakim będziemy się kierować podejmując optymalne decyzje będzie kryterium łącznych kosztów transportu z obu magazynów do hurtowni (zł).
   Funkcja celu:$F(x_1, x_2) = 20 * x_1 + 120 * x_2 \rightarrow min$

3. Określenie wszystkich warunków ograniczających (czyli ograniczeń branych pod uwagę w analizowanym problemie decyzyjnym oraz zapisanie ich łącznie jako układ kilku warunków w postaci równań lub nierówności), definiujących łącznie tzw. obszar poszukiwania rozwiązań dopuszczalnych.

$$\begin{cases} 6 * x_1 & \leq & 18 & [ton] & (1) \\ 20 * x_2 & \leq & 300 & [ton] & (2) \\ x_1 & \leq & 5 & [kursy] & (3) \\ x_2 & \leq & 2 & [kursy] & (4) \\ 6 * x_1 + 20 * x_2 & \geq & 38 & [ton] & (5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & & (6) \end{cases}$$

Ostateczny model matematyczny rozwiązywanego problemu decyzyjnego zapisany w postaci tzw. zadania programowania liniowego (zarówno funkcja celu jak i wszystkie warunki ograniczające są liniowe) jest postaci:

ZPL (Zadanie Programowania Liniowego)

$$F(x_1, x_2) = 20 * x_1 + 120 * x_2 \rightarrow min$$
$$\begin{cases} 6 * x_1 & \leq & 18 & (1) \\ 20 * x_2 & \leq & 300 & (2) \\ x_1 & \leq & 5 & (3) \\ x_2 & \leq & 2 & (4) \\ 6 * x_1 + 20 * x_2 & \geq & 38 & (5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & (6) \end{cases}$$

Zadanie to możemy sprowadzić do prostszej postaci równoważnej przekształcając funkcje celu oraz upraszczając postać warunków ograniczających:

$$F(x_1, x_2) = 20 * (x_1 + 6 * x_2) = 20 * Z(x_1, x_2) \rightarrow min$$
$$\begin{cases} x_1 & \leq & 3 & (1) \\ x_2 & \leq & 15 & (2) \\ x_1 & \leq & 5 & (3) \\ x_2 & \leq & 2 & (4) \\ 3 * x_1 + 10 * x_2 & \geq & 19 & (5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & (6) \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 20 * (x_1 + 6 * x_2) = 20 * Z(x_1, x_2) \rightarrow min$$
$$\begin{cases} x_1 & \leq & 3 & (1) \\ x_2 & \leq & 2 & (2) \\ 3 * x_1 + 10 * x_2 & \geq & 19 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & (4) \end{cases}$$

<u>Rozwiązanie analizowanego problemu decyzyjnego zapisanego w postaci zadania ZPL – metodą graficzną (przypadek tylko dla dwóch zmiennych decyzyjnych).</u>

Ilustracja graficzna obszaru rozwiązań dopuszczalnych

Aby znaleźć optymalne rozwiązania zadania ZPL należy zilustrować w układzie współrzędnych (X_1,X_2) obszar rozwiązań dopuszczalnych zadania.

Ilustracją graficzną dla warunków (1), (2) i (3) jest czworokąt o wierzchołkach ABCD (zob. rys. 1).

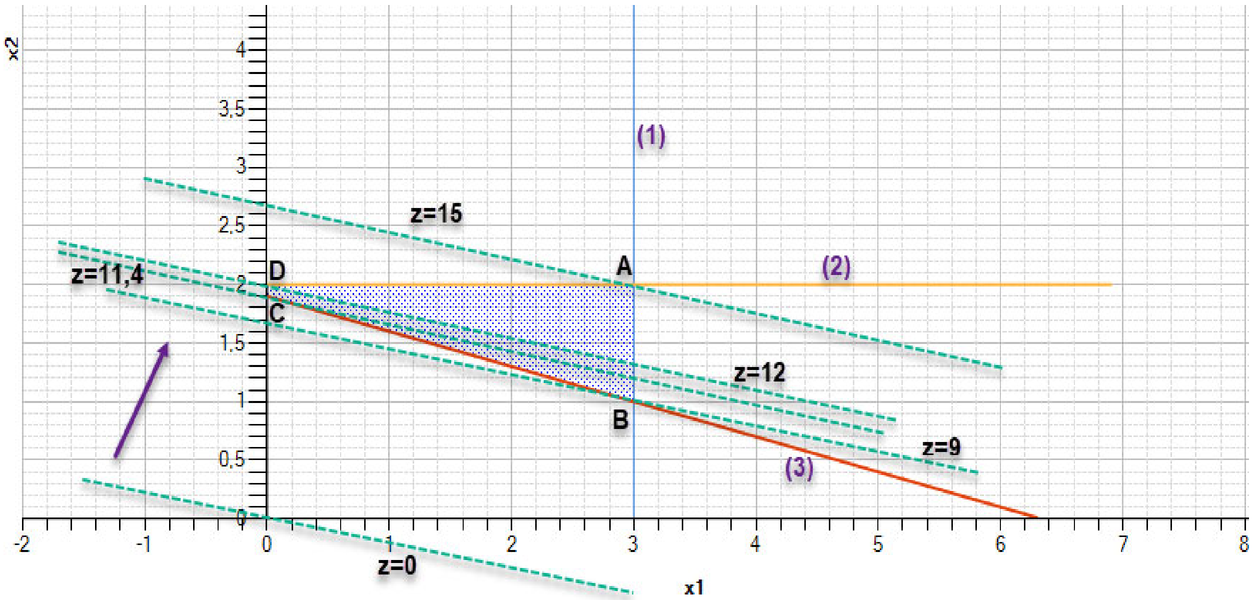
Współrzędne wierzchołków są następujące:

A(3,2) – punkt przecięcia krawędzi dla warunków (1) i (2).

B(3,1) – punkt przecięcia krawędzi warunków (1) i (3). Jeżeli x_1=3, to 3*3+10*x_2=19, zatem x_2=1.

C$\left(0,\frac{19}{10}\right)$ - punkt przecięcia krawędzi warunku (3) z osią X_2. Jeżeli x_1=0, to 3*0+10*x_2=19, zatem x_2=$\frac{19}{10}$.

D(0,2) – punkt przecięcia krawędzi warunku (2) z osią X_2.



Rys. 1. Ilustracja obszaru rozwiązań dopuszczalnych dla przykładu 1.

Jeżeli istnieje rozwiązanie optymalne tego zadania, to będziemy go poszukiwać w obszarze czworokąta ABCD.

Wartości dla warstwicy funkcji celu $z(x_1, x_2)$ w wierzchołkach obszaru rozwiązań dopuszczalnych wynoszą:

$$z(B) = z(3,1) = 3 + 6 * 1 = 9 \rightarrow min$$

$$z(C) = z\left(0, \frac{19}{10}\right) = 0 + 6 * \frac{19}{10} = \frac{114}{10} = 11,4$$

$z(D) = z(0{,}2) = 0 + 6 * 2 = 12$

$z(A) = z(3{,}2) = 3 + 6 * 2 = 15$

Rozwiązaniem optymalnym jest zatem rozwiązanie: $x_1^* = 3$; $x_2^* = 1$, zaś optymalna wartość funkcji celu jest równa $F^* = 20 * z^* = 20 * 9 = 180 \to min$.

Należy zatem wykonać 3 [kursy] z magazynu M1 oraz 1 [kurs] z magazynu M2. Wtedy optymalne (minimalne) łączne koszty dostaw wyniosą 180 [zł].

Ad c)

Jeżeli uwzględnimy warunek zwiększenia dostaw do hurtowni z poziomu 38 [ton] do poziomu 58 [ton] to ostateczny model problemu decyzyjnego będzie postaci

ZPL (Zadanie Programowania Liniowego)

$$F(x_1, x_2) = 20 * x_1 + 120 * x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 6 * x_1 & \leq & 18 & (1) \\ 20 * x_2 & \leq & 300 & (2) \\ x_1 & \leq & 5 & (3) \\ x_2 & \leq & 2 & (4) \\ 6 * x_1 + 20 * x_2 & \geq & 58 & (5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & (6) \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 20 * (x_1 + 6 * x_2) = 20 * Z(x_1, x_2) \to min$$

$$\begin{cases} x_1 & \leq & 3 & (1) \\ x_2 & \leq & 2 & (2) \\ 3 * x_1 + 10 * x_2 & \geq & 29 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & (4) \end{cases}$$

Obszar rozwiązań dopuszczalnych ograniczy się teraz tylko do punktu A(3,2). Zatem optymalne rozwiązanie będzie wynosić $x_1^* = 3$; $x_2^* = 2$, zaś optymalna wartość funkcji celu jest równa $F^* = 20 * z^* = 20 * 15 = 300 \to min$.

Należy zatem teraz wykonać 3 [kursy] z magazynu M1 oraz 2 [kursy] z magazynu M2. Wtedy optymalne (minimalne) łączne koszty dostaw wyniosą 300 [zł].

Przykład 2. (zad. 8 lista zadań)
Przedsiębiorstwo transportowe dysponuje ciężarówkami o ładowności 6t. Klient zlecił przedsiębiorstwu przewóz co najmniej 10 ładunków w opakowaniach (paletach) po 1,5 [t] oraz 15 ładunków w opakowaniach po 2,5 [t].

a) W jaki sposób należy załadować towar na wszystkie ciężarówki, aby zminimalizować łączną liczbę ciężarówek niezbędną do przewozu towarów ? Określić model matematyczny problemu decyzyjnego, zbudować model dualny i rozwiązać zadanie metodą geometryczną.
b) Ile wynosi łączna niewykorzystana ich ładowność ?

Ad a)
Możliwości załadunku:

Sposoby załadunku	I	II	III
Opakowania (palety) 2,5 [t]	2	1	0
Opakowania (palety) 1,5 [t]	0	2	4
Niewykorzystana ładowność [t]	1	0,5	0

Model matematyczny problemu decyzyjnego

Zmienne decyzyjne:

$x_1 \geq 0$ - liczba samochodów załadowanych sposobem I wysyłanych do odbiorców

$x_2 \geq 0$ - liczba samochodów załadowanych sposobem IIwysyłanych do odbiorców

$x_3 \geq 0$ - liczba samochodów załadowanych sposobem IIIwysyłanych do odbiorców

Funkcja celu:

$$F(x_1 x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow min$$

Warunki ograniczające:

$2 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 \geq 15$ (dostawa co najmniej 15 ładunków 2,5 [t]) **(W1)**

$0 * x_1 + 2 * x_2 + 4 * x_3 \geq 10$ (dostawa co najmniej 10 ładunków 1,5 [t]) **(W2)**

Zatem zadanie sprowadzi się do rozwiązania następującego zadania programowania liniowego ZPL:

$$F(x_1 x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 2 * x_1 + x_2 & \geq & 15 & (w1) \\ 2 * x_2 + 4 * x_3 & \geq & 10 & (w2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & & & (w3) \end{cases}$$

Po przekształceniach (uproszczeniu warunku w2) przyjmie ono postać:

$$F(x_1 x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 2 * x_1 + x_2 & \geq & 15 & (w1) \\ x_2 + 2 * x_3 & \geq & 5 & (w2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & & & (w3) \end{cases}$$

Rozpatrywane zadanie ZPL ma trzy zmienne więc nie możemy go rozwiązać metodą geometryczną. Ponieważ jednak ma ono tylko 2 warunki właściwe, to możemy zbudować zadanie dualne do niego, które będzie posiadało tylko 2 zmienne.

Ogólne zasady tworzenia zadania dualnego zostaną w całości omówione na wykładzie (zob. wykłady PDF).

Model problem dualny:

Dla naszego zadania zadanie dualne ZD ZPL będzie miało w zmienne (tyle ile warunków zadanie pierwotne ZP ZPL)

Wprowadzamy zatem zmienne decyzyjne:

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ - pierwsza zmienna odpowiada warunkowi (w1) ZP, zaś druga warunkowi (w2) ZP.

Wektor zmiennych decyzyjnych dla zadania dualnego ZD jest zatem postaci: $y = [y_1, y_2]$.

Funkcja celu dla zadania dualnego jest postaci:

$$G(y_1, y_2) = 15 * y_1 + 5 * y_2 \rightarrow max$$

Współczynniki ZD są prawymi ograniczeniami warunków ZP i dla zadania ZP na (min) zadanie ZD jest na (max).

Warunki ograniczające dla zadania dualnego ZD:

Liczba warunków jest taka jak liczba zmiennych zadania pierwotnego ZP.

Mamy zatem 3 warunki: (d1) – odpowiadający zmiennejx_1, (d2) – odpowiadający zmiennejx_2 oraz (d3) – odpowiadający zmiennej x_3.

Prawe ograniczenia tych warunków są współczynnikami funkcji celu ZP odpowiadających zmiennych. Po prawej stronie każdego warunku będzie zatem ograniczenie równe 1.

Ponieważ każda ze zmiennych ZP była nieujemna (≥ 0), to odpowiadający jej warunek w zadaniu dualnym jest typową nierównością (dla ZD z funkcja celu na max jest to $\leq$). Będziemy mieć zatem 3 warunki każdy postaci $\leq$.

Macierz współczynników (lewych stron) warunków zadania dualnego ZD jest transpozycją macierzy współczynników warunków dla zadania pierwotnego ZP.

Dla zadania ZP jest to macierz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, zatem dla zadania dualnego ZD będzie to macierz: $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Dlatego lewe strony warunków ograniczających wyznaczamy: $A^T * y^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Warunki brzegowe dla zmiennych decyzyjnych ZD zależą od postaci warunków ograniczających ZP im odpowiadających. Ponieważ oba warunki (w1) i (w2) ZP były typowymi nierównościami dla zadania na (min), to obie zmienne decyzyjne dla dualnego zadania będą nieujemne (≥ 0).

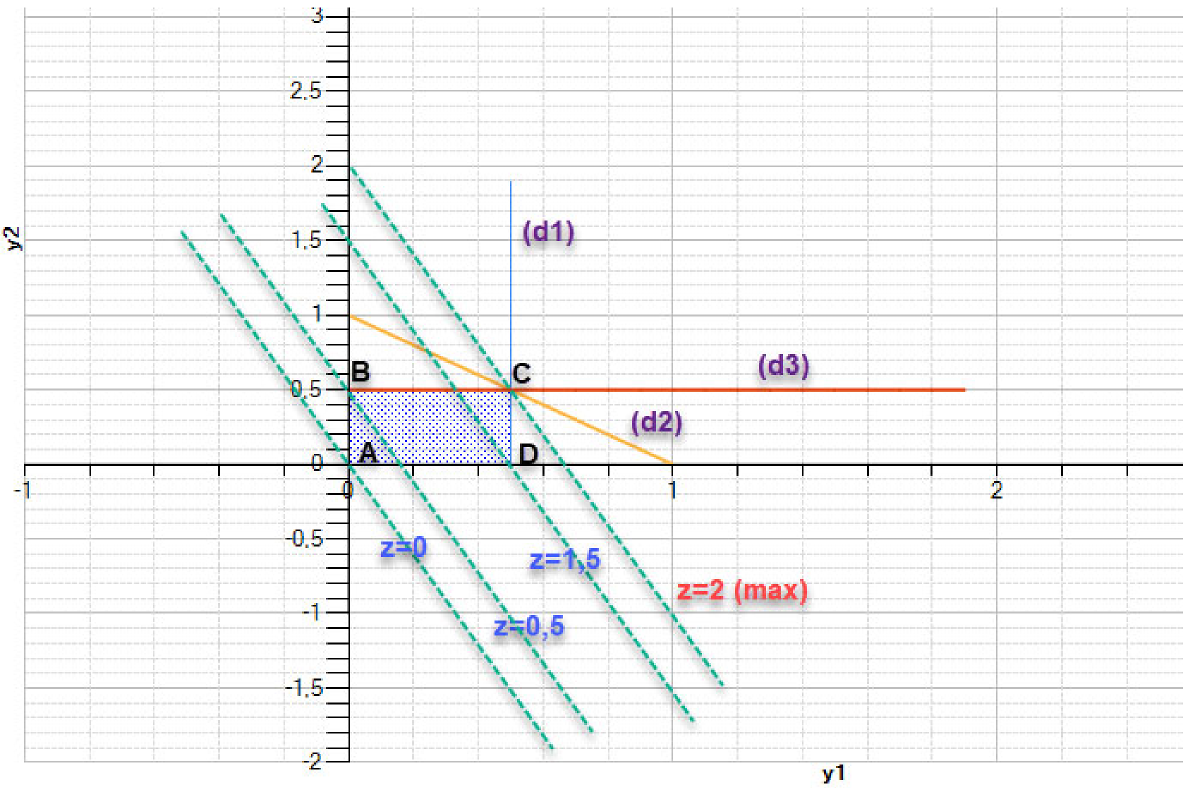
Ostatecznie warunki ograniczające dla zadania dualnego są zatem następujące:

$$\begin{cases} 2*y_1+0*y_2 & \leq & 1 & (d1) \\ 1*y_1+1*y_2 & \leq & 1 & (d2) \\ 0*y_1+2*y_2 & \leq & 1 & (d3) \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 & & & (d4) \end{cases}$$

Należy zatem rozwiązać graficznie zadanie dualne ZD ZPL postaci:

$$G(y_1, y_2) = 15*y_1+5*y_2 = 5*(3*y_1+1*y_2) = 5*z(y_1, y_2) \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2*y_1+0*y_2 & \leq & 1 & (d1) \\ 1*y_1+1*y_2 & \leq & 1 & (d2) \\ 0*y_1+2*y_2 & \leq & 1 & (d3) \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 & & & (d4) \end{cases}$$



Rys. 2. Ilustracja obszaru rozwiązań dopuszczalnych dla zadania dualnego ZD ZPL.

Obszarem rozwiązań dopuszczalnych zadania dualnego ZD jest czworokąt ABCD o wierzchołkach $A(0{,}0)$; $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; $D\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Wartości warstwicy funkcji celu dla zadania dualnego ZD:$z(y_1, y_2) = 3 * y_1 + 1 * y_2$ w kolejnych wierzchołkach obszaru rozwiązań dopuszczalnych są następujące **(rys. 2)**:

$z(A) = 0$

$z(B) = z\left(0, \frac{1}{2}\right) = 3 * 0 + \frac{1}{2} = 0{,}5$

$z(D) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 3 * \frac{1}{2} + 0 = 1{,}5$

$z(C) = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3 * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow max$

Zatem maksimum dla warstwicy funkcji celu jest osiągane dla wierzchołka C, więc rozwiązaniem optymalnym dla zadania ZD ZPL jest rozwiązanie: $y_1^* = 0{,}5; y_2^* = 0{,}5,$ a optymalna wartość funkcji celu $z^*(max) = 2.$

Wyznaczenie optymalnego równoważnego rozwiązania optymalnego dla zadania pierwotnego

Korzystając z wzajemnych relacji obu optymalnych rozwiązań (zob. wykłady PDF) sprawdzamy jakie są relacje pomiędzy wartościami dla lewych stron warunków ograniczających zadania dualnego oraz prawymi ich ograniczeniami dla optymalnych rozwiązań zadania dualnego.

$$\begin{aligned} L = 2 * 0{,}5 + 0 * 0{,}5 \quad &= \quad 1 = P \quad (d1) \\ L = 1 * 0{,}5 + 1 * 0{,}5 \quad &= \quad 1 = P \quad (d2) \\ L = 0 * 0{,}5 + 2 * 0{,}5 \quad &= \quad 1 = P \quad (d3) \end{aligned}$$

Ponieważ żaden z warunków ograniczających ZD nie jest spełniony w postaci ostrej nierówności (to w rozwiązaniu optymalnym zadania pierwotnego nie mamy zmiennych decyzyjnych równych zero – tzw. rozwiązanie optymalne zdegenerowane). Natomiast dla każdego z tych warunków zachodzi równość pomiędzy lewą i prawą stroną. Mamy zatem w tym wypadku tzw. rozwiązanie niejednoznaczne dla zadania pierwotnego ze zmiennymi decyzyjnymi dodatnimi ($x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$).

Możemy go określić następująco:

np. z warunku (w2): $x_2 + 2 * x_3 = 5$ wyznaczamy $x_2 = 5 - 2 * x_3 > 0$ $(*)$ w zależności od x_3.

Wstawiamy za x_2 do warunku (w1) otrzymujemy: $2 * x_1 + 5 - 2 * x_3 = 15.$ Skąd wyznaczamy zależność dla: $x_1 = 5 + x_3$ (**).

Możliwe rozwiązania optymalne dla zadania pierwotnego ZP ZPL są zatem następujące:

Jest to każde rozwiązanie ($x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$) spełniające łącznie zależności: (*), (**) oraz (***)

$x_1 = 5 + x_3 > 0$ (**)

$x_2 = 5 - 2 * x_3 > 0$ (*)

$x_3 \geq 0$ (***)

Nas interesują tylko rozwiązania dla wartości zmiennych całkowitych (liczba samochodów wykorzystywanych w dostawach). Zatem są to (3) rozwiązania:

(1) $x_3^* = 0; x_2^* = 5 - 2 * 0 = 5;\ x_1^* = 5 + 0 = 5.$
Optymalna (minimalna) wartość funkcji celu $F^*(5{,}5{,}0) = 5 + 5 + 0 = 10$

(2) $x_3^* = 1; x_2^* = 5 - 2 * 1 = 3;\ x_1^* = 5 + 1 = 6.$
Optymalna (minimalna) wartość funkcji celu$F^*(6{,}3{,}1) = 6 + 3 + 1 = 10$

(3) $x_3^* = 2; x_2^* = 5 - 2 * 2 = 1;\ x_1^* = 5 + 2 = 7.$
Optymalna (minimalna) wartość funkcji celu $F^*(7{,}1{,}2) = 7 + 1 + 2 = 10$

Zauważmy że dla każdego rozwiązania optymalnego mamy spełnione twierdzenie von Neumana o równości obu rozwiązań ZD i ZP ZPL:

$F^*(\text{min}) = 10 = G^*(\text{max}) = 5 * z^* = 5 * 2 = 10.$

Ad (b)

Łączna niewykorzystana ładowność wszystkich samochodów zastosowanych w procesie transportowym wynosi dla każdego rozwiązania optymalnego:

(1) 1*5+0,5*5+0*0=7,5 [tony]
(2) 1*6+0,5*3+0*1=7,5 [tony]
(3) 1*7+0,5*1+0*2=7,5 [tony]

Przykład 3. (zad. 4 lista zadań)
Dystrybutor wózków podnośnikowych sprzedaje na polskim rynku 2 typy wózków. Na zakupu producenta wózków widłowych firma może przeznaczyć maksymalnie 800000 zł/rok. Cena jednostkowa zakupu wózków typu 1 wynosi - 10000 zł, zaś wózków typu 2 – 20000 zł. Firma sprzedaje wózki na rynku ze stopą zysku wynoszącą: 10% - dla wózków typu 1 oraz 15% - dla wózków typu 2. Ponadto wiadomo, że maksymalny czas pracy, jaki pracownicy firmy mogą poświęcić na przygotowanie i sprzedaż wózków wynosi 200 roboczogodzin/rok. Proces przygotowania sprzedaży wózków typu 1 wymaga 3h czasu pracy pracowników, zaś dla wózków typu 2 – 4h czasu pracy. Maksymalna dostępność liczby wózków obu typów u producenta przedstawia się następująco: wózki typu 1 – 50 szt., wózki typu 2 – 25 szt.

a) Ustalić optymalny plan zakupu wózków obu typów, przyjmując jako kryterium decyzyjne zysk (przychody ze sprzedaży) firmy. Sformułować model problemu decyzyjnego
b) rozwiązać zadanie metodą geometryczną.

Rozwiązanie:

Ad a)

Model matematyczny problemu decyzyjnego

1. Zmienne decyzyjne:

$x_1 \geq 0$ – liczba wózków 1 typu zakupionych i sprzedanych odbiorcom

$x_2 \geq 0$ – liczba wózków 2 typu zakupionych i sprzedanych odbiorcom

2. Funkcja celu (kryterium decyzyjne) – przychody ze sprzedaży firmy

$$F(x_1, x_2) = 0{,}10 * 10000 * x_1 + 0{,}15 * 20000 * x_2 = 1000 * x_1 + 3000 * x_2 \to max$$

3. Warunki ograniczające:

$10000 * x_1 + 20000 * x_2 \leq 800000$ [zł] (w1) – nieprzekroczenie zasobów budżetowych (finansowych)

$3 * x_1 + 4 * x_2 \leq 200$ [roboczogodzin] (w2) – nieprzekroczenie zasobów czasu pracy pracowników przy sprzedaży wózków

$x_1 \leq 50$ - maksymalna dostępność wózków 1-typu u producenta (w3)

$x_2 \leq 25$ - maksymalna dostępność wózków 2-typu u producenta (W4)

Ostateczny model zapisany za pomocą zadania programowania liniowego ZPL jest postaci:

$$F(x_1, x_2) = 1000 * x_1 + 3000 * x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 10000 * x_1 + 20000 * x_2 & \leq & 800000 & (w1) \\ 3 * x_1 + 4 * x_2 & \leq & 200 & (w2) \\ x_1 & \leq & 50 & (w3) \\ x_2 & \leq & 25 & (w4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & (w5) \end{cases}$$

Po uproszczeniu zadanie ZPL przyjmie postać:

$$F(x_1, x_2) = 1000 * (x_1 + 3 * x_2) = 1000 * z(x_1, x_2) \to max$$

$$\begin{cases} 1 * x_1 + 2 * x_2 & \leq & 80 & (w1) \\ 3 * x_1 + 4 * x_2 & \leq & 200 & (w2) \\ x_1 & \leq & 50 & (w3) \\ x_2 & \leq & 25 & (w4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & (w5) \end{cases}$$

Ad b) Rozwiązanie metodą geometryczną:

Obszar rozwiązań dopuszczalnych – jest to sześciokąt ABCDEF o wierzchołkach:

$A(0,0)$ - początek układu współrzędnych

$B(0,25)$ – przecięcie krawędzi warunku (w4) z osią X_2

$C(30,25)$ - przecięcie krawędzi warunku (w1) i (w4).

Wstawiając do równania: $1 * x_1 + 2 * x_2 = 80$ za $x_2 = 25$

otrzymujemy: $x_1 = 80 - 2 * 25 = 30$

$D(40,20)$ - przecięcie krawędzi warunku (w1) i (w2).

Wyznaczamy z równania dla krawędzi (w1) $x_1 = 80 - 2 * x_2$.

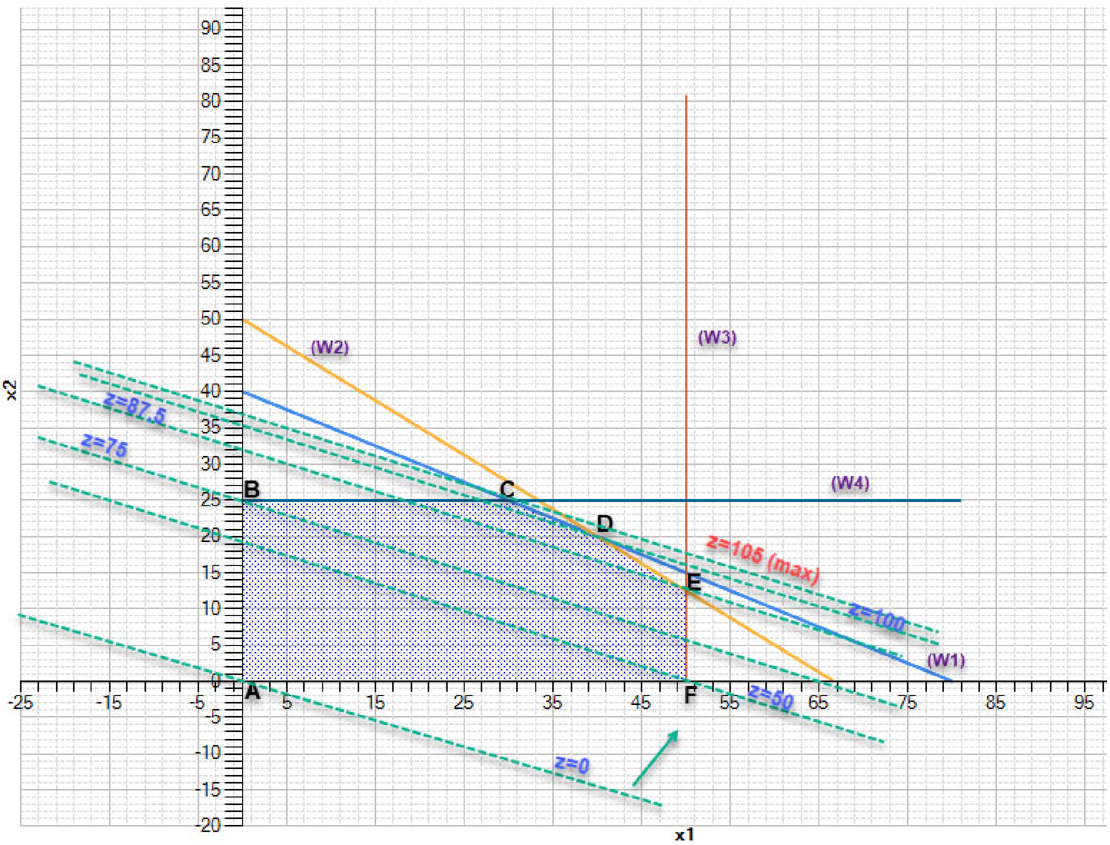
Wstawiając do równania dla krawędzi (w2) za x_1 otrzymujemy:

$3 * (80 - 2 * x_2) + 4 * x_2 = 200$, a zatem po uporządkowaniu (przekształceniu) równania otrzymujemy: $2 * x_2 = 40$. Stąd wyznaczamy: $x_2 = 20$, a następnie $x_1 = 80 - 2 * 20 = 40$

$E(50,12.5)$ – przecięcie krawędzi warunku (w2) i (w3).

Wstawiając do równania krawędzi warunku (w2) $3 * x_1 + 4 * x_2 = 200$ za $x_1 = 50$ otrzymujemy: $3 * 50 + 4 * x_2 = 200$, czyli: $4 * x_2 = 50$, a więc $x_2 = 12{,}5$

$F(50,0)$ - przecięcie krawędzi warunku (w3) z osią X_1.



Rys. 3. Ilustracja obszaru rozwiązań dopuszczalnych dla zadania ZPL

Wartości warstwicy funkcji celu: $z(x_1, x_2) = x_1 + 3 * x_2$ przechodzącej przez kolejne wierzchołki obszaru rozwiązań dopuszczalnych wynosi:

$z(A) = z(0,0) = 0$

$z(F) = z(50,0) = 50 + 3 * 0 = 50$

$z(B) = z(0,25) = 0 + 3 * 25 = 75$

$z(E) = z(50,12.5) = 50 + 3 * 12,5 = 87,5$

$z(D) = z(40,20) = 40 + 3 * 20 = 100$

$z(C) = z(30,25) = 30 + 3 * 25 = 105 \rightarrow max$

Zatem rozwiązaniem optymalnym (max) jest rozwiązanie: $x_1^* = 30; x_2^* = 25,$ zaś optymalna (maksymalna) wartość funkcji celu jest równa $F^* = 1000 * z^* = 1000 * 105 = 105\ 000$ [zł]

Należy zatem zakupić 30 wózków 1-go typu oraz 25 wózków 2-go typu i wtedy łączny zysk (przychody ze sprzedaży) będą maksymalne równe: 105 000 zł.