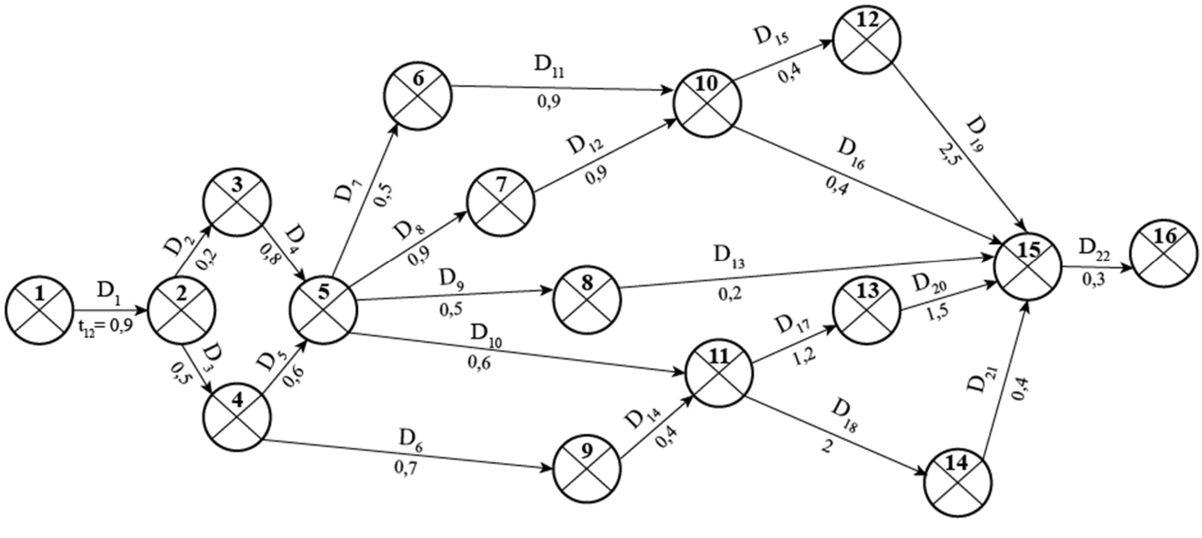
Wybrane metody planowania sieciowego – metoda CPM

Literatura: Badania operacyjne w przykładach i zadaniach (K. Kukuła red.) – rozdział 5.2, str. 182

Przykład. 1. Na rysunku (rys.1) przedstawiono sieć realizacji pewnego przedsięwzięcia (procesu logistycznego) składającego się z 22 czynności: $D_1, D_2, \dots, D_{22}$. Czynności w tym przedsięwzięciu są modelowane w sieci czynności łukami (i, j) – strzałki na modelu sieciowym. Każda czynność jest zatem reprezentowana jako łuk rozpoczynający się w zdarzeniu „i” i kończący się w zdarzeniu „j” tego przedsięwzięcia. Na łukach w modelu sieciowym zilustrowano czasy $t_{ij} \geq 0$ trwania poszczególnych czynności [w godzinach], np. dla czynności (1,2) $t_{12} = 0{,}9\ godziny$. Zdarzenie oznaczone „i=1” w którym zaczyna się realizacja całego procesu jest nazywane zdarzeniem początkowym sieci czynności, zaś zdarzenie „i=16”, w którym kończy się realizacja wszystkich czynności nazywane jest zdarzeniem końcowym procesu (przedsięwzięcia).



Rys. 1. Sieć czynności przykładowego procesu (przedsięwzięcia) logistycznego

Każde zdarzenie ilustruje jakiś stan realizacji tego procesu (przedsięwzięcia). Np. w zdarzeniu „i=5” możemy znaleźć się w realizacji przedsięwzięcia, gdy zostanie zakończona czynność D_1 oraz wszystkie czynności na dwóch ścieżkach równoległych ($D_2 - D_4$ oraz $D_3 - D_5$).
Oznaczmy przez:
$V = \{1,2, \dots, n = 16\}$ – zbiór wszystkich zdarzeń w tym przedsięwzięciu.
$U = \{(i, j): i, j \in V\ oraz\ istnieje\ łuk\ łączacy\ \text{"i" z "j"}\} = \{(1,2) = D_1, D_2 = (2,3), \dots, (15,16) = D_{22}\}$ – zbiór czynności
t_{ij} – czas trwania czynności (i, j) [w h].

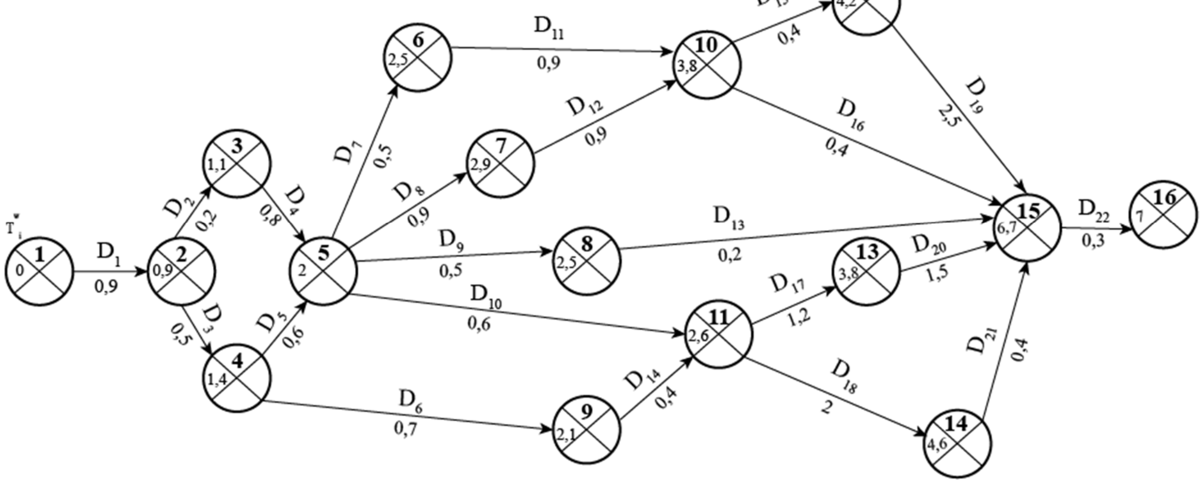
Dla przedsięwzięcia modelowanego taką deterministyczną siecią czynności (znane deterministyczne wzajemne powiązania pomiędzy poszczególnymi czynnościami, znana kolejność następstwa w czasie tych czynności i zdarzeń) stosując metodę ścieżki krytycznej (CPM – Critical Path Method) wyznaczyć:

a) Najwcześniejsze możliwe terminy realizacji dla zdarzeń tego przedsięwzięcia: T_i^w oraz najwcześniejszy możliwy termin dla zakończenia całego przedsięwzięcia (najwcześniejszy możliwy termin realizacji zdarzenia końcowego i=16).
b) Najpóźniejsze dopuszczalne terminy realizacji dla zdarzeń w tym przedsięwzięciu: T_i^p.
c) Zapasy czasu dla zdarzeń (tzw. luzy czasowe dla zdarzeń): $z(i) = T_i^p - T_i^w$ – o jakie możemy opóźnić realizację poszczególnych zdarzeń w tym przedsięwzięciu, bez niekorzystnych konsekwencji dla przekroczenia (niedotrzymania) terminu realizacji dla całego przedsięwzięcia.
d) Zapasy czasu całkowitego dla czynności w tym przedsięwzięciu: $Z_c(i, j)$ oraz podać ścieżkę krytyczną (bądź ścieżki krytyczne, gdy istnieje więcej) dla tego przedsięwzięcia.
e) Zapasy czasu swobodnego: $Z_s(i, j)$, niezależnego: $Z_n(i, j)$ oraz warunkowego: $Z_w(i, j)$ dla czynności tego przedsięwzięcia.
f) Odpowiedzieć na pytania:
   - jak wpłynie na termin realizacji przedsięwzięcia wydłużenie czasu trwania czynności D_{12} (7,10) o 0,5 [h] ?
   - jak wpłynie na termin realizacji przedsięwzięcia skrócenie czynności D_{19} (12,15) o 1,7 [h] ?

Rozwiązanie:
Ad. a)
Najwcześniejsze możliwe terminy realizacji dla zdarzeń tego przedsięwzięcia obliczamy następująco:
- Dla zdarzenia początkowego ustalamy termin ten równy zero (początek osi czasu): $T_1^w = 0$.
- Następnie dla kolejnych zdarzeń i=2,3,…,n=16 określamy tzw. zbiór zdarzeń „k" poprzedzających zdarzenie „i" $P_i = \{k: (k,i) \in U\}$, czyli takich zdarzeń dla których istnieje łuk zaczynający się w tym zdarzeniu „k" i kończący się w zdarzeniu „i" (istnieje czynność rozpoczynająca się w „k" i kończąca się w „i").
- Najwcześniejsze możliwe terminy realizacji dla kolejnych zdarzeń wyznaczamy stosując wzór rekurencyjny: $T_i^w = \max\limits_{k \in P_i}\{T_k^w + t_{ki}\}, i = 2,3, \dots n = 16.$

Obliczenia:
i=2, $P_2 = \{1\}, T_2^w = \max\limits_{k\in\{1\}}\{T_1^w + t_{12}\} = \max\{0 + 0{,}9\} = 0{,}9;$
i=3, $P_3 = \{2\}, T_3^w = \max\limits_{k\in\{2\}}\{T_2^w + t_{23}\} = \max\{0{,}9 + 0{,}2\} = 1{,}1;$
i=4, $P_4 = \{2\}, T_4^w = \max\limits_{k\in\{2\}}\{T_2^w + t_{24}\} = \max\{0{,}9 + 0{,}5\} = 1{,}4;$
i=5, $P_3 = \{3{,}4\}, T_5^w = \max\limits_{k\in\{3,4\}}\{T_3^w + t_{35}; T_4^w + t_{45}\} = \max\{1{,}1 + 0{,}8; 1{,}4 + 0{,}6\} = 2;$
i=6, $P_6 = \{5\}, T_6^w = \max\limits_{k\in\{5\}}\{T_5^w + t_{56}\} = \max\{2 + 0{,}5\} = 2{,}5;$
i=7, $P_7 = \{5\}, T_7^w = \max\limits_{k\in\{5\}}\{T_5^w + t_{57}\} = \max\{2 + 0{,}9\} = 2{,}9;$
i=8, $P_8 = \{5\}, T_8^w = \max\limits_{k\in\{5\}}\{T_5^w + t_{58}\} = \max\{2 + 0{,}5\} = 2{,}5;$
i=9, $P_9 = \{4\}, T_9^w = \max\limits_{k\in\{4\}}\{T_4^w + t_{49}\} = \max\{1{,}4 + 0{,}7\} = 2{,}1;$
i=10, $P_{10} = \{6{,}7\}, T_{10}^w = \max\limits_{k\in\{6,7\}}\{T_6^w + t_{6\,10}; T_7^w + t_{7\,10}\} = \max\{2{,}5 + 0{,}9; 2{,}9 + 0{,}9\} = 3{,}8;$
i=11, $P_{11} = \{5{,}9\}, T_5^w = \max\limits_{k\in\{5,9\}}\{T_{11}^w + t_{5\,11}; T_9^w + t_{9\,11}\} = \max\{2 + 0{,}6; 2{,}1 + 0{,}4\} = 2{,}6;$
i=12, $P_{12} = \{10\}, T_{12}^w = \max\limits_{k\in\{10\}}\{T_{10}^w + t_{10\,12}\} = \max\{3{,}8 + 0{,}4\} = 4{,}2;$
i=13, $P_{13} = \{11\}, T_{13}^w = \max\limits_{k\in\{11\}}\{T_{11}^w + t_{11\,13}\} = \max\{2{,}6 + 1{,}2\} = 3{,}8;$
i=14, $P_{14} = \{11\}, T_{14}^w = \max\limits_{k\in\{11\}}\{T_{11}^w + t_{11\,14}\} = \max\{2{,}6 + 2\} = 4{,}6;$
i=15, $P_{15} = \{8{,}10{,}12{,}13{,}14\}, T_{15}^w = \max\limits_{k\in\{8,10,12,13,14\}}\{T_8^w + t_{8\,15}; T_{10}^w + t_{10\,15}; T_{12}^w + t_{12\,15}; T_{13}^w + t_{13\,15}; T_{14}^w +$
$t_{14\,15}\} = \max\{2{,}5 + 0{,}2; 3{,}8 + 0{,}4; 4{,}2 + 2{,}5; 3{,}8 + 1{,}5; 4{,}6 + 0{,}4\} = 6{,}7;$
i=16, $P_{16} = \{15\}, T_{16}^w = \max\limits_{k\in\{15\}}\{T_{15}^w + t_{15\,16}\} = \max\{6{,}7 + 0{,}3\} = 7.$

Rysunek (rys. 2) przedstawia model sieciowy przedsięwzięcia z wyznaczonymi czasami dla najwcześniejszych terminów realizacji dla zdarzeń tego procesu.



Rys. 2. Model sieciowy z obliczonymi czasami T_i^w dla najwcześniejszych czasów realizacji dla zdarzeń.

Interpretacja praktyczna np. dla czasu $T_{10}^w = 3{,}8\ [h]$ oznacza, że w zdarzeniu i=10 przedsięwzięcia możemy znaleźć się w jego realizacji nie wcześniej niż po czasie 3,8 [h], gdy zakończy się najdłuższa z 4 ścieżek równoległych do niego prowadzących: 1-2-3-5-6-10 lub 1-2-3-5-7-10 lub 1-2-4-5-6-10 oraz 1-2-3-5-7-10, a jest to ścieżka: 1-2-4-5-7-10 (czas trwania jej czynności: 0,9+0,5+0,6+0,9+0,9=3,8 h).
Zatem całe nasze przedsięwzięcie może zakończyć się najwcześniej dopiero po czasie nie krótszym niż 7 [godzin].

Ad. b)
Najpóźniejsze dopuszczalne terminy realizacji dla zdarzeń tego przedsięwzięcia obliczamy następująco:
- Dla zdarzenia końcowego ustalamy termin ten równy terminowi najwcześniejszemu możliwemu (nie możemy mieć poślizgu w zakończeniu całego przedsięwzięcia – najpóźniej i najwcześniej musi skończyć się w tym samym terminie): $T_{n=16}^{p} = T_{n=16}^{w} = 7$.
- Następnie dla kolejnych zdarzeń i=n-1=15,14,…,1 określamy tzw. zbiór zdarzeń „k” następujących po zdarzeniu „i” $N_i = \{k: (i,k) \in U\}$, czyli takich zdarzeń dla których istnieje łuk zaczynający się w tym zdarzeniu „i” oraz kończący się w zdarzeniu „k” (istnieje czynność rozpoczynająca się w „i” i kończąca się w następującym „k”).
- Najpóźniejsze dopuszczalne terminy realizacji dla kolejnych zdarzeń wyznaczamy stosując wzór rekurencyjny: $T_i^p = \min_{k \in N_i}\{T_k^p - t_{ik}\}, i = (n-1) = 15,14, \dots 1$.
Obliczenia:
i=15, $N_{15} = \{16\}, T_{15}^p = \min_{k\in\{16\}}\{T_{16}^p - t_{15\,16}\} = \min\{7 - 0{,}3\} = 6{,}7;$
i=14, $N_{14} = \{15\}, T_{14}^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{14\,15}\} = \min\{6{,}7 - 0{,}4\} = 6{,}3;$
i=13, $N_{13} = \{15\}, T_{13}^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{13\,15}\} = \min\{6{,}7 - 1{,}5\} = 5{,}2;$
i=12, $N_{12} = \{15\}, T_{12}^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{12\,15}\} = \min\{6{,}7 - 2{,}5\} = 4{,}2;$
i=11, $N_{11} = \{13{,}14\}, T_{11}^p = \min_{k\in\{13,14\}}\{T_{13}^p - t_{11\,13}; T_{14}^p - t_{11\,14}\} = \min\{5{,}2 - 1{,}2; 6{,}3 - 2\} = 4;$
i=10, $N_{10} = \{12{,}15\}, T_{10}^p = \min_{k\in\{12,15\}}\{T_{12}^p - t_{10\,12}; T_{15}^p - t_{10\,15}\} = \min\{4{,}2 - 0{,}4; 6{,}7 - 0{,}4\} = 3{,}8;$
i=9, $N_9 = \{11\}, T_9^p = \min_{k\in\{11\}}\{T_{11}^p - t_{9\,11}\} = \min\{4 - 0{,}4\} = 3{,}6;$
i=8, $N_8 = \{15\}, T_8^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{8\,15}\} = \min\{6{,}7 - 0{,}2\} = 6{,}5;$
i=7, $N_7 = \{10\}, T_7^p = \min_{k\in\{10\}}\{T_{10}^p - t_{7\,10}\} = \min\{3{,}8 - 0{,}9\} = 2{,}9;$
i=6, $N_6 = \{10\}, T_6^p = \min_{k\in\{10\}}\{T_{10}^p - t_{6\,10}\} = \min\{3{,}8 - 0{,}9\} = 2{,}9;$
i=5, $N_5 = \{6{,}7{,}8{,}11\}, T_5^p = \min_{k\in\{6,7,8,11\}}\{T_6^p - t_{5\,6}; T_7^p - t_{5\,7}; T_8^p - t_{5\,8}; T_{11}^p - t_{5\,11}\} = \min\{2{,}9 - 0{,}5; 2{,}9 - 0{,}9; 6{,}5 - 0{,}5; 4 - 0{,}6\} = 2;$

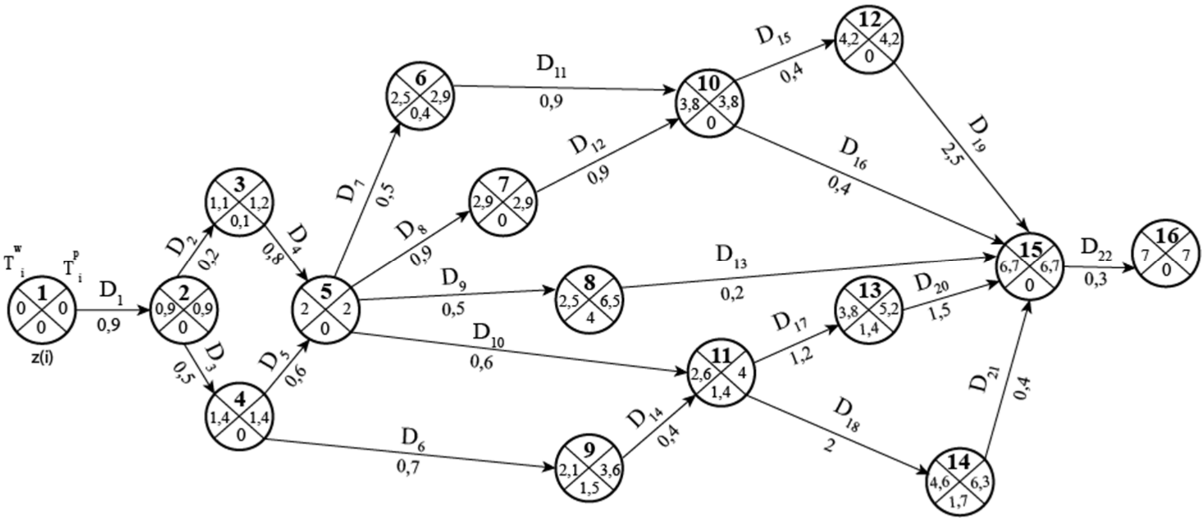
i=4, $N_4 = \{5{,}9\}, T_4^p = \min_{k\in\{5,9\}}\{T_5^p - t_{4\,5}; T_9^p - t_{4\,9}\} = \min\{2 - 0{,}6; 3{,}6 - 0{,}7\} = 1{,}4;$
i=3, $N_3 = \{5\}, T_3^p = \min_{k\in\{5\}}\{T_5^p - t_{3\,5}\} = \min\{2 - 0{,}8\} = 1{,}2;$
i=2, $N_2 = \{3{,}4\}, T_2^p = \min_{k\in\{3,4\}}\{T_3^p - t_{2\,3}; T_4^p - t_{2\,4}\} = \min\{1{,}2 - 0{,}2; 1{,}4 - 0{,}5\} = 0{,}9;$
i=1, $N_1 = \{2\}, T_1^p = \min_{k\in\{2\}}\{T_2^p - t_{1\,2}\} = \min\{0{,}9 - 0{,}9\} = 0;$

Ad. c)
Zapasy czasu dla czynności obliczymy wyznaczając luzy czasowe ze wzoru $z(i) = T_i^p - T_i^w$.

i	$z(i) = T_i^p - T_i^w$
1	Z(1)=0-0=0
2	Z(2)=0,9-0,9=0
3	Z(3)=1,2-1,1=0,1
4	Z(4)=1,4-1,4=0
5	Z(5)=2-2=0
6	Z(6)=2,9-2,5=0,4
7	Z(7)=2,9-2,9=0
8	Z(8)=6,5-2,5=4
9	Z(9)=3,6-2,1=1,5
10	Z(10)=3,8-3,8=0
11	Z(11)=4-2,6=1,4
12	Z(12)=4,2-4,2=0
13	Z(13)=5,2-3,8=1,4
14	Z(14)=6,3-4,6=1,7
15	Z(15)=6,7-6,7=0
16	Z(16)=7-7=0

Zauważmy, że największy luz czasowy ma zdarzenie i=8. Możemy pojawić się w nim w realizacji przedsięwzięcia po czasie najwcześniej 2,5 [h] ale możemy opóźnić (wydłużyć) ten termin nawet do 6,5 [h] (o luz zapas 4 [h]), a i tak nie wpłynie to na zwiększenie czasu realizacji przedsięwzięcia wynoszącego 7 [h].

Rysunek (rys. 3) przedstawia model sieciowy przedsięwzięcia z wyznaczonymi czasami dla najwcześniejszych oraz najpóźniejszych terminów realizacji dla zdarzeń tego procesu a także luzy czasowe dla zdarzeń.



Rys. 3. Model sieciowy z obliczonymi czasami: T_i^w dla najwcześniejszych czasów realizacji dla zdarzeń, terminów najpóźniejszych dopuszczalnych: T_i^p oraz z luzami czasowymi: $z(i)$.

Ad. d)

Zapasy czasu całkowitego (maksymalnego) dla poszczególnych czynności wyznaczamy ze wzoru:

$$Z_c(i,j) = T_j^p - T_i^w - t_{ij}$$

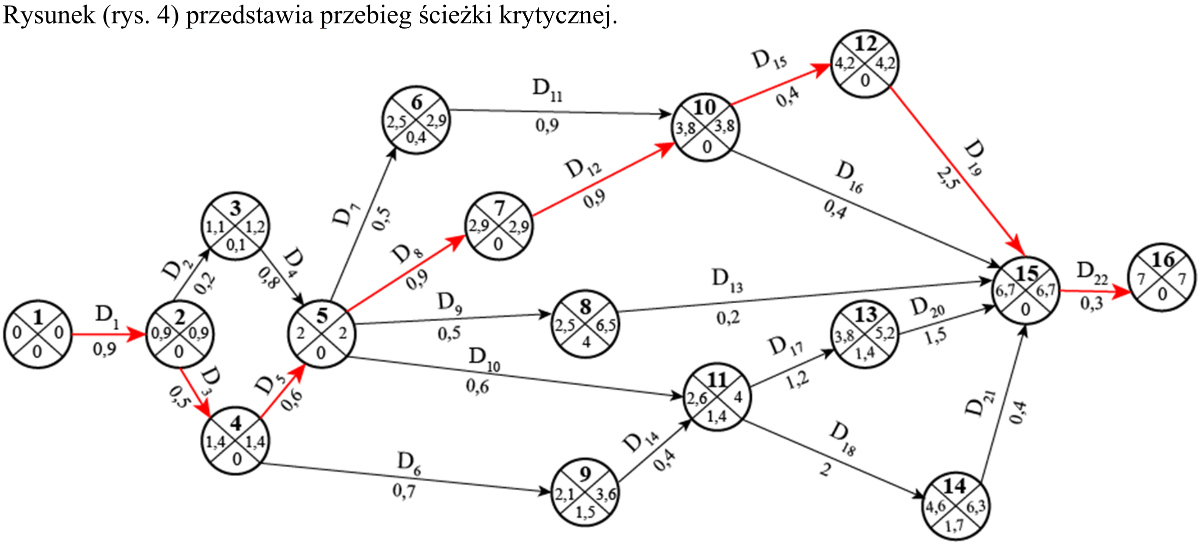
Zatem zapasy czasu całkowitego dla poszczególnych czynności wynoszą:

Czynność (i,j)	Zapas całkowity $Z_c(i,j) =$	Czy czynność krytyczna
$D_1 = (1,2)$	$Z_c(1,2) = 0,9 - 0 - 0,9 = 0$	Tak
$D_2 = (2,3)$	$Z_c(2,3) = 1,2 - 0,9 - 0,2 = 0,1$	Nie
$D_3 = (2,4)$	$Z_c(2,4) = 1,4 - 0,9 - 0,5 = 0$	Tak
$D_4 = (3,5)$	$Z_c(3,5) = 2 - 1,1 - 0,8 = 0,1$	Nie
$D_5 = (4,5)$	$Z_c(4,5) = 2 - 1,4 - 0,6 = 0$	Tak
$D_6 = (4,9)$	$Z_c(4,9) = 3,6 - 1,4 - 0,7 = 1,5$	Nie
$D_7 = (5,6)$	$Z_c(5,6) = 2,9 - 2 - 0,5 = 0,4$	Nie
$D_8 = (5,7)$	$Z_c(5,7) = 2,9 - 2 - 0,9 = 0$	Tak
$D_9 = (5,8)$	$Z_c(5,8) = 6,5 - 2 - 0,5 = 4$	Nie
$D_{10} = (5,11)$	$Z_c(5,11) = 4 - 2 - 0,6 = 1,4$	Nie
$D_{11} = (6,10)$	$Z_c(6,10) = 3,8 - 2,5 - 0,9 = 0,4$	Nie
$D_{12} = (7,10)$	$Z_c(7,10) = 3,8 - 2,9 - 0,9 = 0$	Tak
$D_{13} = (8,15)$	$Z_c(8,15) = 6,7 - 2,5 - 0,2 = 4$	Nie
$D_{14} = (9,11)$	$Z_c(9,11) = 4 - 2,1 - 0,4 = 1,5$	Nie
$D_{15} = (10,12)$	$Z_c(10,12) = 4,2 - 3,8 - 0,4 = 0$	Tak
$D_{16} = (10,15)$	$Z_c(10,15) = 6,7 - 3,8 - 0,4 = 2,5$	Nie
$D_{17} = (11,13)$	$Z_c(11,13) = 5,2 - 2,6 - 1,2 = 1,4$	Nie
$D_{18} = (11,14)$	$Z_c(11,14) = 6,3 - 2,6 - 2 = 1,7$	Nie
$D_{19} = (12,15)$	$Z_c(12,15) = 6,7 - 4,2 - 2,5 = 0$	Tak
$D_{20} = (13,15)$	$Z_c(13,15) = 6,7 - 3,8 - 1,5 = 1,4$	Nie
$D_{21} = (14,15)$	$Z_c(14,15) = 6,7 - 4,6 - 0,4 = 1,7$	Nie
$D_{22} = (15,16)$	$Z_c(15,16) = 7 - 6,7 - 0,3 = 0$	Tak

Uwaga: (twierdzenie)
Czynność leży na ścieżce krytycznej (maksymalnej) wtedy i tylko wtedy, gdy zapas całkowity jest równy zero.

Zatem ścieżka krytyczna przechodzi przez zdarzenia: 1-2-4-5-7-10-12-15-16, lub co na jedno wychodzi przez czynności: $D_1 - D_3 - D_5 - D_8 - D_{12} - D_{15} - D_{19} - D_{22}$.
Suma czasów przejścia przez tą ścieżkę jest równa dla terminu zakończenia przedsięwzięcia 7 [h]

Rysunek (rys. 4) przedstawia przebieg ścieżki krytycznej.



Rys. 4. Pełny model sieciowy wraz ze ścieżką krytyczną.

Ad. e)
Możemy wyznaczyć także inne zapasy czasu takie jak: zapas swobodny: $Z_s(i,j)$, zapas warunkowy: $Z_w(i,j)$ oraz zapas niezależny: $Z_n(i,j)$ dla czynności tego przedsięwzięcia – jednak zapas całkowity jest największym zapasem czasu jaki mamy dla poszczególnych czynności.

Zapas swobodny (wolny) czasu dla poszczególnych czynności wyznaczamy ze wzoru:
$Z_s(i,j) = T_j^w - T_i^w - t_{ij}$

Zapas warunkowy czasu dla poszczególnych czynności wyznaczamy jako różnicę zapasu czasu całkowitego oraz swobodnego ze wzoru:
$Z_w(i,j) = Z_c(i,j) - Z_s(i,j) = T_j^p - T_j^w$ – a więc jest on luzem czasowym w zdarzeniu kończącym tą czynność.

Natomiast zapas niezależny wyznaczamy ze wzoru:
$Z_n(i,j) = \max\{0; T_j^w - T_i^p - t_{ij}\}$

Zapasy czasu całkowitego i swobodnego dla poszczególnych czynności: (**uwaga: zapas warunkowy i niezależny obliczyć samodzielnie**)

Czynność (i,j)	Zapas całkowity $Z_c(i,j) =$	Zapas swobodny (wolny) $Z_s(i,j) =$
$D_1 = (1{,}2)$	$Z_c(1{,}2) = 0{,}9 - 0 - 0{,}9 = 0$	$Z_s(1{,}2) = 0{,}9 - 0 - 0{,}9 = 0$
$D_2 = (2{,}3)$	$Z_c(2{,}3) = 1{,}2 - 0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}1$	$Z_s(2{,}3) = 1{,}1 - 0{,}9 - 0{,}2 = 0$
$D_3 = (2{,}4)$	$Z_c(2{,}4) = 1{,}4 - 0{,}9 - 0{,}5 = 0$	$Z_s(2{,}4) = 1{,}4 - 0{,}9 - 0{,}5 = 0$
$D_4 = (3{,}5)$	$Z_c(3{,}5) = 2 - 1{,}1 - 0{,}8 = 0{,}1$	$Z_s(3{,}5) = 2 - 1{,}1 - 0{,}8 = 0{,}1$
$D_5 = (4{,}5)$	$Z_c(4{,}5) = 2 - 1{,}4 - 0{,}6 = 0$	$Z_s(4{,}5) = 2 - 1{,}4 - 0{,}6 = 0$
$D_6 = (4{,}9)$	$Z_c(4{,}9) = 3{,}6 - 1{,}4 - 0{,}7 = 1{,}5$	$Z_s(4{,}9) = 2{,}1 - 1{,}4 - 0{,}7 = 0$
$D_7 = (5{,}6)$	$Z_c(5{,}6) = 2{,}9 - 2 - 0{,}5 = 0{,}4$	$Z_s(5{,}6) = 2{,}5 - 2 - 0{,}5 = 0$
$D_8 = (5{,}7)$	$Z_c(5{,}7) = 2{,}9 - 2 - 0{,}9 = 0$	$Z_s(5{,}7) = 2{,}9 - 2 - 0{,}9 = 0$
$D_9 = (5{,}8)$	$Z_c(5{,}8) = 6{,}5 - 2 - 0{,}5 = 4$	$Z_s(5{,}8) = 2{,}5 - 2 - 0{,}5 = 0$
$D_{10} = (5{,}11)$	$Z_c(5{,}11) = 4 - 2 - 0{,}6 = 1{,}4$	$Z_s(5{,}11) = 2{,}6 - 2 - 0{,}6 = 0$

$D_{11} = (6{,}10)$	$Z_c(6{,}10) = 3{,}8 - 2{,}5 - 0{,}9 = 0{,}4$	$Z_s(6{,}10) = 3{,}8 - 2{,}5 - 0{,}9 = 0{,}4$
$D_{12} = (7{,}10)$	$Z_c(7{,}10) = 3{,}8 - 2{,}9 - 0{,}9 = 0$	$Z_s(7{,}10) = 3{,}8 - 2{,}9 - 0{,}9 = 0$
$D_{13} = (8{,}15)$	$Z_c(8{,}15) = 6{,}7 - 2{,}5 - 0{,}2 = 4$	$Z_s(8{,}15) = 6{,}7 - 2{,}5 - 0{,}2 = 4$
$D_{14} = (9{,}11)$	$Z_c(9{,}11) = 4 - 2{,}1 - 0{,}4 = 1{,}5$	$Z_s(9{,}11) = 2{,}6 - 2{,}1 - 0{,}4 = 0{,}1$
$D_{15} = (10{,}12)$	$Z_c(10{,}12) = 4{,}2 - 3{,}8 - 0{,}4 = 0$	$Z_s(10{,}12) = 4{,}2 - 3{,}8 - 0{,}4 = 0$
$D_{16} = (10{,}15)$	$Z_c(10{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 0{,}4 = 2{,}5$	$Z_s(10{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 0{,}4 = 2{,}5$
$D_{17} = (11{,}13)$	$Z_c(11{,}13) = 5{,}2 - 2{,}6 - 1{,}2 = 1{,}4$	$Z_s(11{,}13) = 3{,}8 - 2{,}6 - 1{,}2 = 0$
$D_{18} = (11{,}14)$	$Z_c(11{,}14) = 6{,}3 - 2{,}6 - 2 = 1{,}7$	$Z_s(11{,}14) = 4{,}6 - 2{,}6 - 2 = 0$
$D_{19} = (12{,}15)$	$Z_c(12{,}15) = 6{,}7 - 4{,}2 - 2{,}5 = 0$	$Z_s(12{,}15) = 6{,}7 - 4{,}2 - 2{,}5 = 0$
$D_{20} = (13{,}15)$	$Z_c(13{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 1{,}5 = 1{,}4$	$Z_s(13{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 1{,}5 = 1{,}4$
$D_{21} = (14{,}15)$	$Z_c(14{,}15) = 6{,}7 - 4{,}6 - 0{,}4 = 1{,}7$	$Z_s(14{,}15) = 6{,}7 - 4{,}6 - 0{,}4 = 1{,}7$
$D_{22} = (15{,}16)$	$Z_c(15{,}16) = 7 - 6{,}7 - 0{,}3 = 0$	$Z_s(15{,}16) = 7 - 6{,}7 - 0{,}3 = 0$

Uwaga: widać że: $Z_s(i,j) \leq Z_c(i,j)$

Ad. f)

- jeżeli wydłużymy czas trwania czynności D_{12} (7,10) o 0,5 [h], a jest to czynność leżąca na ścieżce krytycznej, to tym samym termin zakończenia całego przedsięwzięcia ulegnie wydłużeniu o 0,5 [h] czyli wyniesie 7,5 [h].

- jeżeli skrócimy czynność D_{19} (12,15) o 1,7 [h], czyli jej czas realizacji wyniesie $t_{12\,15} = 0{,}8$, to w zdarzeniu i=15 najwcześniej w realizacji będziemy mogli znaleźć się po czasie 5,3 [h], a tym samym w zdarzeniu (i=16) po czasie 5,6 [h]. Zatem czas realizacji przedsięwzięcia skróci się 1,4 [h]. Powstanie oczywiście nowa ścieżka krytyczna: 1-2-4-5-11-13-15-16.

Przykład 2. Firma zajmująca się dystrybucją produktów spożywczych realizuje zamówienia zgłaszane bezpośrednio przez sklepy. Ze względu na wysokie koszty siły roboczej właściciel zdecydował się na automatyzację pracy i instalację komputerowego systemu zamówień. Po konsultacjach z dostawcami, własnym personelem i projektantem systemu została sporządzona lista czynności niezbędnych do realizacji takiego projektu (zob. tabela):

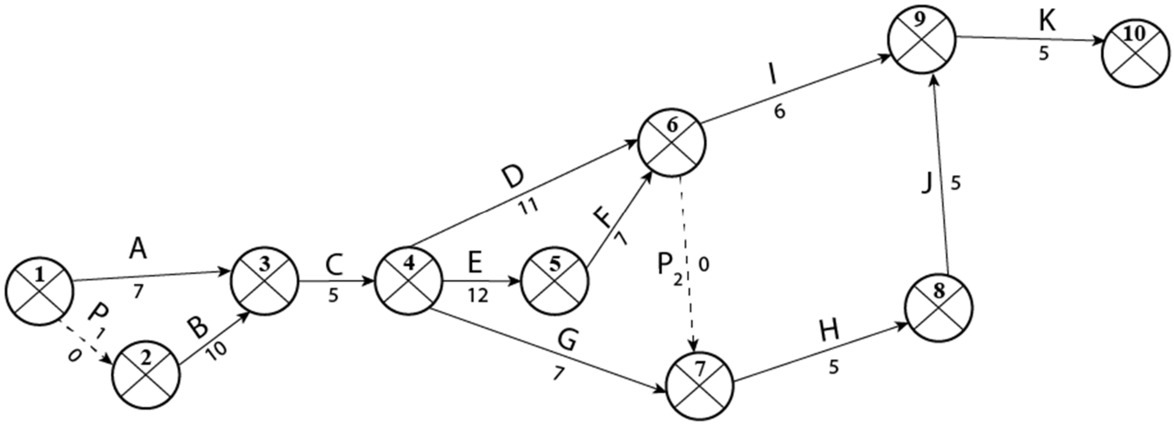
Czynność	Opis czynności	Czynności poprzedzające	Czas trwania [tygodnie]
A	Określenie potrzeb	-	7
B	Propozycje systemów	-	10
C	Wybór systemu	A, B	5
D	Zamówienie systemu	C	11
E	Projekt wnętrza	C	12
F	Realizacja projektu wnętrza	E	7
G	Projekt interfejsu komputera	C	7
H	Instalacja komputerowa	D, F, G	5
I	Instalacja systemu	D, F	6
J	Szkolenie operatorów	H	5
K	Testowanie całego systemu	I, J	5

Na podstawie tych informacji należy:

a) narysować sieć czynności dla rozpatrywanego projektu,
b) w jakim terminie jest możliwe zakończenie prac nad realizacją projektu,
c) wyznaczyć ścieżkę krytyczną dla projektu,
d) które czynności mają największy zapas czasu ?
e) odpowiedzieć na pytania:
   - jak wpłynie na termin projektu wydłużenie czynności „I” o 3 tygodnie ?
   - jak wpłynie na termin projektu skrócenie czynności „C” do 3 tygodni oraz czynności „J” o 1 tydzień ?
   - o ile można maksymalnie wydłużyć czynność „D” przedsięwzięcia, aby przy jednoczesnym wydłużeniu czynności „A” o 3 tygodnie zrealizować projekt w oszacowanym terminie ?

Ad a)

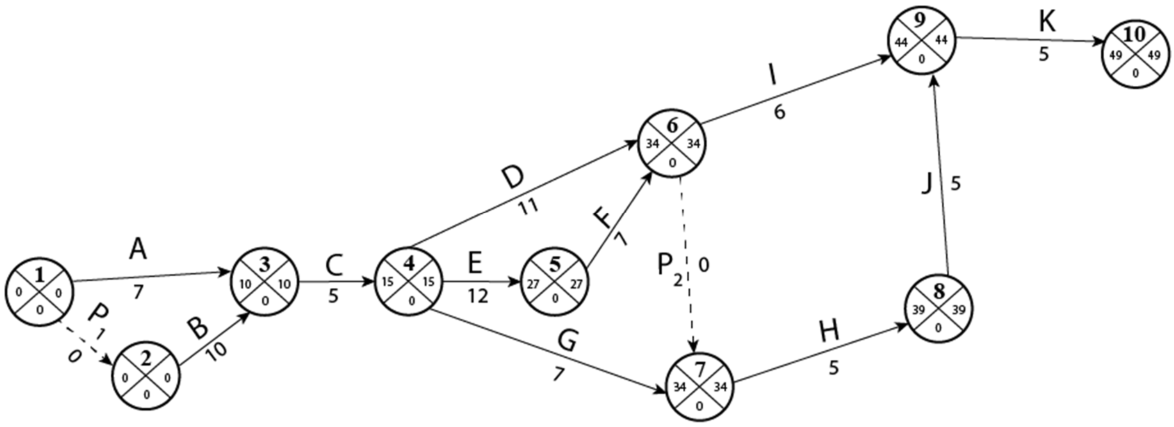
Aby poprawnie narysować model sieciowy tego przedsięwzięcia musimy użyć 2 czynności pozornych o czasach realizacji 0, aby pokazać poprawnie następstwo w czasie poszczególnych czynności. Ponieważ np. czynności „A” i „B” mogą być wykonywane równolegle i są poprzedzające do czynności „C”, a nie możemy ich narysować równolegle tj. zaczynających się i kończących w tym samym wierzchołku, zatem musimy użyć tzw. zależności czasowej (czynności pozornej „P1” o czasie trwania 0), aby obie czynności równoległe zaczynały się w różnych zdarzeniach, a kończyły w tym samym (i=3) – zob. rys. 5.



Rys. 5. Model sieciowy – z poprawnymi zależnościami czasowymi do przykładu 2.

Ad. b)

Wyznaczamy czasy najwcześniejsze możliwe oraz najpóźniejsze dopuszczalne dla zdarzeń (podobnie jak w przykładzie 1). Obliczone czasy na modelu oraz luzy czasowe dla zdarzeń przedstawia rysunek 6.



Rys. 6. Model sieciowy – z poprawnymi zależnościami czasowymi do przykładu 2.

Przedsięwzięcie może zakończyć się najwcześniej po upływie 49 tygodni.

Ad. c) d)

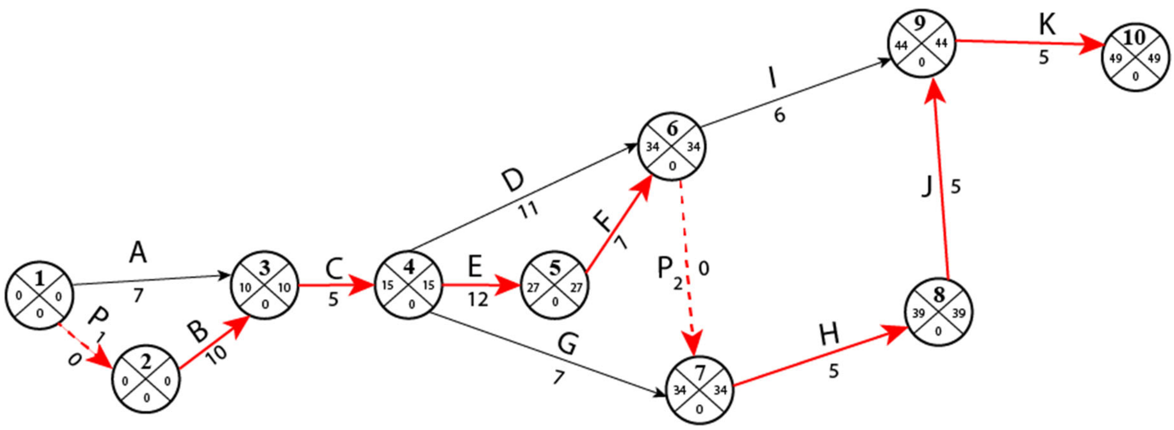
Obliczenie zapasów czasu całkowitego

Uwaga: zapasy czasu swobodnego, warunkowego i niezależnego – obliczyć samodzielnie !!!

Czynność (i,j)	Zapas całkowity $Z_c(i,j) =$
$A = (1,3)$	$Z_c(1,3) = 10 - 0 - 7 = 3$
$P_1 = (1,2)$	$Z_c(1,2) = 0 - 0 - 0 = 0$
$B = (2,3)$	$Z_c(2,3) = 10 - 0 - 10 = 0$
$C = (3,4)$	$Z_c(3,4) = 15 - 10 - 5 = 0$
$D = (4,6)$	$Z_c(4,6) = 34 - 15 - 11 = 8$
$E = (4,5)$	$Z_c(4,5) = 27 - 15 - 12 = 0$
$F = (5,6)$	$Z_c(5,6) = 34 - 27 - 7 = 0$
$G = (4,7)$	$Z_c(4,7) = 34 - 15 - 7 = 12$
$P_2 = (6,7)$	$Z_c(6,7) = 34 - 34 - 0 = 0$
$H = (7,8)$	$Z_c(7,8) = 39 - 34 - 5 = 0$
$I = (6,9)$	$Z_c(6,9) = 44 - 34 - 6 = 4$
$J = (8,9)$	$Z_c(8,9) = 44 - 39 - 5 = 0$
$K = (9,10)$	$Z_c(9,10) = 49 - 44 - 5 = 0$

Dlatego ścieżka krytyczna jest następująca: P_1-B-C-E-F-P_2-H-J-K

Największy zapas czasu całkowitego maja czynności: „G" – 12 tygodni, „D" – 8 tygodni oraz „I" – 4 tygodnie, a także „A" – 3 tygodnie.



Rys. 7. Model sieciowy – wraz ze ścieżką krytyczną dla przykładu 2.

Ad. e)

- jeżeli czynność „I" wydłużymy o 3 tygodnie, to czas realizacji projektu nie ulegnie zmianie.

- jeżeli skrócimy czynność „C" do 3 tygodni oraz czynności „J" o 1 tydzień, to czas realizacji przedsięwzięcia skróci się o 3 tygodnie (do 46 tygodni)

- można maksymalnie wydłużyć czynność „D" przedsięwzięcia o 8 tygodni, aby przy jednoczesnym wydłużeniu czynności „A" o 3 tygodnie zrealizować projekt w oszacowanym terminie

Uwaga: analizę tych faktów – pozostawiam Państwu do samodzielnych przemyśleń !!!

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zad. 1. Na określone przedsięwzięcie składają się czynności, których czasy trwania [dni] podane są w tabeli:

Czynności i-j	Czas t_{ij}	Czynności i-j	Czas t_{ij}
1-2	25	6-10	27
1-3	30	6-11	19
1-7	50	7-9	20
2-4	13	7-10	30
2-5	12	8-11	20
3-6	19	9-12	20
3-8	18	10-14	40
4-5	6	11-14	6
4-12	8	12-13	10
5-9	15	12-15	80
6-7	6	13-14	12
		14-15	50

Narysować model sieciowy tego przedsięwzięcia.
Wyznaczyć ścieżkę krytyczną oraz najwcześniejszy termin jego zakończenia.
Wyznaczyć zapasy czasu całkowitego, swobodnego, warunkowego oraz niezależnego dla czynności.
Jak wpłynie na termin końcowy:
- wydłużenie czasu trwania czynności 12-13 o 10 dni.
- opóźnienie momentu rozpoczęcia czynności 1-7 o 7 dni.
- skrócenie czasu trwania czynności 12-15 o 10 dni.

Zad. 2. Sporządzić wykres sieciowy przedsięwzięcia składającego się z czynności „a” - „n” jeśli:

przed czynnością:	należy wykonać czynność:
„a”	„f” oraz „m”
„b”	„e”
„c”	„d”
„d”	„e”
„e”	-
„f”	-
„g”	„f” oraz „m”
„h”	„c”
„i”	„c”
„j”	„d”, „g” oraz „b”
„k”	„h” oraz „j”
„l”	„g”, „d” oraz „b”
„ł”	„a”, „l”, oraz „k”
„m”	„e”
„n”	„i” oraz „ł”

Przyjmując, że czasy trwania czynności „a”-„n” wynoszą kolejno: 7, 10, 8, 5, 7, 2, 12, 12, 10, 7, 13, 10, 10, 8, 3 [dni] wyznaczyć najwcześniejszy możliwy termin realizacji całego przedsięwzięcia oraz ścieżkę krytyczną. Która z czynności ma największy zapas czasu ?

Czy termin końcowy pełnej realizacji zmieni się jeśli:

- czynność „i” (ze względu na brak chwilowy środków) rozpocznie się o 10 dni później ?

- czas trwania czynności „j” można będzie skrócić o 3 dni ?