Optymalizacja dyskretna – rozwiązane przykłady

Literatura:
- Tadeusz Trzaskalik, Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem, rozdział 2, str. 105-134
- Karol Kukuła (red.), Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, rozdział 2.2, str. 128
- Materiały „PDF" z wykładów

Przykład 1. Rozwiązać stosując metodę podziału i ograniczeń następujące zadanie optymalizacji dyskretnej liniowej:

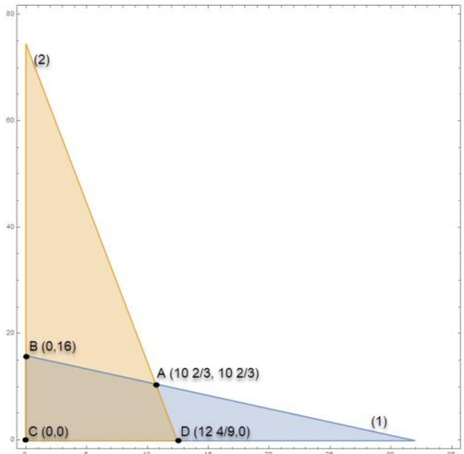
$$f(x_1, x_1) = x_1 + x_2 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2 * x_2 \leq 32 & (1) \\ 18 * x_1 + 3 * x_2 \leq 224 & (2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in Z - całkowite & (3) \end{cases}$$

Rozwiązanie P1:

Rozwiązujemy pierwotne zadanie bez uwzględniania warunku całkowitoliczbowego dla zmiennych decyzyjnych. Jest to zadanie programowania liniowego z dwoma zmiennymi wiec możemy go łatwo rozwiązać metodą geometryczną **(gdyby było więcej zmiennych - stosujemy algorytm Simpleks)**.

Rozwiązanie dla pierwotnego zadania ZPL:

Obszar rozwiązań dopuszczalnych tego zadania to czworokąt O_1=ABCD o wierzchołkach mających współrzędne: $A\left(10\frac{2}{3}, 10\frac{2}{3}\right)$ – punk przecięcia prostych warunków (1) i (2), B(0,16) - punkt przecięcia krawędzi (1) warunku z osią X_2, C(0,0) – początek układu współrzędnych, D$\left(12\frac{4}{9}, 0\right)$ – punkt przecięcia krawędzi (2) warunku z osią X_1.



Rozwiązaniem optymalnym dla maksimum funkcji celu jest oczywiście wierzchołek: $A\left(10\frac{2}{3}, 10\frac{2}{3}\right)$

$f(A) = 10\frac{2}{3} + 10\frac{2}{3} = 21\frac{1}{3}$ (max)

$f(B) = 0 + 16 = 16$

$f(D) = 12\frac{4}{9} + 0 = 12\frac{4}{9}$

$f(C) = 0 + 0 = 0$

Ponieważ rozwiązanie dla zadania stowarzyszonego ZPL z pierwotnym zadaniem optymalizacji dyskretnej nie jest rozwiązaniem nas interesującym tzn. obie zmienne decyzyjne dla rozwiązania optymalnego nie posiadają wartości całkowitych, to stosujemy w dalszej kolejności **metodę podziału i ograniczeń**.

Oznaczmy $w(O)$ – kres górny zbioru wartości funkcji celu na zbiorze dopuszczalnych rozwiązań „O" – **zob. definicja materiały z wykładu (PDF)**.

Zatem weźmy $w(0_1) = 22$ (najbliższa wartość całkowita funkcji celu ni mniejsza niż $max = 21\frac{1}{3}$.

Zbiór ten jest tzw. zbiorem perspektywicznym, który będzie podlegał podziałowi na dwa kolejne podzbiory względem wartości tej zmiennej decyzyjnej która nie podsiada w rozwiązaniu wartości całkowitych. Ponieważ u nas obie zmienne nie są całkowite, to będziemy dzielić względem ich numeracji (czyli względem x_1).

Wprowadzamy warunki podziału: $x_1 \leq N\left[10\frac{2}{3}\right] = 10$, gdzie operator N[x] – oznacza największa liczbę całkowitą nie większą niż „x" oraz $x_1 \geq N\left[10\frac{2}{3}\right] + 1 = 10 + 1 = 11$.

Powstają zatem dwa nowe podzbiory rozwiązań dopuszczalnych dla zadań ZPL:

$f(x_1, x_1) = x_1 + x_2 \to max$ (ZPL 2)

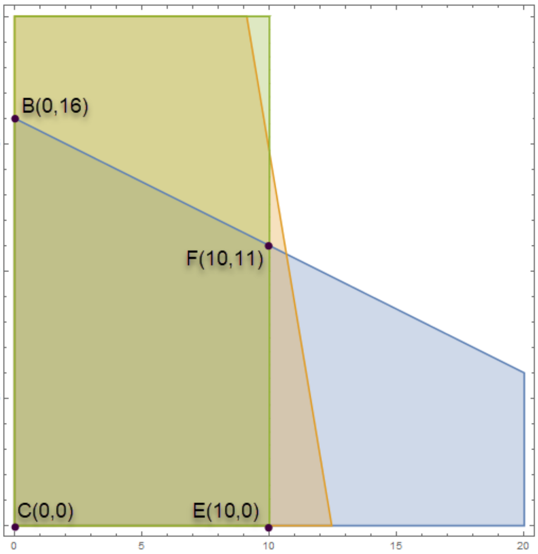
$$\begin{cases} x_1 + 2 * x_2 \leq 32 & (1) \\ 18 * x_1 + 3 * x_2 \leq 224 & (2) \\ x_1 \leq 10 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases} \text{ - } O_2$$

oraz

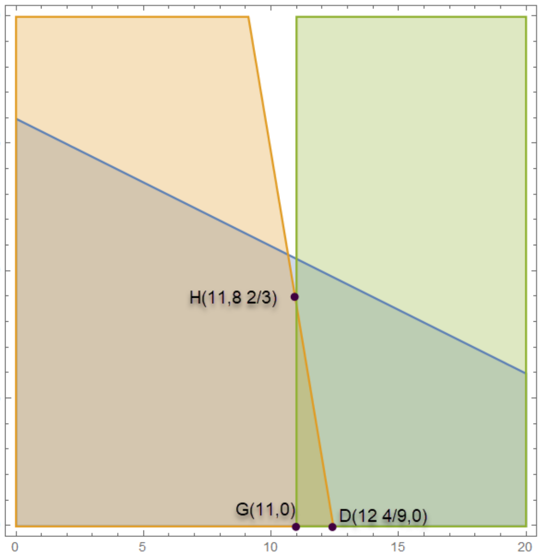
$f(x_1, x_1) = x_1 + x_2 \to max$ (ZPL 3)

$$\begin{cases} x_1 + 2 * x_2 \leq 32 & (1) \\ 18 * x_1 + 3 * x_2 \leq 224 & (2) \\ x_1 \geq 11 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases} \text{ - } O_3$$

Obszar O_2 – jest czworokątem CEFB:



Obszar O_3 – jest trójkątem GHD:



Rozwiązaniem optymalnym dla zadania ZPL 2 w obszarze O_2 jest wierzchołek $F(10,11)$

$f(F) = 10 + 11 = 21$ (max)

$f(B) = 0 + 16 = 16$; $f(E) = 10 + 0 = 10$; $f(C) = 0 + 0 = 0$.

Kres górny $w(O_2) = 21$.

Rozwiązaniem optymalnym dla zadania ZPL 3 w obszarze O_3 jest wierzchołek $H\left(11{,}8\frac{2}{3}\right)$

$f(H) = 11 + 8\frac{2}{3} = 19\frac{2}{3}$ (max)

$f(D) = 12\frac{4}{9} + 0 = 12\frac{4}{9}; f(G) = 11 + 0 = 11.$

Kres górny $w(O_3) = 20.$

Uwaga:

- Ponieważ dla zadania ZPL 2 w obszarze rozwiązań dopuszczalnych O_2 mamy rozwiązanie optymalne dla całkowitych zmiennych decyzyjnych zatem jest to ostateczne rozwiązanie optymalne dla zadania wyjściowego.
- W obszarze O_3 rozwiązanie optymalne ZPL 3 nie jest całkowitoliczbowe, ale wartość funkcji celu jest mniejsza niż dla rozwiązania optymalnego ZPL 2 a więc ono nas ostatecznie nie interesuje.

Ostateczne rozwiązanie optymalne dla zadania pierwotnego całkowitoliczbowego jest postaci:

$x_1^* = 10, x_2^* = 11, f^*(x_1^*, x_2^*) = 21.$

Gdyby na tym etapie dalej rozwiązanie nie było całkowitoliczbowe należałoby wybrać zbiór kolejny perspektywiczny (**zasady wyboru - zob. materiały do wykładów PDF i przykład rozwiązany na wykładzie**) i postępować z podziałem według kolejnej zmiennej niecałkowitej i podobnym znajdowaniem kolejnych rozwiązań, dotąd aż znajdziemy rozwiązanie całkowitoliczbowe.

Przykład 2. Algorytm heurystyczny dla zagadnienia komiwojażera

Dostawca posiadający hurtownię w Rzeszowie ma rozwieść towar w ciągu dnia do 4 odbiorców zlokalizowanych w miejscowościach: Przeworsk, Zalesie, Gorzyce, Dębów i powrócić do bazy.

Lokalizacja miast marszruty w układzie współrzędnych (X,Y) podana jest w tabeli:

Miejscowość (nr)	Nazwa miejscowości	X	Y
1	Rzeszów	34	59
2	Przeworsk	71	61
3	Zalesie	42	74
4	Gorzyce	73	71
5	Dębów	66	62

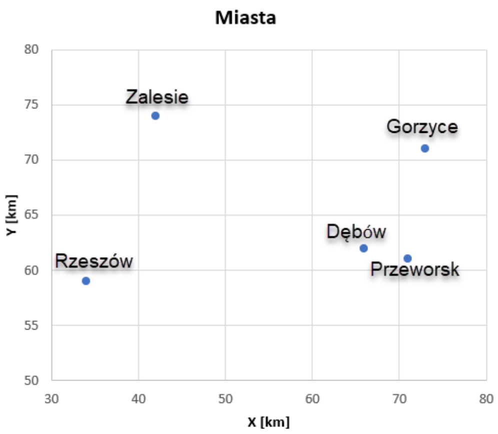
Odległości [w km] pomiędzy miejscowościami na możliwych trasach przejazdu podaje tablica odległości (symetryczna macierz odległości):

C_{ij}	1	2	3	4	5
1	∞	42.9	24.1	58.1	37.6
2	42.9	∞	35	19.3	7
3	24.1	35	∞	41.4	29.4
4	58.1	19.3	41.4	∞	22.6
5	37.6	7	29.4	22.6	∞

Znaleźć najkrótszą marszrutę dostaw przy założeniu, że każda miejscowość może być odwiedzona tylko raz (**zadanie o najkrótszej drodze zamkniętej w tzw. problemie komiwojażera**). Zastosować algorytm heurystyczny typu wstawiania („***insertion***”).

Rozwiązanie:

Rysunek (rys. 1) przedstawia ilustrację położenia miast dla wyznaczanej marszruty komiwojażera.



Rys. 1. Lokalizacja hurtowni – Rzeszów oraz miast odbiorców.

Model decyzyjny dla zagadnienia komiwojażera:

Oznaczmy:

$V = \{(i,j): i \neq j; i,j \in \{1,2,3,4,5\}\}$ – zbiór wszystkich możliwych tras.

$C_{ij} \geq 0$ – odległości pomiędzy miastami (i,j).

Zmienne decyzyjne:

$x_{ij} = \begin{cases} 1 - gdy\ marszruta\ zawiera\ trasę\ (i,j) \\ 0 - w\ przeciwnym\ wypadku \end{cases}$ – binarne

$z_j \in Z$ – zmienna całkowita, która każdemu miastu j-temu przyporządkowuje cechę – kolejność odwiedzania tego miasta w marszrucie zamkniętej (dla j=1 – Rzeszów baza, $z_1 = 0$).

Model (*)

Funkcja celu:

$$\sum_{(i,j)\in V} C_{ij} * x_{ij} \to min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n=5} x_{ij} = 1 & dla\ j = 1,2,3,4,5 & (1) \\ \sum_{j=1}^{n=5} x_{ij} = 1 & dla\ i = 1,2,3,4,5 & (2) \\ z_i - z_j + n * x_{ij} \leq n - 1 = 5 - 1 = 4 & dla\ i = 1,2,3,4,5; j = 2,3,4,5; i \neq j & (3) \\ z_j \geq 0, z_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \quad x_{ij} = \{0,1\} & (i,j) \in V & (4) \end{cases}$$

Powyższe zadanie jest zadaniem o dużej złożoności obliczeniowej – rozwiązuje się go metodą podziału i ograniczeń. Jednakże tutaj zastosujemy prostsze podejście, gdyż znajdziemy rozwiązanie quasi-optymalne (bliskie rozwiązaniu optymalnemu, albo w sprzyjających okolicznościach dokładnie równe rozwiązaniu optymalnemu).

Do rozwiązania przybliżonego zastosujemy jeden ze znanych – dość prostych algorytmów heurystycznych typu wstawiania **(zob. szczegóły materiały z wykładów – PDF)**.

Zakładamy ze baza jest j=1 – Rzeszów.

Oznaczamy: $N = \{1,2,3,4,5\}$ – zbiór wszystkich rozważanych miast; V= $\{\emptyset\}$ – zbiór miast włączonych do marszruty.

<u>Krok iteracyjny początkowy (p=0):</u>

Ponieważ Rzeszów jest bazą to włączamy to miasto do marszruty i wykreślamy go ze zbioru wszystkich dostępnych miast, zatem: V= {1}, N= {2,3,4,5}.

<u>Krok iteracyjny (p=1):</u>

Dla każdego miasta „j", które nie zostało jeszcze włączone do marszruty wyznaczamy odległość tego miasta od tzw. aktualnej marszruty niepełnej (w tym wypadku od i=1 Rzeszów) zgodnie ze wzorem: $d^{(p=1)} = \left(d_{j\in N}^{(p=1)} = \min_{i\in V}\{c_{ij}\}\right) = \left(-, d_2^{(p=1)}, d_3^{(p=1)}, d_4^{(p=1)}, d_5^{(p=1)}\right) = (-, \min\{c_{12}\}, \min\{c_{13}\}, \min\{c_{14}\}, \min\{c_{15}\})$.

Zatem: $d^{(p=1)} = (-, 42.9, 24.1, 58.1, 37.6)$

Następnie zgodnie z etapem selekcyjnym algorytmu wybieramy takie miasto do marszruty niepełnej, które jest najdalej położone od aktualnej marszruty niepełnej (dużą skuteczność takiego podejścia potwierdzają liczne eksperymenty numeryczne). W tym wypadku należy wybrać miasto j=4 (Gorzyce).

Włączamy to miasto (miejscowość) do marszruty i wykreślamy go ze zbioru wszystkich dostępnych miast.

Zatem: V= {1,4}, N= {2,3,5}, a aktualna marszruta niepełna to: 1-4-1 o długości: $C1 = c_{14} + c_{41} = 2 * 58.1 = 116.2$ [km] (z racji symetrii odległości).

<u>Krok iteracyjny kolejny (p=2):</u>

Znowu dla każdego miasta „j", które nie zostało jeszcze włączone do marszruty wyznaczamy odległość tego miasta od tzw. aktualnej marszruty niepełnej (w tym wypadku od miast {1,4}) zgodnie ze wzorem:

$d^{(p=2)} = \left(-, d_2^{(p=2)}, d_3^{(p=2)}, -, d_5^{(p=2)}\right) = (-, \min\{c_{12}, c_{42}\} = \min\{42.9, 19.3\}, \min\{c_{13}, c_{43}\} = \min\{24.1, 41.4\}, -, \min\{c_{15}, c_{45}\} = \min\{37.6, 22.6\})$.

Zatem: $d^{(p=2)} = (-, 19.3, 24.1, -, 22.6)$

- zgodnie z krokiem selekcyjnym algorytmu wybieramy kolejne miasto do marszruty niepełnej, które jest najdalej położone od aktualnej marszruty niepełnej. W tym wypadku należy wybrać zatem miejscowość j=3 (Zalesie).

Włączamy to miasto (miejscowość) do marszruty i wykreślamy go ze zbioru wszystkich dostępnych miast. Zatem: V= {1,3,4}, N= {2,5}.

- krok wstawiania wybranego miasta do marszruty

Dla aktualnej marszruty niepełnej 1-4-1 możemy miasto j=3 wstawić pomiędzy (1,4) lub pomiędzy (4,1):

- w pierwszym przypadku powstaje marszruta: 1-3-4-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty (o ile zwiększa się długość marszruty, lub zmniejsza gdy koszt ujemny, jeżeli jedziemy przez włączane miasto pośrednie) wynosi: $K1 = c_{13} + c_{34} - c_{14} = 24.1 + 41.4 - 58.1 = 65.5 - 58.1 = 7.4$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu z poprzednią niepełną marszrutą o 7.4 [km].
- w drugim przypadku powstaje marszruta: 1-4-3-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K2 = c_{43} + c_{31} - c_{41} = 41.4 + 24.1 - 58.1 = 65.5 - 58.1 = 7.4$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu poprzednią niepełną marszrutą również o 7.4 [km].

Wstawiamy zawsze pomiędzy takie dwa miasta nowe miasto do marszruty, gdzie koszty włączenia są najmniejsze. W tym przypadku koszty są równe – w takim przypadku wstawiamy bliżej pierwszej bazy w marszrucie niepełnej.

Zatem teraz aktualna marszruta niepełna będzie postaci: 1-3-4-1, a jej długość będzie równa: $C2 = C1 + 7.4 = 116.2 + 7.4 = 123.6$ [km].

<u>Krok iteracyjny kolejny (p=3):</u>

Ponownie dla każdego miasta „j", które nie zostało jeszcze włączone do marszruty wyznaczamy odległość tego miasta od tzw. aktualnej marszruty niepełnej (w tym wypadku od miast $\{1,3,4\}$) zgodnie ze wzorem:

$d^{(p=3)} = \left(-, d_2^{(p=3)}, -, -, d_5^{(p=3)}\right) = (-, \min\{c_{12}, c_{32}, c_{42}\} = \min\{42.9, 35, 19.3\}, -, -, \min\{c_{15}, c_{35}, c_{45}\} = \min\{37.6, 29.4, 22.6\})$.

Zatem: $d^{(p=3)} = (-, 19.3, -, -, 22.6)$

- zgodnie z krokiem selekcyjnym algorytmu wybieramy kolejne miasto do marszruty niepełnej, które jest najdalej położone od aktualnej marszruty niepełnej. W tym wypadku należy wybrać zatem miejscowość j=5 (Dębów).

Włączamy to miasto (miejscowość) do marszruty i wykreślamy go ze zbioru wszystkich dostępnych miast.

Zatem: V= {1,3,4,5}, N= {2}.

- krok wstawiania wybranego miasta do marszruty niepełnej

Dla aktualnej marszruty niepełnej 1-3-4-1 możemy miasto j=5 wstawić pomiędzy (1,3), (3,4) lub (4,1):

- w pierwszym przypadku powstaje marszruta: 1-5-3-4-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K1 = c_{15} + c_{53} - c_{13} = 37.6 + 29.4 - 24.1 = 67 - 24.1 = 42.9$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu z poprzednią niepełną marszrutą o 42.9 [km].
- w drugim przypadku powstaje marszruta: 1-3-5-4-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K2 = c_{35} + c_{54} - c_{34} = 29.4 + 22.6 - 41.4 = 52 - 41.1 = 10.6$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu poprzednią niepełną marszrutą o 10.6 [km].
- w trzecim przypadku powstaje marszruta: 1-3-4-5-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K3 = c_{45} + c_{51} - c_{41} = 22.6 + 37.6 - 58.1 = 60.2 - 58.1 = 2.1$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu poprzednią niepełną marszrutą tylko o 2.1 [km].

Ponieważ koszty włączenia są najmniejsze w trzecim przypadku, zatem aktualna marszruta niepełna będzie teraz postaci: 1-3-4-5-1, a jej długość będzie równa: $C3 = C2 + 2.1 = 123.6 + 2.1 = 125.7$ [km].

<u>Krok iteracyjny kolejny (p=4):</u>

Zgodnie z krokiem selekcyjnym algorytmu dodajemy ostatnie miasto (miejscowość) do marszruty niepełnej j=2 (Gorzyce).

Włączamy tą miejscowość do marszruty i wykreślamy go ze zbioru wszystkich dostępnych miast.

Zatem: V= {1,2,3,4,5}, N= {∅}.

- krok wstawiania wybranego miasta do marszruty niepełnej

Dla aktualnej marszruty niepełnej 1-3-4-5-1 możemy miasto j=2 wstawić pomiędzy (1,3), (3,4), (4,5) lub (5,1):

- w pierwszym przypadku powstaje marszruta: 1-2-3-4-5-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K1 = c_{12} + c_{23} - c_{13} = 42.9 + 35 - 24.1 = 77.9 - 24.1 = 53.8$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu z poprzednią niepełną marszrutą o 53.8 [km].
- w drugim przypadku powstaje marszruta: 1-3-2-4-5-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K2 = c_{32} + c_{24} - c_{34} = 35 + 19.3 - 41.4 = 54.3 - 41.4 = 12.9$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu poprzednią niepełną marszrutą o 12.9 [km].
- w trzecim przypadku powstaje marszruta: 1-3-4-2-5-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K3 = c_{42} + c_{25} - c_{45} = 19.3 + 7 - 22.6 = 26.3 - 22.6 = 3.7$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu poprzednią niepełną marszrutą tylko o 3.7 [km].

- w czwartym ostatnim przypadku powstaje marszruta: 1-3-4-5-2-1, zaś koszt włączenia tego miasta do marszruty wynosi: $K4 = c_{52} + c_{21} - c_{51} = 7 + 42.9 - 37.6 = 49.9 - 37.6 = 12.3$. Zatem marszruta ulegnie wydłużeniu w porównaniu poprzednią niepełną marszrutą tylko o 12.3 [km].

Ponieważ koszty włączenia są najmniejsze w trzecim przypadku, zatem ostateczna marszruta pełna będzie teraz postaci: 1-3-4-2-5-1, a jej długość będzie równa: $C4 = C3 + 3.7 = 125.7 + 3.7 = 129.4$ [km].

Z racji symetrii również taką samą długość będzie posiadała marszruta: 1-5-2-4-3-1 (129.4 km).

<u>Odpowiedź:</u>

Należy zatem odwiedzić kolejno miejscowości: Rzeszów (baza) – Zalesie – Gorzyce – Przeworsk – Dębów – Rzeszów (powrót do bazy). Wtedy łączna długość tej trasy wyniesie 129.4 [km]. Uzyskane algorytmem heurystycznym rozwiązanie jest również rozwiązaniem nie tylko bardzo bliskim rozwiązaniu optymalnemu, ale dokładnie **optymalnym** dla tego zadania.

<u>Uwaga:</u>

Sprawdzenie warunków dla modelu:

Zmienne decyzyjne - wartości optymalne (w modelu):

$$z = [z_i] = [z_1 = 0, z_2 = 3, z_3 = 1, z_4 = 2, z_5 = 4]$$

$$X = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_i - z_j + n * x_{ij} \le n - 1 = 4$$

$$\begin{bmatrix} & j=1 & j=2 & j=3 & j=4 & j=5 \\ i=1 & & 0-3+5*0=-3 & 0-1+5*1=4 & 0-2+5*0=-2 & 0-4+5*0=-4 \\ i=2 & & & 3-1+5*0=2 & 3-2+5*0=1 & 3-4+5*1=4 \\ i=3 & & 1-3+5*0=-2 & & 1-2+5*1=4 & 1-4+5*0=-3 \\ i=4 & & 2-3+5*1=4 & 2-1+5*0=1 & & 2-4+5*0=-2 \\ i=5 & & 4-3+5*0=1 & 4-1+5*0=3 & 4-1+5*0=3 & \end{bmatrix}$$