LINIOWE MODELE OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Istnieje bardzo wiele sytuacji decyzyjnych, których nie możemy opisać używając tylko wyłącznie zmiennych ciągłych.

Wynika to z nieciągłości pewnych rozważanych procesów ekonomicznych:

- pracownika można przydzielić tylko do jednego z kilku dostępnych stanowisk pracy;
- projekt inwestycyjny będzie przyjmowany do realizacji lub nie;
- zakład produkcyjny będzie lokalizowany w jednym z możliwych punktów lokalizacji lub też nie;

We wszystkich przytoczonych sytuacjach decyzyjnych wymagamy, aby wszystkie (lub choć jedna zmienna decyzyjna), spośród tych które mamy wyznaczyć przyjmowały wartości tzw. ***dyskretne*** (np. ze zbioru liczb całkowitych: $x \in Z$, lub ze zbioru liczb binarnych: $x \in \{0,1\}$).

Zagadnienia decyzyjne, w których przynajmniej jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości dyskretne nazywamy – ***dyskretnym zagadnieniem decyzyjnym***, a ich matematyczne modele – ***dyskretnym zadaniem decyzyjnym*** (DZD).

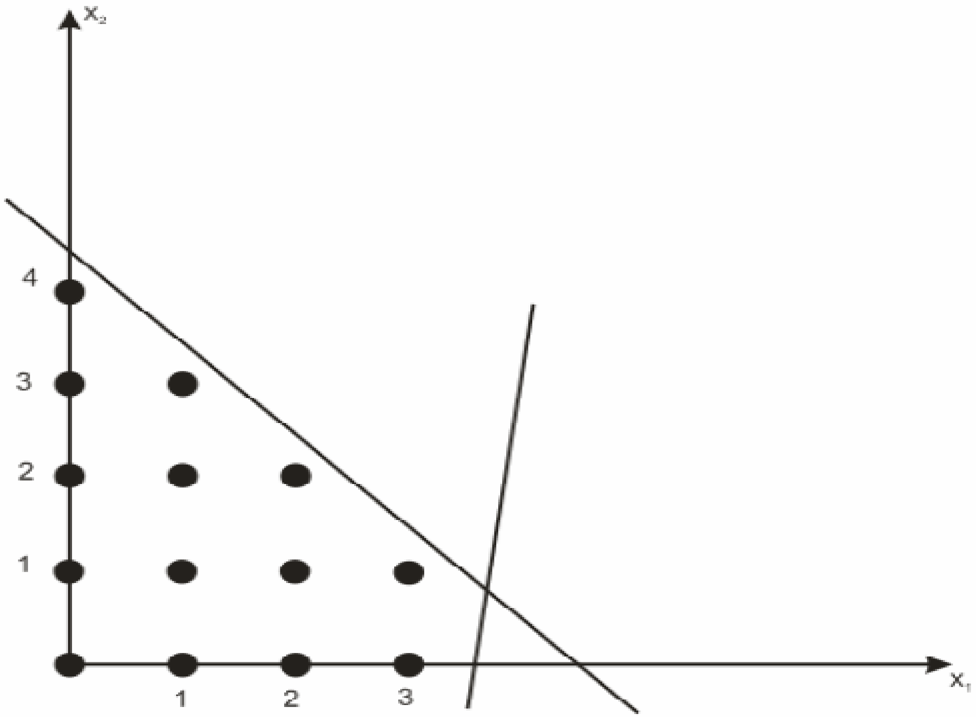
❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Interesować nas będą obecnie tylko takie dyskretne problemy decyzyjne, w których zarówno funkcja celu jak i warunki ograniczające są postaci liniowej – ***zadania programowania dyskretnego - liniowego*** (PDL). Wśród tego typu zadań wyróżnia się trzy podstawowe grupy:

- zadania ***programowania całkowitoliczbowego - liniowego*** (PCL)
- zadania ***programowania binarnego – liniowego*** (PBL)
- zadania ***programowania mieszanego – liniowego*** (PML)

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych „*D*" zadania programowania dyskretnego – liniowego jest zawsze zbiorem niespójnym (np. dla zadania programowania całkowitoliczbowego z dwoma zmiennymi - będzie to zbiór punktów o współrzędnych całkowitych znajdujących się w pewnym wieloboku). Nieciągłość zmiennych decyzyjnych powoduje, że zadania tego typu są trudniejsze do rozwiązania, niż zwykłe zadania programowania liniowego.



❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

- **Zagadnienie optymalnego przydziału**

Istnieje możliwość obsadzenia „n” – stanowisk roboczych (i = 1,2,...,n) przez „n” – osób (pracowników) (j = 1,2,...,n). Znane są efekty pracy j – tego robotnika na i – tym stanowisku pracy (macierz efektów pracy - $W_{i,j} = [w_{i,j}]_{i,j=1,2,\dots,n}$).

Efekty te mogą być oceniane pozytywnie (wydajność pracy, wartość produkcji w przeliczeniu na jednostkę czasu) lub negatywnie (liczba braków, czas wykonania pracy, koszty związane z pracą).
Należy dokonać takiego przydziału pracowników do poszczególnych stanowisk pracy, tak aby zminimalizować negatywne lub zmaksymalizować pozytywne efekty pracy dla całego zespołu (zakładu pracy).
Zakłada się ponadto, że każde stanowisko pracy może być obsadzone tylko przez jednego pracownika, a tym samym każdy pracownik może pracować tylko na jednym stanowisku.

Oznaczenia:

Oznaczmy przez $X_{i,j} = [x_{i,j}]_{i,j} = 1,2,\dots,n$ - macierz zmiennych decyzyjnych, która jest postaci:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{gdy j - ty pracownik jest przydzielony do i - tego stanowiska} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Model matematyczny:

Problem ten można przedstawić za pomocą następującego liniowego zadania programowania binarnego (PBL):

(funkcja celu)

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \cdot x_{i,j} \rightarrow \max(\min)$$

(warunki ograniczające)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

(każde stanowisko jest obsadzone tylko przez 1 pracownika)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$$

(każdy pracownik jest przydzielony tylko do 1 stanowiska)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{i, j=1,2,...,n.}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne (tym samym optymalne) to macierze postaci (dla n=5):

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie jest tylko jedna jedynka).

Zadanie optymalnego przydziału, mimo że jest klasycznym problemem **programowania dyskretnego**, to może być rozwiązane metodami programowania liniowego – **algorytmem simpleks** (co jest bardzo pracochłonne). Istnieje jednak stosunkowo prosty i skuteczny algorytm postępowania – **algorytm węgierski** (oparty na twierdzeniu węgierskiego matematyka - **Denesa Königa**), który można zastosować do rozwiązywania zadań optymalnego przydziału.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Przykład: W pewnym magazynie pracuje 3 pracowników magazynowych: P1, P2, P3, którzy mogą wykonywać 4 rodzaje zadań: Z1, Z2, Z3, Z4, z różną wydajnością. W tabeli poniżej podana jest wydajność pracowników przy wykonywaniu poszczególnych zadań:

Pracownicy	Wydajność pracowników (szt./godz.) przy wykonywaniu zadań magazynowych			
	Z1	Z2	Z3	Z4
P1	15	4	5	2
P2	3	6	3	10
P3	12	4	6	3

Zakładając specjalizację w ciągu dnia pracowników przy wykonywaniu tylko jednego zadania, przydzielić zadania poszczególnym pracownikom, tak aby zmaksymalizować łączną wydajność ich pracy.

Ponieważ w problemie optymalnego przydziału zakłada się, że liczba stanowisk pracy jest taka sama jak liczba pracowników, to w naszym przykładzie musimy wprowadzić czwartego fikcyjnego pracownika. Oczywiście wydajność jego pracy dla poszczególnych zadań będzie równa 0.

Macierz wydajności pracy (współczynników funkcji celu) jest więc postaci:

$$W = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \\ 12 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Matematyczny model zadania:

$$F(x_{i,j}) = 15x_{1,1} + 4x_{1,2} + 5x_{1,3} + 2x_{1,4} + 3x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3} + 10x_{2,4} +$$
$$+ 12x_{3,1} + 4x_{3,2} + 6x_{3,3} + 3x_{3,4} \to \max$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} & = & 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & = & 1 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} & = & 1 \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} & = & 1 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} & = & 1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} & = & 1 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} & = & 1 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_{i,j} = 0 \;\text{ lub }\; x_{i,j} = 1; \\ i, j = 1,\ldots,4; \end{array}$$

Rozwiążemy zadanie korzystając z wersji algorytmu węgierskiego, która zakłada, że funkcja celu jest postaci - minimum. Dlatego w rozwiązaniu będziemy minimalizować funkcję przeciwną do funkcji celu: $-F(x_{i,j})$, dla której macierz współczynników jest postaci:

$$W = \begin{bmatrix} -15 & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & -10 \\ -12 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 1: Przekształcenie macierzy: **W** – tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie znalazło się co najmniej jedno zero;

$$W = \begin{bmatrix} \boxed{-15} & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & \boxed{-10} \\ \boxed{-12} & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element najmniejszy

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & \boxed{13} \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-2 - (-15) = 13

Krok 2: Skreślenie w przekształconej macierzy współczynników funkcji celu wierszy oraz kolumn zawierających zero możliwie najmniejszą liczbą linii;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

trzy linie – zatem przechodzimy do kroku 4

Jeżeli najmniejsza liczba linii konieczna do pokrycia wszystkich zer jest równa wymiarowi macierzy (**czyli - n**), to rozwiązanie, które otrzymamy na podstawie tak przekształconej macierzy współczynników będzie optymalne – przechodzimy do **kroku 3**. Jeżeli jest ona mniejsza niż wymiar macierzy – **W**, to przechodzimy do **kroku 4**.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 3: Ustalić tak rozwiązanie optymalne, aby w macierzy $\left[x^*_{i,j}\right]$ jedynki znalazły się tylko na tych miejscach, gdzie są zera w przekształconej macierzy – **W** (musimy dbać także, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie była tylko jedna jedynka).

Krok 4: Gdy liczba linii pokrywających zera jest mniejsza od wymiaru macierzy współczynników, to w bieżącej (przekształconej) macierzy współczynników należy znaleźć element najmniejszy oraz:

- odjąć go od elementów nieskreślonych;
- dodać go do elementów podwójnie skreślonych;
- elementy skreślone jedną linią (raz) pozostawiamy bez zmian;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & \boxed{6} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element minimalny

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 7 \\ 13 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elementy odjęte

Powrót do **kroku 2** i powtórzenie procedury, aż do uzyskania rozwiązania optymalnego.

elementy dodane

$$W = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 5 & 4 & 7 \\ 13 & 4 & 7 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & \boxed{0} & 3 \\ 6 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cztery linie
zatem rozwiązanie optymalne
(krok 3)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(x_{i,j}) = 15 + 10 + 6 =$$
$$= 31 \text{ [szt./godz.]}$$

- **Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych**

Przykłady – problemów optymalizacji dyskretnej

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Zagadnienie rozwózki:

Często mamy do czynienia z sytuacją, gdy pewien jednorodny produkt musi zostać przewieziony od producenta do wielu jego odbiorców. Dla przykładu z cukrowni rozwozi sie wyprodukowany cukier, z mleczarni np. masło i mleko, z browaru piwo itd.

Niekiedy mamy sytuację odwrotną, zwłaszcza w przemyśle spożywczym zakupiony surowiec od wielu jego producentów (np. mleko) należy przewieźć do zakładu (np. zakładów mleczarskich) w którym odbywa się dalsza jego przeróbka.

Tego typu zagadnienia nazywają się ogólnie zagadnieniami rozwózkowo-przywozowymi. Dla uproszczenia w dalszym ciągu będziemy rozważać tylko zagadnienie rozwózki.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Zakładamy, że dane są:

- baza będąca miejscem produkcji jednorodnego towaru oraz postoju parku transportowego;

- dana jest liczba pojazdów o jednakowej ładowności;

- znamy popyt każdego odbiorcy;

- oraz macierz odległości (lub kosztu przewozu, czasu przewozu) pomiędzy wszystkimi punktami odbioru;

- popyt każdego odbiorcy jest mniejszy od ładowności pojazdów, a łączne zapotrzebowanie wszystkich punktów odbioru jest mniejsze od ładowności całego parku transportowego;

- towar jest dostarczany do odbiorcy w okresie planowanym (w dniu, tygodniu) przez jeden pojazd.

Należy ustalić taki zbiór marszrut (trasę dostaw towaru) aby:

1. popyt każdego odbiorcy był zrealizowany przez jeden pojazd.

2. ładowność każdego pojazdu nie była przekroczona

3. długość wszystkich marszrut była minimalna

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Wprowadzamy oznaczenia:

n - liczba odbiorców towaru (punktów odbioru)

P - zbiór indeksów wszystkich punktów odbioru $P = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\overline{P}$ - zbiór indeksów wszystkich punktów odbioru i dostawy $\overline{P} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

m - liczba pojazdów

V - zbiór wszystkich połączeń pomiędzy punktami (możliwych marszrut)

$V = \{\langle i, j \rangle : i, j \in \overline{P} \wedge i \neq j\}$

w - jednakowa ładowność wszystkich pojazdów

b_j - popyt j-tego odbiorcy

c_{ij} - odległość od punktu i do punktu j (długość trasy $\langle i, j \rangle$)

Zgodnie z przyjętymi założeniami dane te muszą spełniać warunki:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq m \cdot w \text{ oraz } b_j < w, j \in P$$

Dla każdego pojazdu wyznaczamy jedną marszrutę (łącznie będzie ich m).

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Przyjmiemy następujące zmienne decyzyjne:

x_{ij} - ilość towaru (dobra) przewożona na trasie $\langle i, j \rangle$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy pojazd pokonuje trasę } \langle i, j \rangle \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

Zadanie decyzyjne (PML) będzie miało postać: Znaleźć takie wartości zmiennych x_{ij} oraz y_{ij}, aby:

Funkcja celu: $\sum_{\langle i,j \rangle \in V} c_{ij} x_{ij} \to \min$

przy warunkach ograniczających:

(1) $\sum_{i \in P} y_{ij} = 1$, dla $(j \in P)$

(2) $\sum_{i \in P} y_{ji} = 1$, dla $(j \in P)$

warunki (1) i (2) oznaczają, że dla każdego odbiorcy wjeżdża i z każdego wyjeżdża jeden pojazd

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

(3) $\sum_{i \in P} y_{i0} = m$

(4) $\sum_{i \in P} y_{0i} = m$

warunki (3) i (4) wymuszają, aby z bazy wyjechało i do niej wróciło dokładnie m - pojazdów

(5) $\sum_{i \in P} x_{ij} - \sum_{i \in P} x_{ji} = b_j, \ (j \in P)$

warunek (5) oznacza, że w każdym punkcie zostawiamy tyle ile wynosi jego popyt

(6) $\sum_{j \in P} x_{0j} = \sum_{j \in P} b_j$

warunek (6) pozwala wywieźć z bazy tyle towaru ile wynosi łączny popyt odbiorców

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

(7) $x_{ij} \le w \cdot y_{ij}, \ \left(\langle i, j\rangle \in V\right)$

warunek (7) zapewnia, że na każdej trasie przewieziemy towaru nie więcej niż wynosi ładowność pojazdu. Jeśli danej trasy pojazd nie pokonuje, to przewóz towaru na tej trasie jest zerowy.

(8) $x_{ij} \ge 0, \ \left(\langle i, j\rangle \in V\right)$

(9) $y_{ij} \in \{0,1\}, \ \left(\langle i, j\rangle \in V\right)$

Zadanie rozwózki jest zadaniem o dużych wymiarach.

liczba zmiennych, to: $L(z) = 2n(n+1)$

liczba warunków: $L(w) = 3n + n(n+1) + 3$

Dla n=30 odbiorców mamy 8450 zmiennych i 483 warunki.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Zagadnienie komiwojażera - klasyczny problem optymalizacji dyskretnej

Komiwojażer (dawny sprzedawca objeżdżający domy i oferujący produkty) wyrusza z pewnego miasta (z bazy), ma odwiedzić kilka miejscowości i wrócić do punktu startu. każde z miast może być odwiedzone tylko raz i w dowolnej kolejności.

Dany jest zbiór miast (i=1,2,....,n) oraz nieujemna, kwadratowa macierz odległości (kosztu lub czasu przejazdu) $C = \left[c_{ij} \right] i = 1,...,n; j = 1,...,n$. Należy znaleźć taką drogę zamkniętą, przechodzącą przez wszystkie miejscowości, która jest minimalna.

Droga zamknięta jest zwana dalej marszrutą i składa się z n odcinków, które będziemy nazywać trasami. Ponieważ marszruta nie może zawierać trasy $\langle i, i \rangle$, więc przyjmujemy, że $c_{ii} = \infty$ dla i=1,2,...,n. Łączna liczba marszrut w problemie komiwojażera jest równa $(n-1)!$. Dla n=10 mamy $9! = 362800$ różnych rozwiązań. Przegląd zupełny zbioru rozwiązań w celu znalezienia optymalnego jest efektywny tylko dla małych $n (n \le 8)$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Oznaczmy przez:

$V=\{\langle i,j\rangle : i\neq j; i,j=1,2,\dots,n\}$ - niech będzie zbiorem wszystkich możliwych tras

Zmienne decyzyjne:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{gdy marszruta zawiera trasę } \langle i,j\rangle\\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym}\end{cases}$$ - zmienna binarna

z_j - zmienna całkowita, która każdemu miastu j-temu przyporządkowuje cechę - kolejność odwiedzenia tego miasta (przy założeni że dla punktu startu - bazy $z_{j_B}=0$)

Jeżeli n=5 miast oraz $j_B=1$ (miasto o numerze 1-baza), to przykładowa marszruta może być postaci: $(1,4,5,3,2,1)$, a zmienne kolejności odwiedzeń: $z_1=0, z_4=1, z_5=2, z_3=3, z_2=4$ (oczywiście miasto startu posiadające cechę $z_1=0$ nie może mieć drugiej cechy równej 5)

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Problem komiwojażera sprowadza się do następującego zadania decyzyjnego (PML):

Wyznaczyć takie wartości zmiennych: x_{ij} oraz z_j, aby:

funkcja celu: $\sum_{\langle i,j \rangle \in V} c_{ij} x_{ij} \to \min$

przy warunkach ograniczających:

(1) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, dla $(j = 1, 2, \ldots, n)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, dla $(i = 1, 2, \ldots, n)$

warunki (1) i (2) oznaczają, że komiwojażer przez każdy punkt przejeżdża tylko jeden raz

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

(3) $z_i - z_j + nx_{ij} \le n-1$, dla $(i=1,2,\dots,n;\ j=2,3,\dots,n;\ i \ne j)$

niestety (1) i (2) nie gwarantują, że z wybranych n tras tworzymy tylko jedną marszrutę zamkniętą. Warunek (3) wyklucza możliwość powstawania tzw. podcykli w tworzonej marszrucie.

$z_j \ge 0, z_j \in C,\ (j=1,2,\dots,n)$

$x_{ij} \in \{0,1\},\ \left(\langle i,j\rangle \in V\right)$

Zadanie komiwojażera jest zadaniem o dużych rozmiarach.

Liczba zmiennych to: $L(z) = n + n(n-1) = n^2$

Liczba warunków to: $L(w) = 2n + n(n-1) - (n-1) = 2n + (n-1)^2$

Dla n=10 mamy 100 zmiennych oraz 101 warunków.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – zadanie komiwojażera (przybliżony algorytm rozwiązania)

Algorytm włączania dla zagadnienia komiwojażera:

Oznaczmy N – zbiór wszystkich miast, zaś przez V – zbiór miast włączonych do marszruty.

Formalnie algorytm ten można opisać w kilku krokach:

1. Podstawić $V := \varnothing$;
2. Wybrać dowolne miasto startowe (bazę, z której wyrusza zaopatrzeniowiec): $i_1 \in N; N := N - \{i_1\}; V := \{i_1\}$;
3. Wybrać zgodnie z pewnym kryterium drugie miasto $i_2 \in N$ tworząc marszrutę: $(i_1, i_2, i_1); N := N - \{i_2\}; V := V + \{i_2\}$;
4. Dla kolejnych miast o numerach k = 3 ,…, n – 1 przeprowadzić operacje:
   - wybrać miasto $i_k \in N$ korzystając z pewnego kryterium i włączyć je do V, czyli: $V := V + \{i_k\}$ - (jest to krok selekcyjny algorytmu),
   - dołączyć miasto i_k do marszruty $(i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_1)$ wstawiając je pomiędzy takie miasta, aby długość powstałej marszruty była największa (jest to krok wstawiania w algorytmie),
5. Dołączyć do marszruty ostatnie n - te miasto stosując to samo postępowanie co dla wcześniejszych miast w kroku 4. Po wykonaniu tych 5 – kroków otrzymuje się marszrutę pełną (V – składa się z n – miast, zaś $N = \varnothing$;

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – zadanie komiwojażera (przybliżony algorytm rozwiązania)

Przykład praktyczny:

Rozważmy zadanie komiwojażera z **n = 5** miastami. Macierz – **C** (asymetryczna) określa odległości między tymi miastami:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & \infty & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & \infty & 7 & 3 \\ 5 & 9 & 2 & \infty & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 4 & \infty \end{bmatrix}$$

- Wybieramy jako miasto początkowe miasto o numerze 5. $V = \{5\}; N = N - \{5\} = \{1,2,3,4\}$.
- W celu wyboru drugiego miasta w marszrucie i każdego kolejnego posłużymy się w kryterium selekcji strategią, która nakazuje wybór miasta położonego **najdalej od aktualnej marszruty niepełnej**.
  Liczne eksperymenty numeryczne potwierdzają dużą efektywność tej strategii.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – zadanie komiwojażera (przybliżony algorytm rozwiązania)

Odległość miasta o **numerze - j** od niepełnej marszruty definiowana jest jako **minimalna odległość** między **j - tym miastem** a **wszystkimi miastami** należącymi do tej marszruty.
Określa to wektor odległości:
$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, gdzie: $d_j = \min\{c_{i,j}\}$; $i \in V; j \in N$;
Dla $j \in V$ (czyli miast należących do marszruty) na **j – tej** pozycji wektora **d** umieszczany jest znak (**minus**).

Dla zadania $d = (4, 8, 1, 4, -)$ - najdalej oddalonym miastem od marszruty jest miasto 2, które dołączamy do marszruty.

Tworzymy marszrutę postaci: $(5, 2, 5)$, której długość wynosi: $F = c_{5,2} + c_{2,5} = 8 + 7 = 15$

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & \infty & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & \infty & 7 & 3 \\ 5 & 9 & 2 & \infty & 7 \\ \boxed{4 \quad 8 \quad 1 \quad 4} & & & & \infty \end{bmatrix}$$

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – zadanie komiwojażera (przybliżony algorytm rozwiązania)

- **Dla kolejnych wybieranych miast (krok 4 algorytmu) mamy:**

a) $V = \{5,2\}; N = N - \{2\} = \{1,3,4\}$

Wektor $d = \left(\min\{c_{2,1}; c_{5,1}\} = 2, -, \min\{c_{2,3}; c_{5,3}\} = 1, \min\{c_{2,4}; c_{5,4}\} = 4, -\right)$.

Jako kolejne miasto do marszruty włączamy zatem miasto 4.

$V = \{5,2,4\}; N = N - \{4\} = \{1,3\}$. Możemy go wstawić pomiędzy miasta (5,2) lub pomiędzy miasta (2,5).

Jeżeli włączymy między miasta (5,2) utworzymy marszrutę: $(5,4,2,5)$, a tzw. koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi:

$c_{5,4} + c_{4,2} - c_{5,2} = 4 + 9 - 8 = 5;$

Jeżeli włączymy między miasta (2,5) utworzymy marszrutę: $(5,2,4,5)$, a tzw. koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi:

$c_{2,4} + c_{4,5} - c_{2,5} = 5 + 7 - 7 = 5;$

Włączamy zawsze między takie wierzchołki, dla których koszt włączenia jest najmniejszy. W naszym przypadku koszty są równe, zatem włączamy nowe miasto w miejsce jak najbliższe początkowi marszruty. Marszruta jest więc postaci: $(5,4,2,5)$. Oznacza to, że długość aktualnej marszruty wyniesie $F = F + 5 = 15 + 5 = 20$.

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & \infty & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & \infty & 7 & 3 \\ 5 & 9 & 2 & \infty & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 4 & \infty \end{bmatrix}$$

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – zadanie komiwojażera (przybliżony algorytm rozwiązania)

b) $V = \{5,2,4\}; N = \{1,3\}$

Wektor $d = \left(\min\{c_{2,1}; c_{4,1}; c_{5,1}\} = 2, -, \min\{c_{2,3}; c_{4,3}; c_{5,3}\} = 1, -, -\right)$.

Jako kolejne miasto do marszruty włączamy zatem miasto 1.

$V = \{5,2,4,1\}; N = N - \{1\} = \{3\}$. Możemy go wstawić pomiędzy miasta (5,4) (4,2) lub (2,5).

Jeżeli włączymy między miasta (5,4) utworzymy marszrutę: $(5,1,4,2,5)$, a koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi:

$c_{5,1} + c_{1,4} - c_{5,4} = 4 + 7 - 4 = 7$;

Jeżeli włączymy między miasta (4,2) utworzymy marszrutę: $(5,4,1,2,5)$, a koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi:

$c_{4,1} + c_{1,2} - c_{4,2} = 5 + 2 - 9 = -2$;

Jeżeli włączymy między miasta (2,5) utworzymy marszrutę: $(5,4,2,1,5)$, a koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi:

$c_{2,1} + c_{1,5} - c_{2,5} = 2 + 3 - 7 = -2$;

W naszym przypadku koszty włączenia są najmniejsze w dwóch przypadkach, włączamy miasto 1 pomiędzy miasta (2,5) – bliżej punktu 5 (początek marszruty). Marszruta jest zatem postaci: $(5,4,2,1,5)$. Oznacza to, że długość aktualnej marszruty wyniesie $F = F - 2 = 20 - 2 = 18$.

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & \infty & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & \infty & 7 & 3 \\ 5 & 9 & 2 & \infty & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 4 & \infty \end{bmatrix}$$

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – zadanie komiwojażera (przybliżony algorytm rozwiązania)

- **Dla ostatniego miasta w marszrucie (krok 5 algorytmu)**

$V=\{5,2,4,1\};N=\{3\}$

Wektor $d=(-,-,\min\{c_{1,3};c_{2,3};c_{4,3};c_{5,3}\}=1,-,-)$.

Do marszruty możemy włączyć tylko miasto 3.

$V=\{5,2,4,1,3\};N=N-\{3\}=\varnothing$. Możemy go wstawić pomiędzy miasta (5,4) (4,2), (2,1) lub (1,5).

Dokonujemy porównań kosztów wstawień:

- marszruta: (5,3,4,2,1,5) - koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi: $c_{5,3}+c_{3,4}-c_{5,4}=1+7-4=4$;
- marszruta: (5,4,3,2,1,5) - koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi: $c_{4,3}+c_{3,2}-c_{4,2}=2+4-9=-3$;
- marszruta: (5,4,2,3,1,5) - koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi: $c_{2,3}+c_{3,1}-c_{2,1}=4+8-2=10$;
- marszruta: (5,4,2,1,3,5) - koszt związany z dołączeniem tego miasta wynosi: $c_{1,3}+c_{3,5}-c_{1,5}=4+3-3=4$;

W naszym przypadku koszty włączenia są najmniejsze, gdy włączymy miasto 3 pomiędzy miasta (4,2). Pełna marszruta jest zatem postaci: (5,4,3,2,1,5). Oznacza to, że długość tej pełnej marszruty wynosi: $F=F-3=18-3=15$.

$$C=\begin{bmatrix}\infty & 2 & 4 & 7 & 3\\ 2 & \infty & 4 & 5 & 7\\ 8 & 4 & \infty & 7 & 3\\ 5 & 9 & 2 & \infty & 7\\ 4 & 8 & 1 & 4 & \infty\end{bmatrix}$$

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – zadanie komiwojażera (przybliżony algorytm rozwiązania)

Uwagi:

- wybierając jako miasto początkowe inne miasto możemy otrzymać inne rozwiązanie. Zaleca się w tym przypadku wyznaczyć algorytmem przybliżonym rozwiązania dla każdego wierzchołka jako początkowego i wybrać spośród nich najlepsze;
- gdy w danej iteracji w wektorze – d pojawi się więcej niż jeden element maksymalny (można dołączyć więcej niż jedno miasto), to dołączamy miasto o mniejszym numerze;

ELEMENTY

TEORII GIER

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

ELEMENTY TEORII GIER

TEORIA GIER jest to matematyczna teoria rozwiązywania sytuacji konfliktowych bądź współpracy, w których wynik uzyskany przez jedną osobę (gracza, uczestnika gry) zależy także od decyzji podejmowanych przez innych uczestników gry. Teoria gier nie bada przyczyn ani genezy konfliktów – interesują ją tylko optymalne ich rozwiązania.

Jak sama nazwa wskazuje, teoria gier wzięła swój początek z analizy rozgrywek gier karcianych, szachów itp. Obecnie jej zastosowanie jest o wiele szersze i obejmuje wiele dziedzin, w tym nauki o zarządzaniu.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Podstawowe definicje i założenia

Pod nazwą **GRY** rozumieć będziemy pewien sformalizowany model sytuacji konfliktowej.

Słowo **GRACZ** oznacza pojedynczą osobę lub grupę osób tworzących koalicję (działających wspólnie, we wspólnym interesie).

Aby daną sytuację rozpatrywać z punktu widzenia teorii gier należy przyjąć pewne założenia odnośnie gry i stron konfliktu:

- istnieje co najmniej dwóch graczy,
- każdy z graczy posiada przynajmniej dwie **strategie** czyli drogi postępowania,
- w wyniku każdej gry każdy z graczy otrzymuje pewną wygraną (zwaną też **wypłatą**), której wysokość zależy od strategii zastosowanych przez wszystkich graczy. Wygraną (wypłatę) wyraża się dla wygody w liczbach.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

TYPY GIER

Gry można dzielić według wielu kryteriów, np. ze względu na:

- ilości graczy: gry dwuosobowe i wieloosobowe (w przypadku niektórych gier wieloosobowych może dochodzić do zawiązywania koalicji),
- kooperację między graczami: gry kooperatywne (w których gracze mogą porozumiewać się między sobą i zawierać koalicje) i niekooperatywne (w których jest to zabronione lub niemożliwe),
- charakter gry: gry o sumie zerowej (w których jeden z graczy otrzymuje dokładnie tyle ile drugi musi oddać) i gry o sumie niezerowej (możliwe jest np. że wszyscy gracze zyskują w wyniku rozgrywki),
- dostępną informację: gry z pełną informacją (gracz zna wszystkie strategie i cel swojego przeciwnika) i gry z informacją niekompletną (gracz nie wie jaki cel przyświeca przeciwnikowi),
- gry strategiczne i gry ekstensywne.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W grach strategicznych gracze znają nawzajem swoje strategie, czyli wiedzą, jak mogą zachować się inni gracze. Wyboru strategii dokonują jednak jednoczenie, a dokładniej czynią to nie wiedząc, którą ze swoich strategii wybrali przeciwnicy. Co więcej, ustalają oni w ten sposób swój plan postępowania raz na zawsze i nie mogą go zmienić w trakcie rozgrywki. Prostym przykładem takiej gry jest dziecięca zabawa w "kamień-nożyce-papier".

W grach ekstensywnych istnieje pewna kolejność posunięć – gracze wykonuj swoje ruchy (tj. dokonują wyboru strategii) na podstawie ruchów przeciwnika. Innymi słowy mamy tu do czynienia z ciągłym dopasowywaniem się graczy do zaistniałej sytuacji. Za przykład mogą posłużyć tu szachy.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO

Z grami o sumie zerowej mamy do czynienia wszędzie tam, gdzie interesy graczy są dokładnie przeciwstawne, czyli tam, gdzie wygrana (zysk) jednego gracza jest równy przegranej (stracie) drugiego. Gry te służą więc do modelowania sytuacji czystego konfliktu, w których nie ma mowy o współpracy między graczami, ze względu na wyraźną sprzeczność ich interesów.

Przykład

Dwie firmy (A i B) produkują pewien wyrób i konkurują ze sobą o rynek zbytu. Aby zwiększyć swą konkurencyjność, firmy podjęły pewne działania marketingowe. Obie firmy rozważają 3 możliwości (strategie): A_1 (B_1) – zastosować lepsze opakowanie produktu, A_2 (B_2) – zwiększyć nakłady na reklamę, A_3 (B_3) – nieznacznie obniżyć cenę. Oszacowane efekty tych działań w postaci procentowego zwiększenia udziału w rynku sprzedaży produktu dla firmy A umieszczone są w tabeli.

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Wybrać optymalną strategię dla każdej z firm zakładając, że każda z nich podejmując decyzję nie zna wyboru konkurenta.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	2
A_2	2	8	0
A_3	6	-4	-2

Gry dwuosobowe najłatwiej jest przedstawić w postaci macierzy wypłat. Tak przedstawioną grę nazywamy grą w postaci normalnej. Macierz wypłat zawiera wartości wypłat dla wszystkich możliwych kombinacji strategii obu graczy. W przypadku gier o sumie zerowej stosuje się zapis uproszczony – wystarczy macierz wypłat gracza A o elementach a_{ij} ($i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$; n – liczba strategii gracza A, m – liczba strategii gracza B).

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Poszukiwanie rozwiązania gry najlepiej przeprowadzić w 3 krokach:

1. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.
2. Usunięcie strategii zdominowanych.
3. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.

Strategie czyste:

- gracza A: A_1, A_2, A_3,
- gracza B: B_1, B_2, B_3.

Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.

Ogólny sposób poszukiwania rozwiązania w zbiorze strategii czystych (punktu siodłowego) jest następujący:

- wypisać minima z każdego wiersza i wybrać największe z nich:

$$v_A = \max_i \{ \min_j \{ a_{ij} \} \} \qquad \text{(wartość dolna gry)}$$

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

- wypisać maksima z każdej kolumny i wybrać najmniejsze z nich:

$$v_B = \min_j\{\max_i\{a_{ij}\}\} \qquad \text{(wartość górna gry)}$$

Jeżeli obie liczby są równe ($v_A = v_B$), to gra posiada rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (punkt siodłowy). Gracze powinni stosować te strategie, które odpowiadają wyznaczonemu wierszowi i kolumnie. Jeżeli wybiorą inne strategie, narażą się na niepotrzebne straty.

W przykładzie istnieje punkt siodłowy (rozwiązanie w zbiorze strategii czystych). Gracz A powinien stosować strategię A_1, gracz B – B_3. Wartość gry wyniesie wtedy: $v = v_A = v_B = 2$.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3	min a_{ij}
A_1	4	6	2	2
A_2	2	8	0	0
A_3	6	-4	-2	-4
max a_{ij}	6	8	2	

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Poszukiwanie strategii zdominowanych.

Strategii zdominowanych (nieefektywnych, nieracjonalnych) poszukujemy, aby uprościć grę (zmniejszyć macierz wypłat). Strategię S_p nazywamy zdominowaną przez strategię S_r, jeżeli:

- dla gracza A: $\forall j : a_{pj} \leq a_{rj}$,
- dla gracza B: $\forall i : a_{ip} \geq a_{ir}$.

Procedurę znajdowania i usuwania strategii zdominowanych przedstawiono dla przykładowej macierzy wypłat.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	2
A_2	2	8	0
A_3	6	-4	-2

Strategie gracza A nie są zdominowane (na razie).
B_1 jest zdominowana przez B_3 (usuwamy B_1).

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

a_{ij}	B_2	B_3
A_1	6	2
A_2	8	0
A_3	-4	-2

A_3 jest zdominowana przez np. A_1 (usuwamy A_3).

a_{ij}	B_2	B_3
A_1	6	2
A_2	8	0

B_2 jest zdominowana przez B_3 (usuwamy B_2).

a_{ij}	B_3
A_1	2
A_2	0

A_2 jest zdominowana przez A_1 (usuwamy A_2).

a_{ij}	B_3
A_1	2

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Udało się macierz wypłat zredukować do jednego wiersza i jednej kolumny, czyli gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (A_1, B_3). Wartość gry wynosi 2.

Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.

Strategią mieszaną dla danego gracza będziemy nazywać liniową kombinację wypukłą jego strategii czystych.

Stosowane są na ogół w dwóch rodzajach sytuacji:

- w przypadku wielokrotnego (niezależnego od siebie) rozgrywania tej samej gry,
- gdy obszar zastosowania decyzji daje się podzielić na wystarczająco wiele obszarów częściowych.

Optymalnym rozwiązaniem gry będzie strategia mieszana, gdy gra nie ma punktu siodłowego.

Przyjmijmy **NOWĄ** macierz wypłat w analizowanym przykładzie.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	6
A_2	3	1	4
A_3	2	3	3

Gra nie ma rozwiązania w zbiorach strategii czystych (v_A=2, v_B=3). Usuwamy strategie zdominowane (A_3 jest zdominowana przez A_1, B_3 jest zdominowana przez B_1).

a_{ij}	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	3	1

Szukając optymalnych strategii mieszanych można wykorzystać metody i techniki programowania liniowego.

Oznaczenia:

p_i – częstość stosowania przez gracza A strategii A_i, i=1,2,

q_j – częstość stosowania przez gracza B strategii B_j, j=1,2.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza A (częstości p_i) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} & v \to \max \\ & 2p_1 + 3p_2 \geq v, \\ & 4p_1 + 1p_2 \geq v, \qquad\qquad (1) \\ & p_1 + p_2 = 1, \\ & p_1, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Jeżeli dokonamy podstawienia: $x_i = \frac{p_i}{v}$ (przy zał. v>0), to (1) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} = x_1 + x_2 \to \min \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 1, \qquad\qquad (2) \\ & 4x_1 + 1x_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Rozwiązanie (2): $x_1=0,2$, $x_2=0,2$, $v=2,5$.
Stąd łatwo wyznaczyć: $p_1=0,5$, $p_2=0,5$.
Czyli gracz A powinien stosować strategie A_1 i A_2 z częstością 0,5 oraz nie stosować strategii A_3 (zdominowana). Minimalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy 2,5.

Podobnie postępujemy dla gracza B. Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza B (częstości q_j) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} & v \to \min \\ & 2q_1 + 4q_2 \le v, \\ & 3q_1 + 1q_2 \le v, \qquad\qquad (3) \\ & q_1 + q_2 = 1, \\ & q_1, q_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Jeżeli dokonamy podstawienia: $y_j = \dfrac{q_j}{v}$ (przy zał. $v>0$), to (3) można zapisać następująco:

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$$\frac{1}{v} = y_1 + y_2 \rightarrow \max$$

$$2y_1 + 4y_2 \leq 1, \qquad (4)$$

$$3y_1 + 1y_2 \leq 1,$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Rozwiązanie (4): y_1=0,3, y_2=0,1, v=2,5.
Stąd łatwo wyznaczyć: q_1=0,75, q_2=0,25.
Czyli gracz B powinien stosować strategie B_1 z częstością 0,75 i strategię B_2 z częstością 0,25 oraz nie stosować strategii B_3 (zdominowana). Maksymalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy również 2,5.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

GRY Z NATURĄ

Gry z naturą rozgrywane są przy założeniu pasywnej postawy drugiego z graczy, któremu wynik gry jest obojętny.

Przykład

Inwestor ma podjąć decyzję D_i ($i = 1, 2, 3, 4$), jaki typ zakładu usługowego ma uruchomić. Dla każdego typu zakładu oszacowano przewidywany zysk a_{ij}, jaki osiągnie się w wyniku eksploatacji zakładu przy różnych stanach S_j ($j = 1, 2, 3$) przyszłego popytu (pesymistycznym – S_1, przeciętnym – S_2, optymistycznym – S_3). Dane umieszczone są w poniższej tabeli.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3
D_1	-20	15	50
D_2	-10	25	40
D_3	-5	10	20
D_4	5	5	25

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Decydent może kierować się np. 4 poniższymi kryteriami podejmowania decyzji w warunkach niepewności: Walda (maksyminowe), Hurwicza, Bayesa i Savage'a.

1. Kryterium Walda (maksyminowe)

Zgodnie z tym kryterium należy wybrać taki wariant działalności, który przy najmniej korzystnym stanie natury pozwala osiągnąć najlepszy wynik. Jest to reguła asekurancka, reguła gracza ostrożnego, ale inteligentnego.

$$a_{kl} = \max_i \{\min_j \{a_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\min\{a_{ij}\}$
D_1	-20	15	50	-20
D_2	-10	25	40	-10
D_3	-5	10	20	-5
D_4	5	5	25	5

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Walda powinien podjąć decyzję D_4.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

2. Kryterium Hurwicza

Jest to kryterium kompromisowe między skrajnym pesymizmem a skrajnym optymizmem. Wprowadza się w nim tzw. współczynnik ostrożności $\gamma\,(0 \le \gamma \le 1)$, który określa, w jakim stopniu podejmujący decyzję jest pesymistą.

$$a_k = \max_i\{\gamma \min_j\{a_{ij}\} + (1-\gamma)\max_j\{a_{ij}\}\} \to D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Hurwicza przy współczynniku ostrożności 0,4 powinien podjąć decyzję D_1.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\min\{a_{ij}\}$	$\max\{a_{ij}\}$	a_k
D_1	-20	15	50	-20	50	22
D_2	-10	25	40	-10	40	20
D_3	-5	10	20	-5	20	10
D_4	5	5	25	5	25	17

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

3. Kryterium Bayesa

W tym kryterium przyjmuje się, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne (możemy więc mówić o neutralnym stanowisku w kwestii przyszłych warunków działalności) i wyznacza się wartość średnią wyników dla każdej decyzji. Optymalną jest ta decyzja, dla której średni wynik jest maksymalny.

$$\overline{a}_k = \max_i\{\overline{a}_i\} = \max_i\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\} \to D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Bayesa powinien podjąć decyzję D_2.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\overline{a}_i$
D_1	-20	15	50	15
D_2	-10	25	40	18,3
D_3	-5	10	20	8,3
D_4	5	5	25	11,7

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

4. Kryterium Savage'a

W tym kryterium nie ocenia się wyników podjętych decyzji, lecz skutki (straty) wynikające z niepodjęcia decyzji, która przy danym stanie natury byłaby najlepsza. Wyznaczenie decyzji optymalnej odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym tworzymy macierz „żalu" (względnych, relatywnych strat), w której znajdują się różnice b_{ij} między maksymalnym do osiągnięcia wynikiem w warunkach S_j a wynikiem uzyskanym w razie podjęcia decyzji D_i.

$$b_{ij} = \max_i\{a_{ij}\} - a_{ij}$$

a_{ij}	S_1	S_2	S_3
D_1	-20	15	50
D_2	-10	25	40
D_3	-5	10	20
D_4	5	5	25
max a_{ij}	5	25	50

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W etapie drugim, w tak określonej macierzy względnych strat poszukuje się elementu maksymalnego w każdym wierszu, a następnie wiersza, w którym wartość ta jest najmniejsza.

$$b_{kl} = \min_i \{\max_j \{b_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

b_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\max\{b_{ij}\}$
D_1	25	10	0	25
D_2	15	0	10	15
D_3	10	15	30	30
D_4	0	20	25	25

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Savage'a powinien podjąć decyzję D_2.