

PLANOWANIE SIECIOWE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI METODA PERT

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

W dalszej części wykładu zaprezentowana zostanie metoda analizy sieci dla przedsięwzięć o zdeterminowanej strukturze (**sieć kanoniczna**), lecz o **losowym** czasie trwania czynności (oceny czasów trwania poszczególnych czynności charakteryzują się pewną niepewnością).

Metoda **PERT** (**Program Evaluation and Review Technique**), której autorami są: *Malcolm, Roseboom, Clark, Fazar* - została opracowana w 1958 roku dla potrzeb programu opracowania raketowego pocisku balistycznego **Polaris**.

Istotnym elementem metody **PERT** jest sposób oceny czasu trwania czynności (zakładamy, że **nie jest** on **deterministyczny** – czyli znany).

Problem ten jest o tyle złożony, że nie mamy możliwości oszacowania tego czasu metodami statystycznymi (gdyż przedsięwzięcia tego typu, które można analizować metodą PERT są zwykle **jednorazowe** i mają charakter **prototypowy**). Metoda ta może być również stosowana dla przedsięwzięć, których czasy trwania czynności mogą podlegać znacznym wahaniom.

W warunkach losowego czasu trwania czynności analiza sieci dla potrzeb planowania i kontroli realizacji przedsięwzięcia wymaga jednak znajomości charakterystyk rozkładu czasu trwania czynności.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Problem ten rozwiązano następująco. Mimo, że rozkład czasu trwania czynności jest nieznany (nie można również go oszacować statystycznie), to można przyjąć pewne jego hipotetyczne własności:

- Jest to rozkład ciągły,
- Jest rozkładem z jednym ekstremum,
- Jego funkcja gęstości (rozkładu) styka się w dwóch punktach (nieujemnych) z osią poziomą (odciętych).

Jednym z takich rozkładów jest rozkład **beta**, który został wybrany przez autorów metody na zasadzie intuicji wynikającej z doświadczeń praktycznych.

Metoda PERT jest więc analityczną procedurą obliczania czasu realizacji przedsięwzięcia wykorzystującą jego sieć: $G = \langle V, U, t \rangle$, w której struktura topologiczna (geometryczna) przedsięwzięcia jest zdeterminowana (znana), zaś losowy (nieznany) czas $t_{\alpha\beta}$ realizacji poszczególnych czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ jest zmienną losową o rozkładzie **beta**.

❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Rozkład **beta** w metodzie **PERT** został praktycznie uzależniony od kilku parametrów (np. na podstawie oceny ekspertów) posiadających następujące znaczenie praktyczne:

$a_{\alpha\beta}$ - najkrótszy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (tzw. **ocena optymistyczna**);

$m_{\alpha\beta}$ - czas realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ posiadający największe prawdopodobieństwo zaistnienia (tzw. **ocena modalna**);

$b_{\alpha\beta}$ - najdłuższy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (tzw. **ocena pesymistyczna**).

Średni czas oraz wariancję realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ możemy uzależnić od parametrów $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}$ następująco:

(*)

$$E[t_{\alpha\beta}] = \frac{a_{\alpha\beta} + 4m_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}}{6}, \quad D^2[t_{\alpha\beta}] = \left(\frac{b_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}}{6} \right)^2$$

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Algorytm metody PERT:

Sieć przedsięwzięcia $G = \langle V, U, a, m, b \rangle$ ma trzy funkcje obciążające jej łuki: $a, b, m: U \rightarrow R^+$, których wartości na łuku czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ reprezentują odpowiednio: $a_{\alpha\beta}$ - optymistyczną, $m_{\alpha\beta}$ - najbardziej prawdopodobną oraz $b_{\alpha\beta}$ - pesymistyczną ocenę czasu $t_{\alpha\beta}$ - trwania takiej czynności.

Parametry te służą do aproksymacji wartości oczekiwanej oraz wariancji czasu trwania czynności (zgodnie ze wzorami (*)).

Podstawowym zadaniem metody **PERT** jest oszacowanie wartości oczekiwanych najwcześniejszych terminów - t_α realizacji zdarzeń $v_\alpha \in V$ w badanej sieci realizacji przedsięwzięcia.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Algorytm jest oparty o wzory rekurencyjne i polega na:

1. Przyjęciu założenia, że $E[t_1] = D^2[t_1] = 0$, gdzie v_1 - jest wierzchołkiem początkowym sieci realizacji przedsięwzięcia.
2. Wartość oczekiwaną $E[t_\beta]$ oraz wariancję $D^2[t_\beta]$ najwcześniejszego możliwego terminu zajścia dla pozostałych zdarzeń $\beta = 2, 3, \dots, n$ oblicza się ze wzorów:

$$E[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]\},$$
$$D^2[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-; E[t_\beta] = E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]} \{D^2[t_\alpha] + D^2[t_{\alpha\beta}]\},$$

Zauważmy, że wartości oczekiwane czasów t_β są wyznaczone analogicznie jak w metodzie CPM. Dlatego obie metody dają identyczne wyniki, jeśli tylko dla każdej czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ spełniony jest następujący warunek: $a_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Uwaga: W metodzie PERT definiuje się także drogi krytyczne $[1,n]$, dla których wartość oczekiwana czasu ich realizacji jest równa średniemu czasowi zakończenia całego przedsięwzięcia:

$$E[t_n] = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,n]}} E[t_{ij}],$$

gdzie: $U_{[1,n]}$ - jest zbiorem łuków ścieżki krytycznej od wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego sieci czynności.

Uwaga: Wariancja czasu t_n najwcześniejszej możliwej realizacji zdarzenia końcowego $v_n \in V$ jest równa maksymalnej wariancji ze zbioru wszystkich dróg krytycznych badanej sieci przedsięwzięcia.

Przyjmuje się, że rozkład czasu realizacji całego przedsięwzięcia jest asymptotycznie normalny o średniej $E[t_n]$ i odchyleniu standardowym $\sigma[t_n] = \sqrt{D^2[t_n]}$, czyli korzystając z tego założenia można oszacować prawdopodobieństwo dotrzymania terminu realizacji przedsięwzięcia:

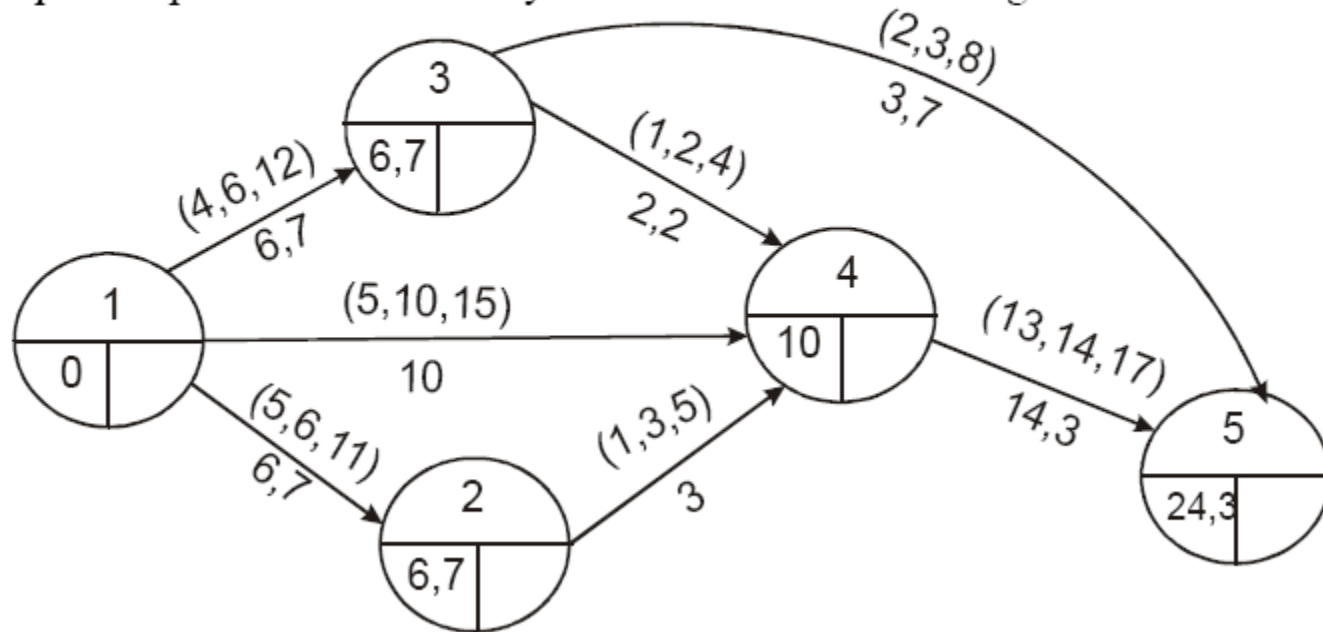
$$P(t_n \leq t_{dane}) \approx \Phi\left(\frac{t_{dane} - E[t_n]}{\sigma[t_n]}\right),$$

gdzie: Φ - jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$.

❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Przykład:

Dla przedsięwzięcia, którego model sieciowy przedstawiono na rysunku obliczyć średni (oczekiwany) czas jego realizacji, wariancję czasu jego realizacji oraz prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego $T^* = 25$ dni.



❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Średnie czasy trwania czynności i wariancje dla czynności obliczamy:

$$E[t_{\alpha\beta}] = \frac{a_{\alpha\beta} + 4m_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}}{6}, \quad D^2[t_{\alpha\beta}] = \left(\frac{b_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}}{6} \right)^2$$

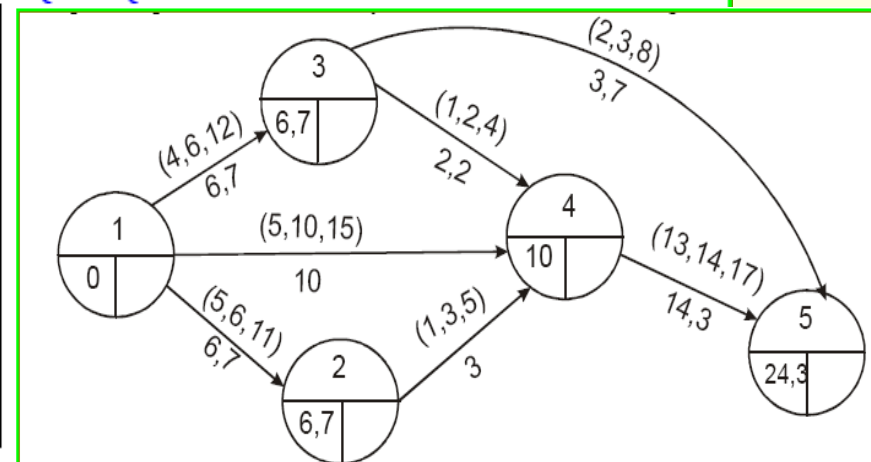
Oczekiwany czas trwania przedsięwzięcia i jego wariancję obliczamy rekurencyjnie:

$$E[t_{\beta}] = \max_{v_{\alpha} \in \Gamma_{\beta}^-} \{E[t_{\alpha}] + E[t_{\alpha\beta}]\},$$

$$D^2[t_{\beta}] = \max_{v_{\alpha} \in \Gamma_{\beta}^-; E[t_{\beta}] = E[t_{\alpha}] + E[t_{\alpha\beta}]} \{D^2[t_{\alpha}] + D^2[t_{\alpha\beta}]\}$$

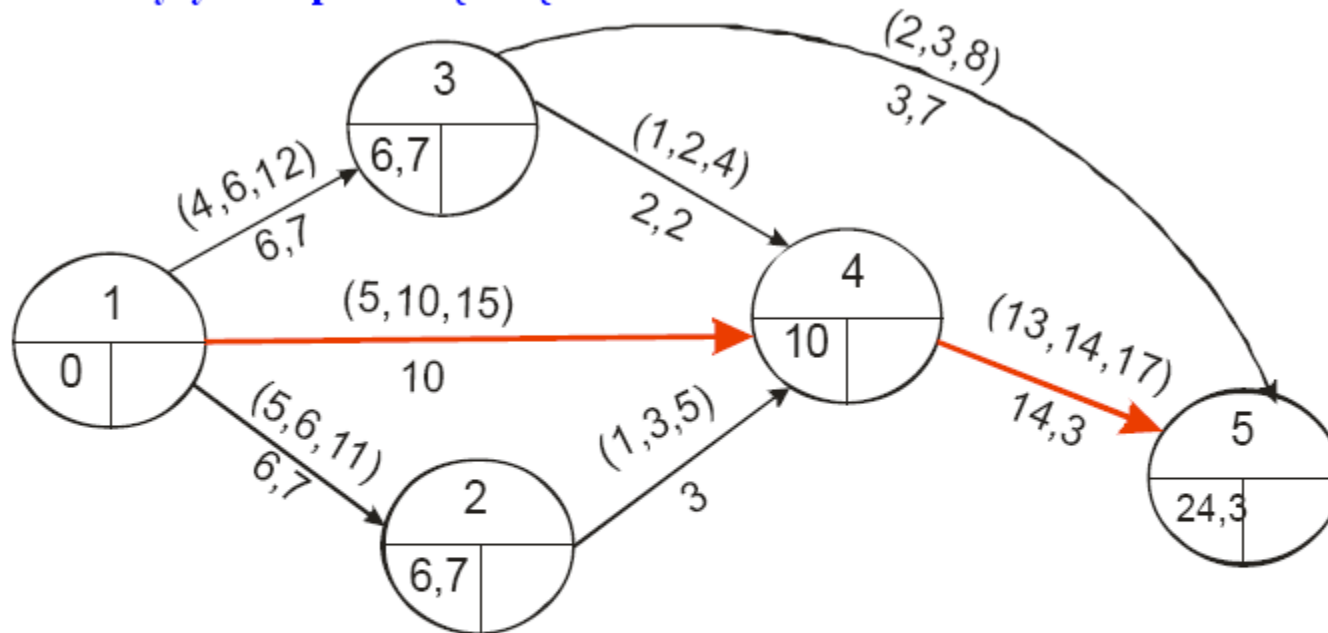
Tabela obliczonych charakterystyk przedsięwzięcia:

Zdarzenie:	$D^2[t_{\beta}]$	Czynność:	$D^2[t_{\alpha\beta}]$
1	0	(1,2)	1
2	1	(1,3)	1,8
3	1,8	(1,4)	2,8
4	2,8	(2,4)	0,4
5	3,2	(3,4)	0,25
		(3,5)	1
		(4,5)	0,4



❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Ścieżka krytyczna przedsięwzięcia:



- Prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego = 25 dni wynosi:

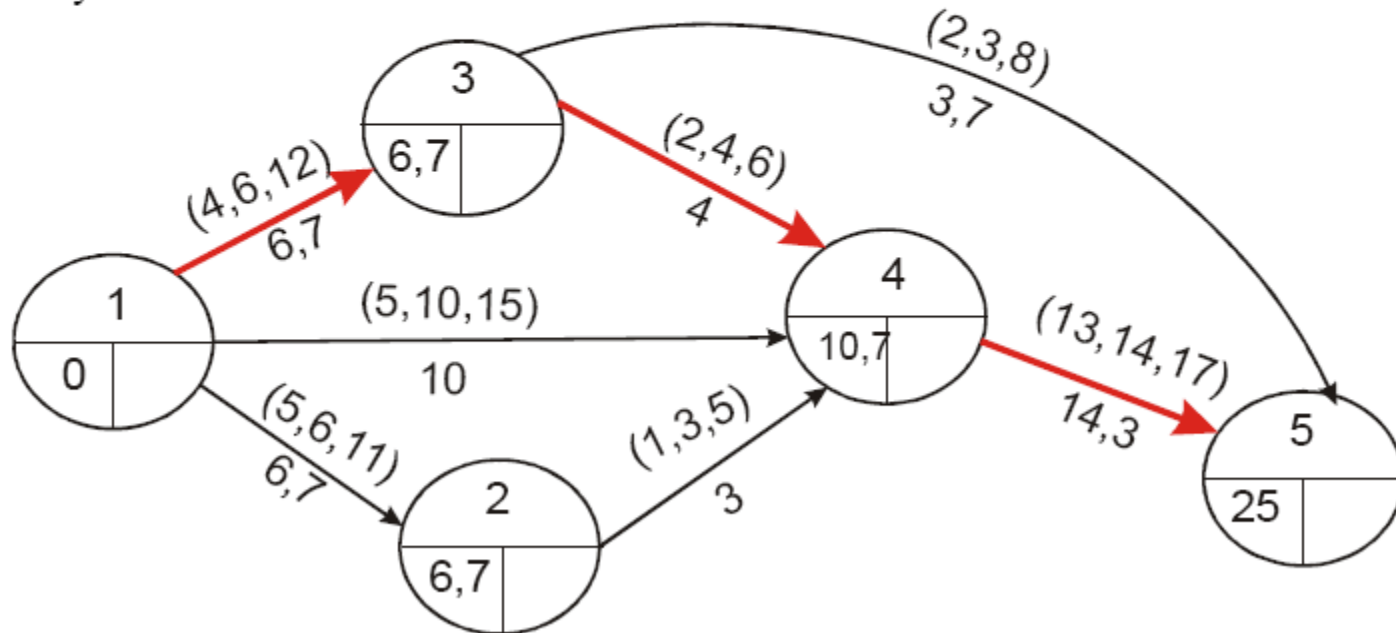
$$P(t_5 \leq 25) \approx \Phi\left(\frac{25 - 24,3}{\sqrt{3,2}}\right) \approx \Phi(0,39) \approx 0,52$$

- istnieje przeciętne ryzyko związane z realizacją tego przedsięwzięcia.

❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

- Jak zmieni się czas wykonania przedsięwzięcia, gdy czynność: (3,4) będzie realizowana w czasie: najkrótszym – 2 dni, modalnym – 4 dni oraz najdłuższym – 6 dni ?

Powstanie nowa ścieżka krytyczna, a oczekiwany termin realizacji ulegnie wydłużeniu do 25 dni.



ANALIZA CZASOWO – KOSZTOWA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

W rozważaniach dotyczących sieciowej analizy przedsięwzięć z funkcją czasu (metoda CPM) konstruując optymalny harmonogram realizacji przedsięwzięcia przyjętym kryterium optymalności była minimalizacja czasu realizacji całego przedsięwzięcia.

W analizie ekonomicznej realizowanych przedsięwzięć niezmiernie ważne jest także podejście kosztowe – mające na celu oszacowanie kosztów realizacji badanego przedsięwzięcia.

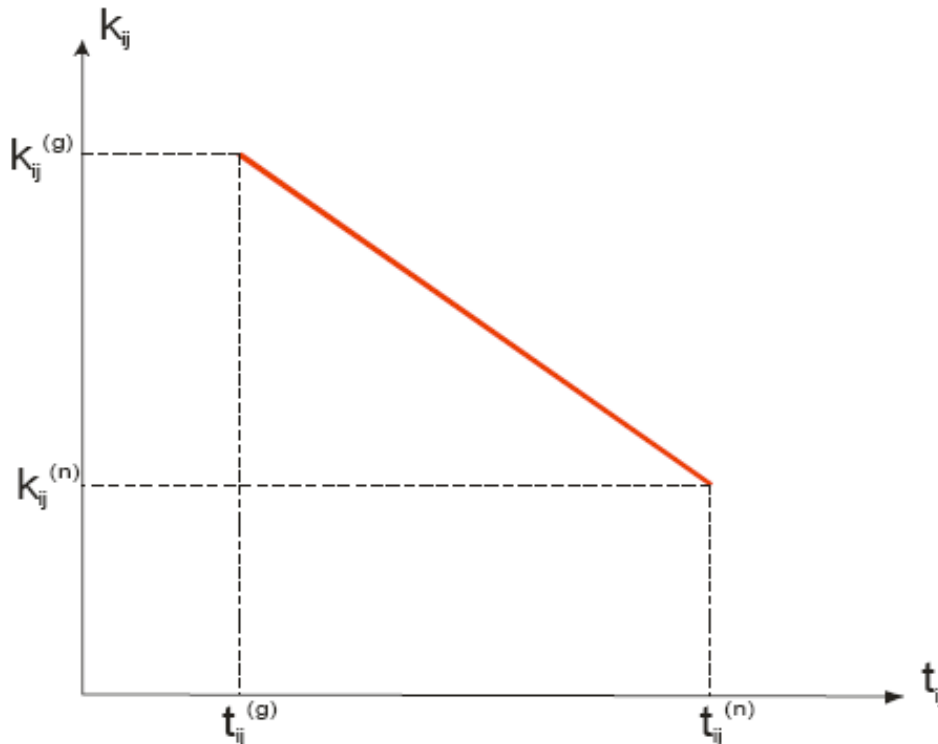
Analiza harmonogramu realizacji przedsięwzięć z uwzględnieniem kosztów ich realizacji nosi nazwę analizy czasowo – kosztowej i posiada w planowaniu sieciowym bardzo ważną rolę.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że czas trwania poszczególnych czynności jest ustalony i związany jest on z wykonaniem czynności w zwykłych (normalnych warunkach). Taki czas wykonania czynności będziemy nazywać – normalnym czasem trwania czynności : $t_{ij}^{(n)}$, a koszt związany z realizacją czynności w tym czasie nazywać będziemy – kosztem normalnym: $k_{ij}^{(n)}$.

W niektórych przypadkach czasy trwania czynności mogą ulec skróceniu. Wiąże się to jednak za koniecznym zaangażowaniem dodatkowych środków, co pociąga za sobą wzrost kosztów wykonania tej czynności.

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Najkrótszy możliwy czas, w którym wykonana dana czynność z wykorzystaniem wszystkich zaangażowanych środków – nazywamy **granicznym czasem** trwania czynności: $t_{ij}^{(g)}$. Koszt realizacji czynności w czasie granicznym nazywamy **kosztem granicznym**: $k_{ij}^{(g)}$.



Uwaga:

Zakładamy, że funkcję kosztów w przedziale $[t_{ij}^{(g)}, t_{ij}^{(n)}]$ można aproksymować funkcją liniową, a skrócenie czasu trwania jednej czynności nie wpływa na czas trwania pozostałych.

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Przyjmujemy oznaczenia:

$\Delta t_{ij} = t_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(g)}$ - odcinek czasu o jaki możemy maksymalnie skrócić czynności przedsięwzięcia (wykonywane w czasie normalnym) do czasów granicznych;

$\Delta k_{ij} = k_{ij}^{(g)} - k_{ij}^{(n)}$ - wzrost kosztów realizacji czynności wynikający ze skrócenia czasów trwania czynności do czasów granicznych;

$S_{ij} = \frac{k_{ij}^{(g)} - k_{ij}^{(n)}}{t_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(g)}}$ - **średni gradient kosztu** – określa przyrost kosztów

wykonania czynności spowodowany skróceniem czasu trwania czynności o jednostkę.

W tak pojmowanym planowaniu sieciowym bardzo ważnym zagadnieniem programowania sieciowego jest wszechstronna analiza przedsięwzięć w aspekcie ekonomicznym oraz możliwość modyfikacji modelu, poprzez kompresję sieci – wynikającą ze **zbyt długiego** dla inwestora lub odbiorcy okresu realizacji przedsięwzięcia.

Względy ekonomiczne powodują, że należy rozpatrzyć techniczne możliwości **skrócenia** wykonania całego przedsięwzięcia, aby **koszty** jego realizacji były **jak najniższe**.

Wiązać się to będzie z ułożeniem takiego programu przyspieszenia, aby największa akceleracja przypadła na te czynności krytyczne, których koszty przyspieszenia będą najniższe.

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

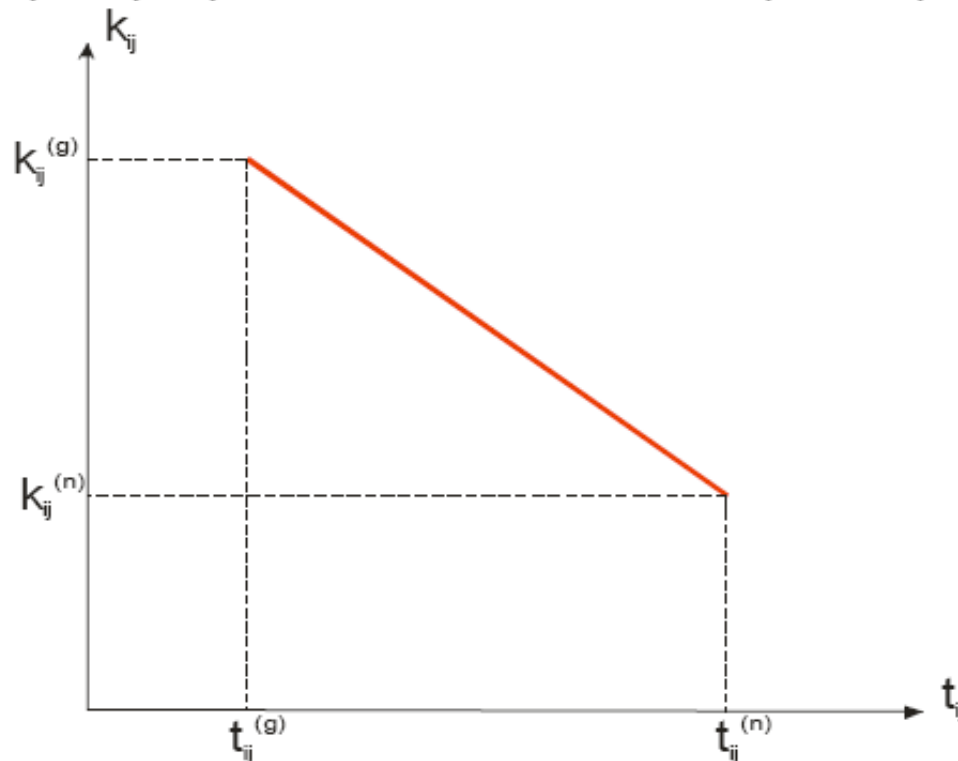
W tego typu analizie rozpatruje się różnego rodzaju koszty składające się na sumaryczny koszt realizacji całego przedsięwzięcia. Uwzględnia się zazwyczaj następujące rodzaje kosztów:

- **Koszty stałe** (dotyczące sporządzenia dokumentacji, pozyskania środków wytwarzania itp.);
- **Koszty bezpośrednie** (dotyczące robocizny, materiałów, maszyn itp. – występują dla każdej czynności przedsięwzięcia);
- **Koszty pośrednie** (związane głównie z czasem realizacji przedsięwzięcia i dotyczą dla przykładu przestojów na stanowiskach pracy, kar za nieterminowość wykonania itp.);
- **Koszty zamrożenia kapitału** (dotyczące nakładów inwestycyjnych, zasobów itp.)

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

W rozważaniach ograniczymy się tylko do kosztów bezpośrednich.

Koszty bezpośrednie wykonania czynności dla dowolnego czasu jej trwania $t_{ij}^{(g)} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{(n)}$ można obliczyć ze wzoru: $k_{ij} = -a \cdot t_{ij} + b = -s_{ij}t_{ij} + (k_{ij}^{(n)} + s_{ij}t_{ij}^{(n)})$



□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Celem analizy czasowo kosztowej jest wyznaczenie takich czasów trwania poszczególnych czynności, dla których całkowity koszt bezpośredni realizacji przedsięwzięcia jest minimalny. Zadanie to można przedstawić za pomocą następującego zadania – ZPL:

$$K = \sum_{(i,j) \in U} \left[\left(k_{ij}^{(n)} + s_{ij} t_{ij}^{(n)} \right) - s_{ij} t_{ij} \right] \rightarrow \min$$

Przy warunkach dla każdej czynności sieci $(i, j) \in U$:

$$\begin{cases} t_i + t_{ij} \leq t_j, \\ t_{ij}^{(g)} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{(n)}, \\ t_1 = 0, t_n \leq T^{(g)} \end{cases}$$

gdzie: $T^{(g)}$ - czas graniczny zakończenia przedsięwzięcia.

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Uwaga :

Można również sformułować inaczej problem, tzn. minimalizować łączny czas realizacji całego przedsięwzięcia, tak aby łączne koszty bezpośrednie tego przedsięwzięcia nie przekroczyły pewnego - z góry ustalonego limitu środków. Tak sformułowane zagadnienie prowadzi do następującego zadania ZPL:

$$\begin{cases} t_n \rightarrow \min, \\ t_i + t_{ij} \leq t_j, \quad t_{ij}^{(g)} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{(n)} \quad \text{dla } (i,j) \in U, \\ \sum_{(i,j) \in U} [k_{ij}^{(n)} + s_{ij} t_{ij}^{(n)}] - s_{ij} t_{ij} \leq K, \end{cases}$$

W ułożeniu programu przyspieszającego wykonanie przedsięwzięcia pomaga wykorzystanie specjalnego algorytmu analizy czasowo-kosztowej znanego pod nazwą: **CPM - COST**.

Zastosowanie algorytmu kompensacji sieci zostanie omówione na następującym przykładzie.

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Przykład:

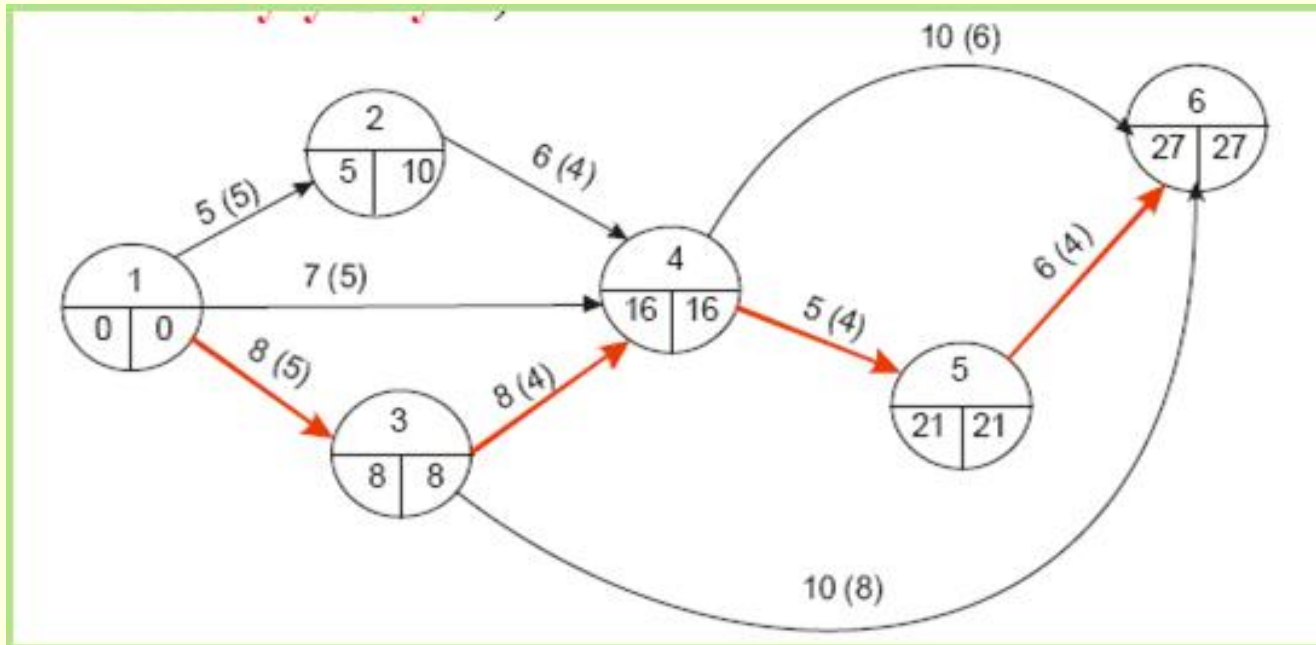
Pewien etap większego przedsięwzięcia składa się z 9 czynności których czasy normalne, czasy graniczne, koszty normalne i koszty graniczne podane są w tabeli.

Czynność (i,j)	t_n	t_{gr}	K_n	K_{gr}
(1,2)	5	5	30	30
(1,3)	8	5	44	50
(1,4)	7	5	30	35
(2,4)	6	4	25	30
(3,4)	8	4	35	40
(3,6)	10	8	44	50
(4,5)	5	4	10	12
(4,6)	10	6	24	28
(5,6)	6	4	20	26

- Wykreślić sieć czynności oraz wyznaczyć ścieżkę krytyczną;
- O ile tygodni można maksymalnie zredukować czas realizacji przedsięwzięcia ? Jak w tym wypadku kształtować będą się koszty.

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Sieć czynności oraz ścieżka krytyczna:



□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

2. Wyznaczyć dla czynności krytycznych gradienty kosztów: $S_{ij} = \frac{K_{ij}^{(g)} - K_{ij}^{(n)}}{t_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(g)}}$

Czynność (i,j)	t_n	t_{gr}	K_n	K_{gr}	S_{ij}	$Z_c(i, j)$
(1,2)	5	5	30	30	-	5
(1,3) (*)	8	5	44	50	2	0 (*)
(1,4)	7	5	30	35	2,5	9
(2,4)	6	4	25	30	2,5	5
(3,4) (*)	8	4	35	40	1,25	0 (*)
(3,6)	10	8	44	50	3	9
(4,5) (*)	5	4	10	12	2	0 (*)
(4,6)	10	6	24	28	1	1
(5,6) (*)	6	4	20	26	3	0 (*)

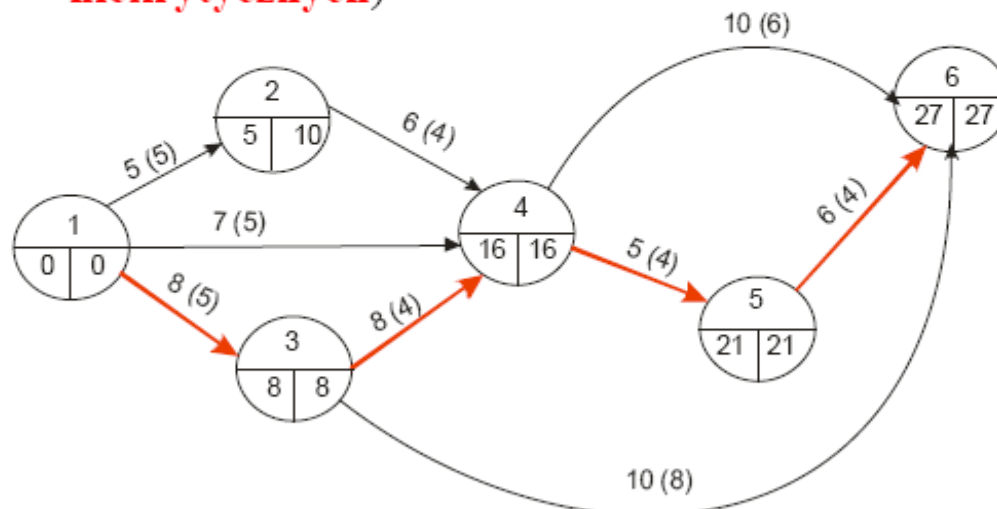
3. Wyeliminować te czynności krytyczne dla których średni gradient nie istnieje ($t_{ij}^{(n)} = t_{ij}^{(g)}$) – **w przykładzie: (1,2) – ale ona jest niekrytyczna**
4. Proces skracania czasów wykonania czynności rozpoczyna się od czynności krytycznej o najniższym gradiencie kosztów
Dla naszego przykładu od czynności (3,4) – gradient wynosi: 1,25

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

5. Skracając czasy trwania czynności krytycznych należy starać się skrócić jej czas o jak największą możliwą liczbę jednostek.

Należy przestrzegać jednak dwa ograniczenia:

- skracamy **do czasu granicznego**
- skracamy **dotąd** aż pojawi się **nowa ścieżka krytyczna** (pojawia się wówczas, gdy **zniknie zapas czasu całkowitego** w ciągu **czynności niekrytycznych**)

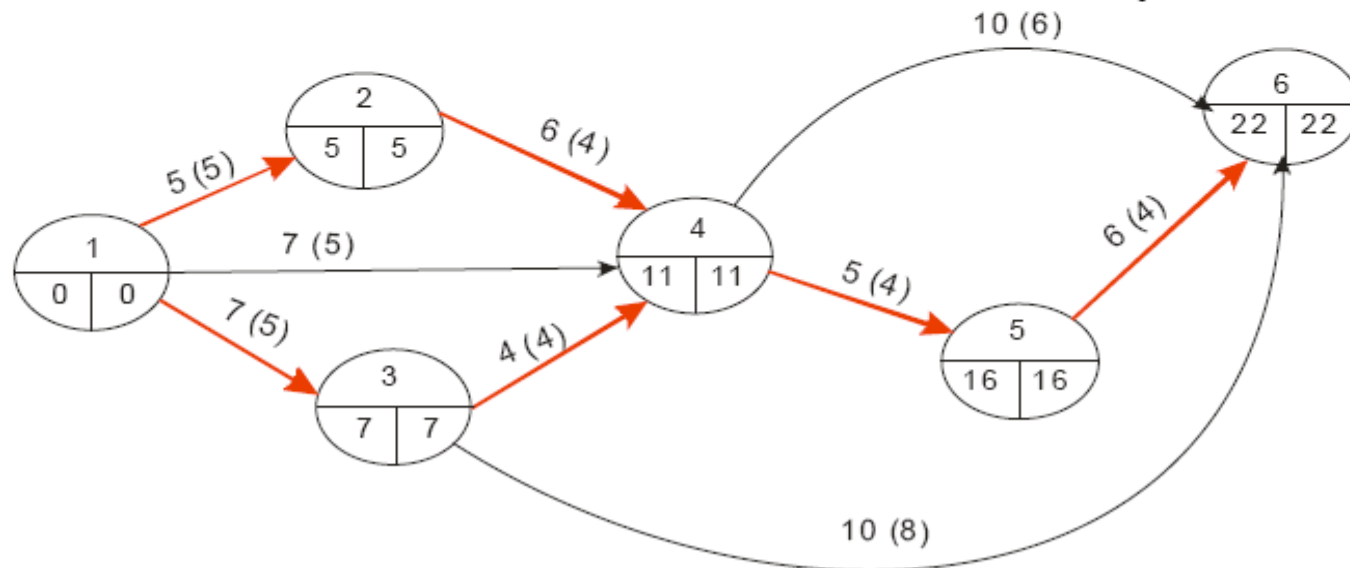


Skracamy czynność (3,4) o 4 jednostki – koszt skrócenia czynności (przyspieszenia realizacji przedsięwzięcia) wynosi: $K_1 = S_{34} \cdot 4 = 1,25 \cdot 4 = 5$.
Czas trwania przedsięwzięcia wynosi: $t_6 = 27 - 4 = 23$.

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Kolejną czynnością którą będziemy skracać jest np. (1,3) – nie możemy jednak skrócić jej o 3 dni, bo i tak termin wykonania wyniesie 22 dni - nowa ścieżka krytyczna: **1-2-4-5-6** i poniesiemy niepotrzebne koszty. Skracamy ją zatem tylko o 1 dzień. Koszt przyspieszenia realizacji przedsięwzięcia wynosi: $K_2 = S_{13} \cdot 1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Nowa sieć po 2-krotnym skróceniu czasów trwania czynności przedsięwzięcia. Czas wykonania przedsięwzięcia wynosi: $t_6 = 22$.

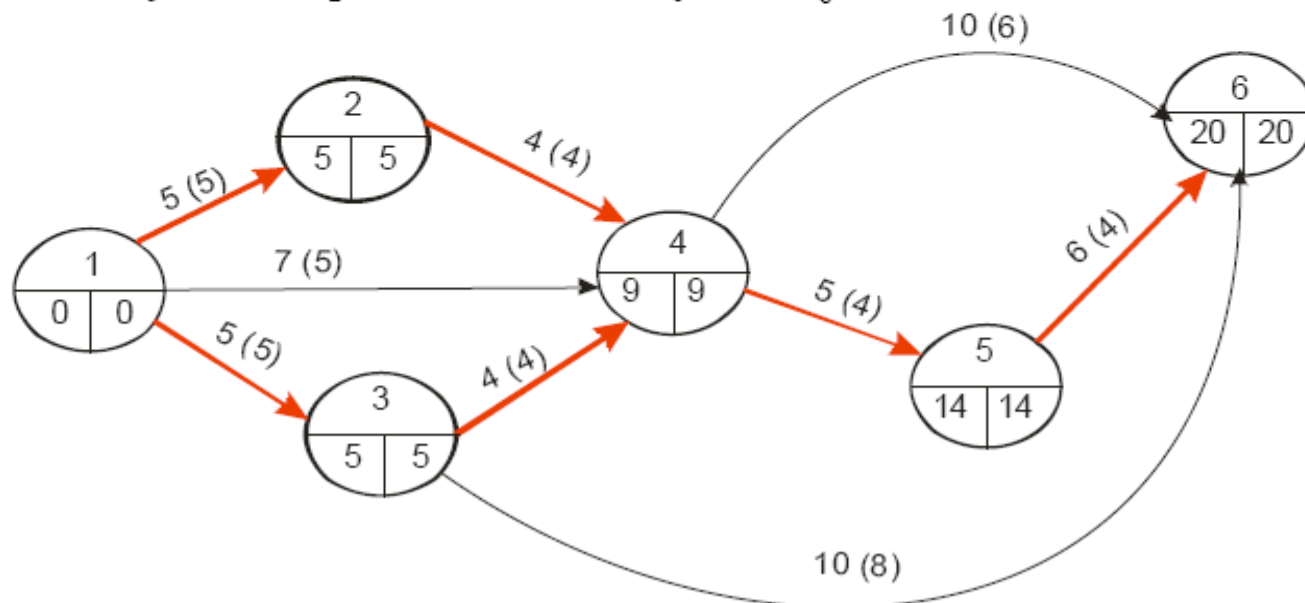


❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

6. Jeżeli występuje dwie lub więcej ścieżek krytycznych, należy skracać czasy o tę samą wielkość na wszystkich równoległych ścieżkach krytycznych. Możemy teraz w dalszym ciągu skrócić czynność (1,3) o pozostałe 2 jednostki. Tym samym należy skrócić o 2 jednostki także czynność (2,4), leżącą na drugiej równoległej ścieżce krytycznej. Koszt przyspieszenia realizacji przedsięwzięcia wynosi zatem:

$$K_3 = S_{13} \cdot 2 + S_{24} \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 2,5 \cdot 2 = 4 + 5 = 9.$$

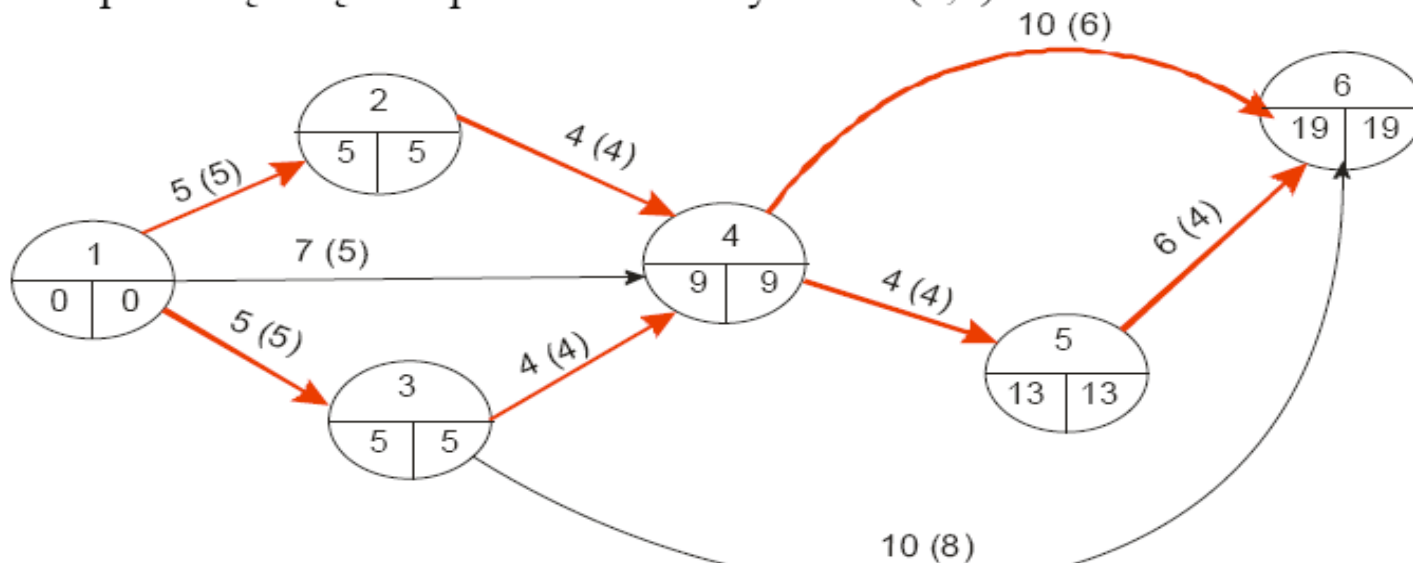
Czas wykonania przedsięwzięcia wynosi: $t_6 = 22 - 2 = 20$.



□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Kolejną skracaną czynnością krytyczną – która posiada najmniejszy gradient kosztów, a nie została jeszcze skrócona – jest czynność: (4,5), którą skracamy o 1 jednostkę. Koszt przyspieszenia realizacji przedsięwzięcia wynosi zatem: $K_4 = S_{45} \cdot 1 = 2 \cdot 1 = 2$. Czas wykonania przedsięwzięcia wynosi: $t_6 = 20 - 1 = 19$.

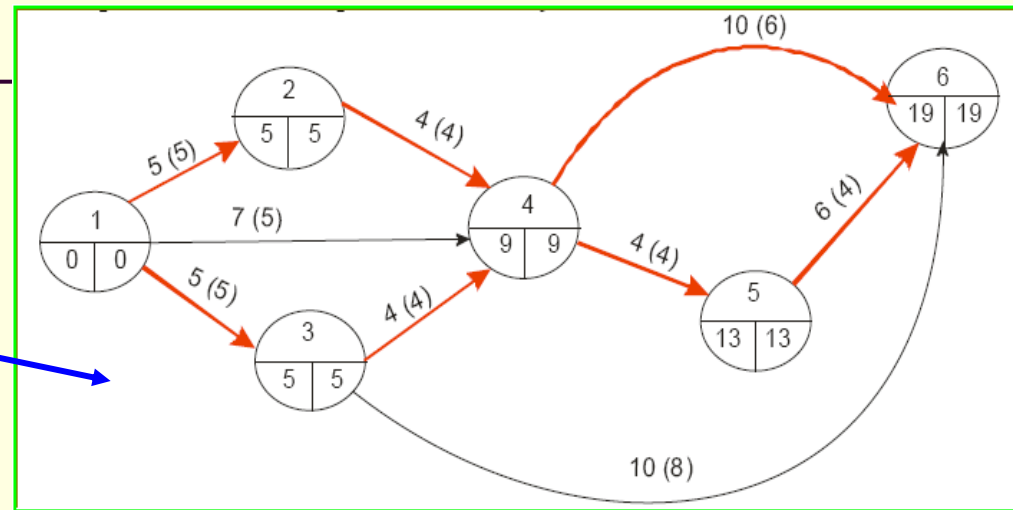
Sieć przedsięwzięcia – po skróceniu czynności (4,5):



Powstają dwie kolejne równoległe ścieżki krytyczne: 1-2-4-6 oraz 1-3-4-5-6.

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

aktualna sieć czynności



Kolejną skracaną czynnością krytyczną – która posiada najmniejszy gradient kosztów, a nie została jeszcze skrócona – jest czynność: (5,6), którą skracamy o 2 jednostki. Tym samym czynność (4,6) należy również skrócić o 2 jednostki. Koszt przyspieszenia realizacji przedsięwzięcia wynosi zatem:

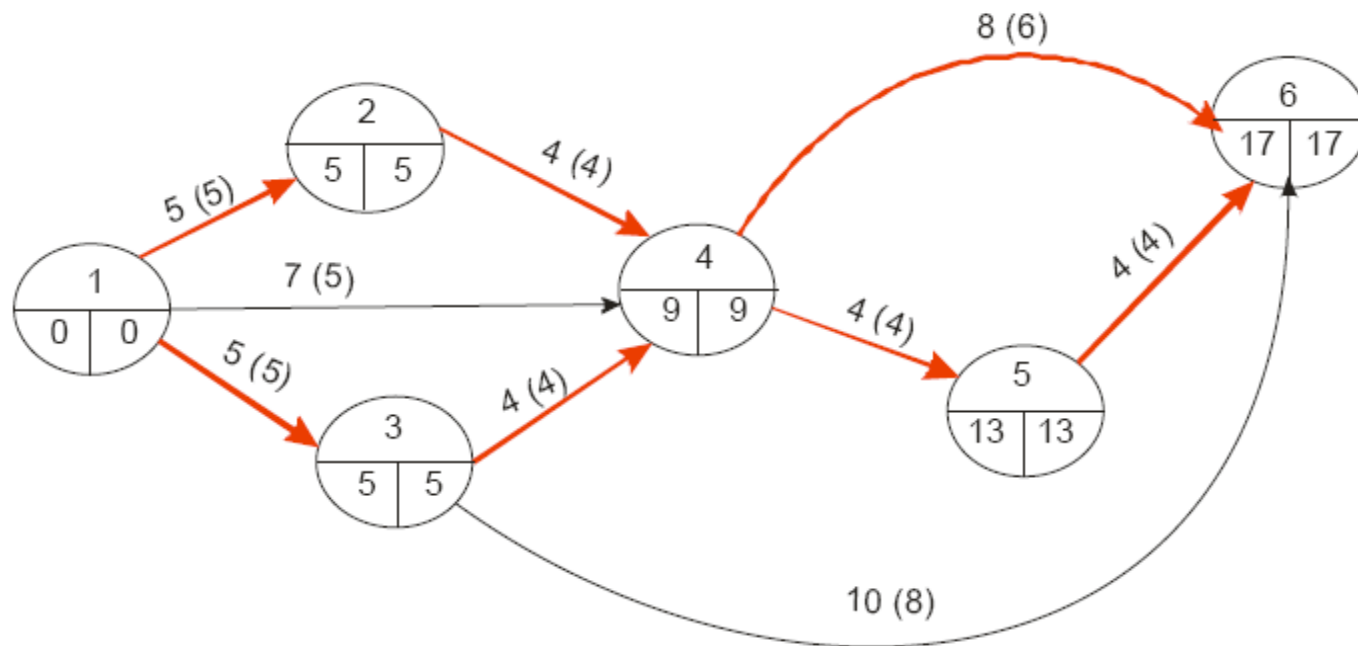
$$K_5 = S_{56} \cdot 2 + S_{46} \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6 + 2 = 8.$$

Czas wykonania przedsięwzięcia zostaje skrócony zatem do wartości:
 $t_6 = 19 - 2 = 17.$

7. Najkrótszy termin wykonania przedsięwzięcia uzyskuje się, gdy wszystkie czynności leżące na jakiegokolwiek drodze krytycznej osiągną czasy graniczne: $t_{ij}^{(g)}$ (wtedy dalsze skracanie jest niemożliwe).

❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Sieć przedsięwzięcia – po skróceniu czynności (5,6) oraz (4,6):



8. Łączne koszty przyspieszenia czasu wykonania przedsięwzięcia są sumą kosztów poniesionych na poszczególnych etapach:

$$K_C = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 = 5 + 2 + 9 + 2 + 8 = 26 \text{ (jednostek)}.$$