MAKSYMALIZACJA PRZEPŁYWU SIECIOWEGO ALGORYTM: FORDA - FULKERSONA

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Bardzo ważną z punktu widzenia zastosowań praktycznych grupę zagadnień sieciowych, stanowią zagadnienia dotyczące optymalizacji (maksymalizacji) przepływu sieciowego w sieciach transportowych typu **Forda – Fulkersona** (nazwa pochodzi od nazwisk twórców algorytmu optymalizacyjnego rozwiązującego tego typu zagadnienia).

Będziemy rozważać **zagadnienie sterowania przepływem** jednorodnego produktu **od dostawcy** (dostawców) poprzez **punkty pośrednie**, aż do **odbiorcy** (odbiorców).

Tego typu zagadnienia są bardzo często spotykane w praktyce:

- wysyłka gotowego produktu z fabryki do hurtowni, a później do sklepów;
- przepływ prądu z elektrowni po liniach wysokiego napięcia do stacji transformatorowych, a później przez linie średniego i niskiego napięcia do odbiorców finalnych;

Powiązania pomiędzy dostawcami, punktami pośrednimi a odbiorcami wygodnie jest przedstawiać w postaci pewnej sieci transportowej, która posiada następujące własności.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Charakterystyczne cechy sieci Forda – Fulkersona:

Występujące we wzorach symbole oznaczają odpowiednio: $|V|$ - ilość elementów zbioru **V**, $\delta : V^2 \to \{0,1\}$ - jest funkcją incydencji (połączenia) za pomocą której określany jest zbiór łuków **U** w grafie **G**. Zbiór ten jest definiowany następująco:

$$U = \{u : u = \langle v_\alpha , v_\beta \rangle \wedge v_\alpha , v_\beta \in V \wedge \delta_{\alpha\beta} = \delta(v_\alpha , v_\beta) = 1\}.$$

(i) $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_m \cup V_{m+1}, |V_0| = |V_{m+1}| = 1 \wedge |V_j| > 1 ; j = 1,2,\ldots, m; m \geq 2$

Wierzchołki sieci należące do zbioru **V** są rozbite na warstwy, które zawierają **nie mniej niż dwa wierzchołki** (za wyjątkiem warstwy pierwszej oraz ostatniej – w których znajduje się po **jednym wierzchołku** – **tzw. węzeł wejścia i wyjścia**).

(ii) Jeżeli $\delta_{\alpha\beta} = \delta(v_\alpha , v_\beta) = 1 \wedge v_\alpha \in V_j \, (j = 0,1,\ldots, m) \Rightarrow v_\beta \in V_{j+1}$.

Połączenie łukiem dwóch dowolnych wierzchołków sieci jest możliwe tylko pomiędzy wierzchołkami należącymi do dwóch sąsiadujących warstw (początek łuku – warstwa poprzednia, koniec łuku warstwa następna).

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

(iii) Jeżeli $\left[v_\alpha \in V_i \wedge v_\beta \in V_j \wedge \left(j = i \vee j < i \vee j - i > 1\right)\right] \Rightarrow \delta_{\alpha\beta} = 0$.

Nie jest możliwe połączenie łukiem dwóch wierzchołków należących do tej samej warstwy, lub gdy wierzchołek końcowy (łuku) należy do warstwy wcześniejszej, lub gdy wierzchołek końcowy należy do kolejnej, ale nie bezpośrednio następnej warstwy.

(iv) $$\underset{j=1,2,\ldots,m;\, v_\beta \in V_j}{\forall} \left[\sum_{v_\alpha \in V_{j-1}} \delta_{\alpha\beta} = \delta(v_\alpha, v_\beta) \geq 1 \wedge \sum_{v_\lambda \in V_{j+1}} \delta_{\beta\lambda} = \delta(v_\beta, v_\lambda) \geq 1 \right].$$

Istnieje co najmniej jeden łuk łączący dowolny wierzchołek danej warstwy (poza warstwą pierwszą i ostatnią) z pewnym wierzchołkiem warstwy następnej oraz analogicznie co najmniej jeden łuk łączący pewien wierzchołek warstwy poprzedniej z rozważanym wierzchołkiem tej warstwy).

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Zbiór łuków **U** może mieć w praktyce bardzo różnorodną interpretację. Łuki możemy na przykład uważać jako skierowane drogi, kanały (połączeń informatycznych), linie energetyczne lub technologiczne, trasy zaopatrzeń (trasy transportowe), a także jako relacje lub pewne zależności finansowe, administracyjne, strukturalne lub organizacyjne.

Na zbiorze łuków określamy dwie funkcje:

- funkcja $c: V^2 \to R^+$, która określa **przepustowość** poszczególnych łuków w sieci typu Forda – Fulkersona (**uwaga:** funkcja **C** na zbiorze: $V^2 - U$ przyjmuje zawsze wartość zero);
- funkcja $x: U \to R^+$, która określa aktualny przepływ $x_{i,j}$ po łukach (i, j) zgodnie z ich orientacją;

Ponieważ wartości funkcji **C** dla poszczególnych elementów ze zbioru łuków „U" możemy uzależnić od dwóch indeksów: $C(u = \langle \alpha, \beta \rangle \in U) = c_{\alpha\beta}$, gdzie **alfa** – indeks wierzchołka początkowego, zaś **beta** – indeks wierzchołka końcowego łuku, to wartości funkcji **C** tworzą macierz kwadratową zwaną **macierzą przepustowości** postaci:

$$C = \lfloor c_{\alpha\beta} \rfloor_{\alpha,\beta=1,2,\ldots,n}$$

Sieć (transportowa) w sensie Forda – Fulkersona jest grafem $G = \langle V, U, c, x \rangle$ z funkcjami obciążającymi łuki, spełniającym warunki (i)-(iv).

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Wykorzystanie sieci typu Forda – Fulkersona do problemu optymalizacji przewozów w sieci transportowej:

Rozważmy dla przykładu zadanie optymalizacyjne efektywności transportu przez pewną **firmę spedycyjną** - polegające na przetransportowaniu jak największej ilości towarów od wierzchołka wejściowego (w naszym przykładzie wierzchołek v_1 - **nadawca towarów**) sieci transportowej **G** do jej wierzchołka wyjściowego (w przykładzie v_7 - **odbiorca towarów**) po skierowanych łukach (kanałach spedycyjnych) przy uwzględnieniu ograniczeń na ich przepustowość (**ograniczenia ładowności posiadanych środków transportowych**).

Graficzna interpretacja zadania:

Rozważana sieć transportowa w sensie Forda - Fulkersona przedstawia się następująco:

$$V_0 = \{1\}, V_1 = \{2,3,4\}, V_2 = \{5,6\}, V_3 = \{7\}.$$

Pomiędzy warstwami sieci **G** zachodzi oczywista równość: $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$.

Łuki generuje macierz incydencji $\left[\delta_{\alpha\beta}\right]_{\alpha,\beta \in V}$, gdzie poszczególne jej składowe są postaci:

$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = 1$, $\delta_{25} = \delta_{26} = 1$, $\delta_{35} = 1$, $\delta_{45} = \delta_{46} = 1$, $\delta_{57} = 1$, $\delta_{67} = 1$, a na pozostałych parach wierzchołków (węzłów) zachodzi: $\delta_{ij} = 0$.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Maksymalna ładowność środków transportowych na poszczególnych etapach transportu (zgodnie z macierzą incydencji) podaje tabela:

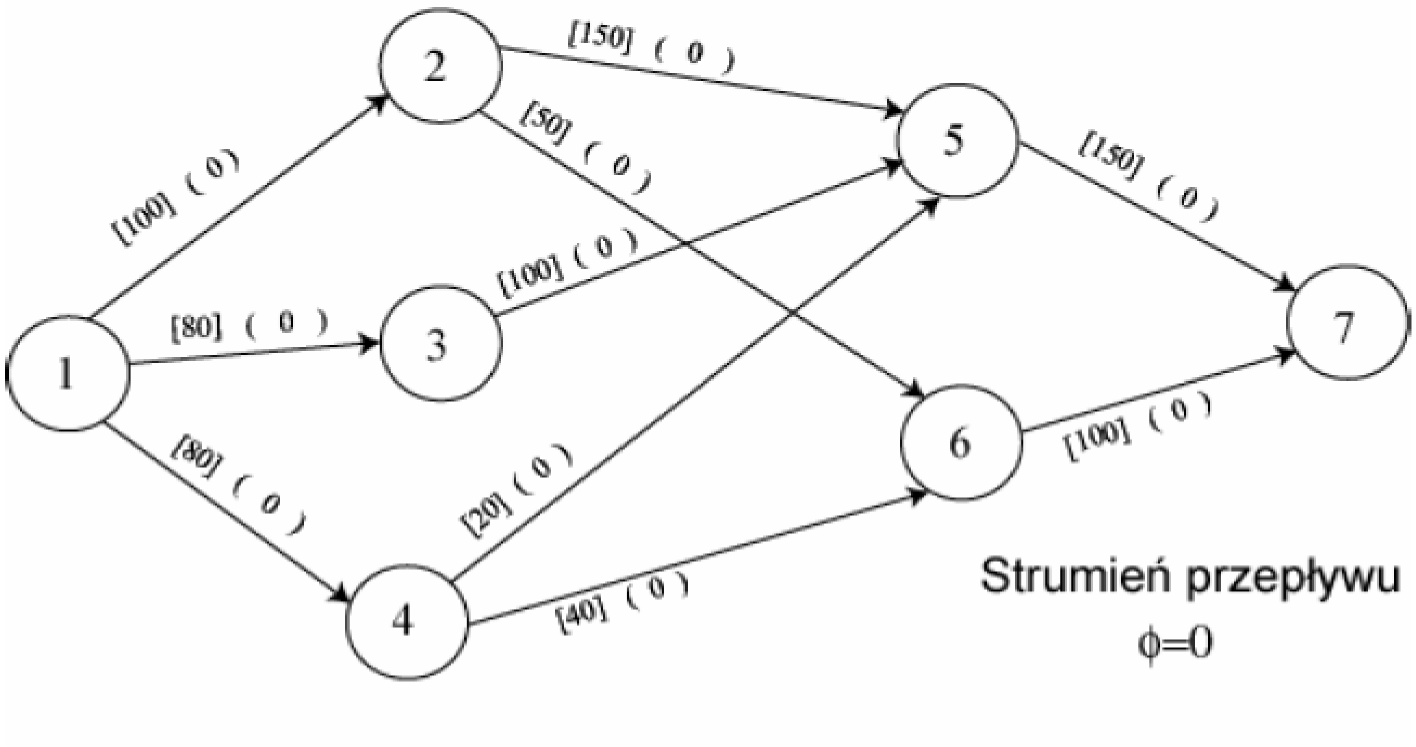
Kanał transportowy $\langle i, j \rangle$	Maksymalna ładowność C_{ij} (w tonach)
$\langle 1,2 \rangle$	100
$\langle 1,3 \rangle$	80
$\langle 1,4 \rangle$	80
$\langle 2,5 \rangle$	150
$\langle 2,6 \rangle$	50
$\langle 3,5 \rangle$	100
$\langle 4,5 \rangle$	20
$\langle 4,6 \rangle$	40
$\langle 5,7 \rangle$	150
$\langle 6,7 \rangle$	100

Rysunek przedstawia graficzną interpretację zadania za pomocą sieci transportowej Forda – Fulkersona.

Graf ten jest siecią z **przepustowościami** $c_{\alpha\beta}$ naniesionymi na łuki zgodnie z danymi zaczerpniętymi z tabeli. W nawiasach okrągłych przedstawiony jest **aktualny transport** $(x_{ij} \geq 0)$ przez dany kanał transportowy

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

(obecnie wszędzie 0). **Aktualny strumień przepływu** (liczony jako suma $\sum_{i \in \Gamma_7^-} x_{i7}$ wynosi 0).



Aby najlepiej zrealizować swój cel firma spedycyjna rozwiązuje zadanie transportowe algorytmem Forda – Fulkersona – opublikowanym w pracy:

Ford L. R., Fulkerson D. R., Przepływy w sieciach, PWN, W-wa, 1969.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

W algorytmie tym poszukuje się tzw. **strumienia maksymalnego** Φ_{max} określającego jaką maksymalną ilość towarów z węzła **początkowego** możemy łukami (drogami dystrybucji) przetransportować do węzła **końcowego** nie przekraczając jednocześnie przepustowości (dopuszczalnej ładowności) na poszczególnych łukach sieci.

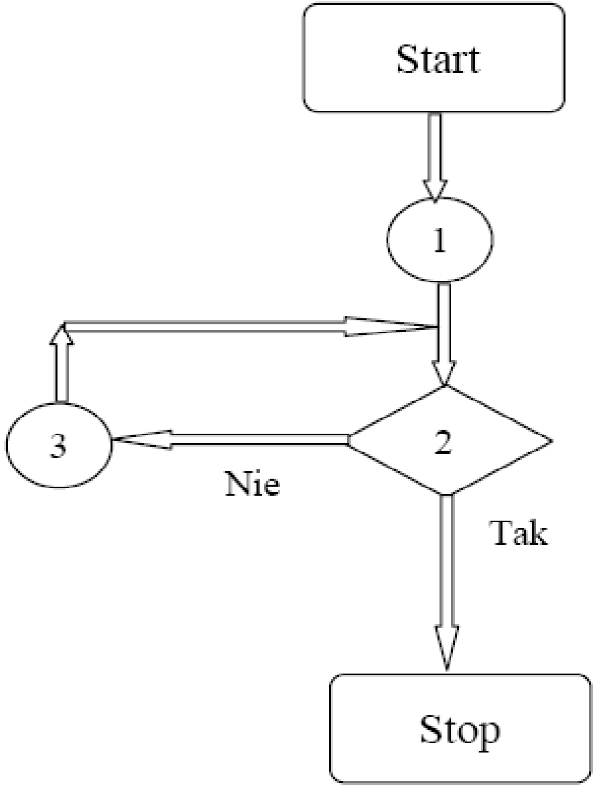
Idea algorytmu jest następująca:
Najpierw poszukuje się jakiegokolwiek dopuszczalnego **strumienia** Φ przepływu (spełniającego tzw. **Prawo Kirchoffa** dla sieci), taki strumień początkowy zawsze istnieje (w najgorszym wypadku jest to strumień zerowy). W dalszych krokach algorytmu strumień ten odpowiednio się poprawia, nasycając kolejne łuki, tak aby uzyskać wreszcie wartość maksymalną.

W sieci forda – fulkersona dla każdego wierzchołka grafu zachowane jest tzw. **I prawo Kirchoffa dla przepływu** (odpowiednik prawa Kirchoffa dla prądu elektrycznego): **Sumaryczny wpływ do każdego wierzchołka sieci za wyjątkiem wierzchołka wejściowego i wyjściowego jest równy sumarycznemu wypływowi z tego węzła (wpływ bilansuje wypływ).**
Zatem dla każdego $j \in V - \{1, n\}$ zachodzi $\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{i,j} = \sum_{k \in \Gamma_j^+} x_{j,k}$.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Powiemy, że łuk $\langle i, j\rangle$ jest **nasycony**, jeśli jego przepustowość jest całkowicie wykorzystana (realizacja dystrybucji towarów wymaga na tym etapie wykorzystania transportu o maksymalnie dostępnej ładowności), tzn. $x_{i,j} = c_{i,j}$.

Schemat algorytmu Forda – Fulkersona:



Krok 1 – wyznaczenie jakiegokolwiek początkowego strumienia przepływu (spełniającego prawo Kirchoffa).

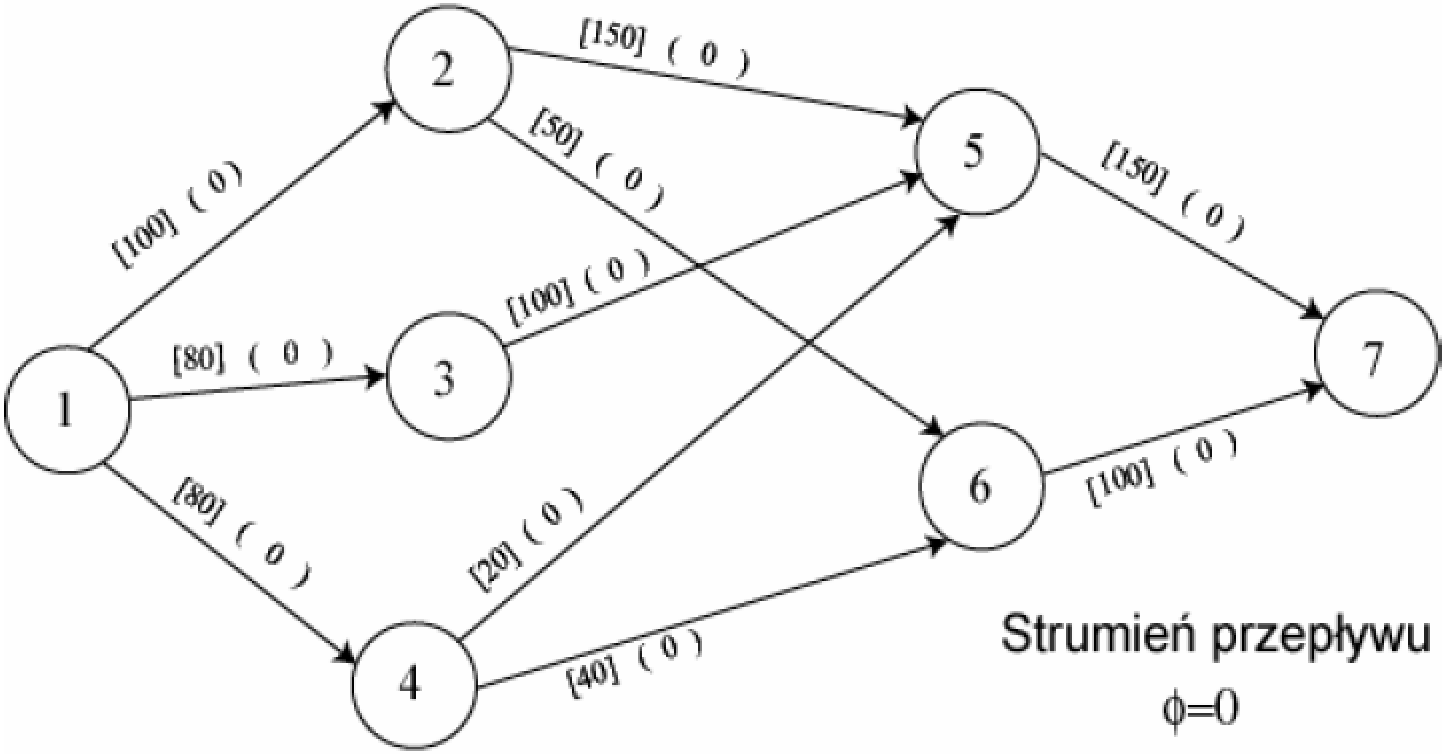
Krok 2 – sprawdzenie warunku czy wyznaczony strumień przepływu jest maksymalny (**wykorzystanie procedury cechowania wierzchołków – kryterium max przepływu**).

Krok 3 – polepszenie wartości strumienia poprzez lepsze nasycenie jego łuków.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Realizacja kroku 1:

W kroku tym staramy się wyznaczyć jakikolwiek strumień początkowy. Początkową dystrybucję towarów (przy najgorszym zerowym strumieniu przepływu) przedstawia rysunek.



❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Realizacja kroku 2:
Aby zbadać czy strumień zupełny jest maksymalny należy zastosować procedurę cechowania wierzchołków zaproponowaną przez **Forda i Fulkersona**.
Cechowanie wierzchołków zawsze zaczynamy od wierzchołka wejściowego v_1, któremu nadajemy cechę $(-,\infty)$. Wierzchołek ten staje się **ocechowany** ale **niezbadany**.
Następnie bierzemy pod uwagę kolejny wierzchołek ocechowany, ale jeszcze niezbadany i rozpatrujemy wszystkie wierzchołki **nieocechowane** do niego **sąsiednie** (tzn. z niego wychodzące lub do niego wchodzące) i staramy się je ocechować zgodnie z **procedurą**:

Oznaczenia: **j** – numer wierzchołka ocechowanego badanego, **l** - numer wierzchołka, który cechujemy.

- Jeżeli $(j,l) \in U$ oraz $x_{j,l} < c_{j,l}$ (**nie jest to łuk maksymalnie nasycony**), to wierzchołkowi: **l** - nadajemy cechę $(j, \varepsilon_l = \min\{\varepsilon_j, c_{j,l} - x_{j,l}\}$.
- Jeżeli $(l,j) \in U$ oraz $x_{l,j} > 0$ (**istnieje już jakiś przepływ przez ten łuk**), to wierzchołkowi: **l** - nadajemy cechę $(j, -\varepsilon_l = \min\{\varepsilon_j, x_{l,j}\}$.

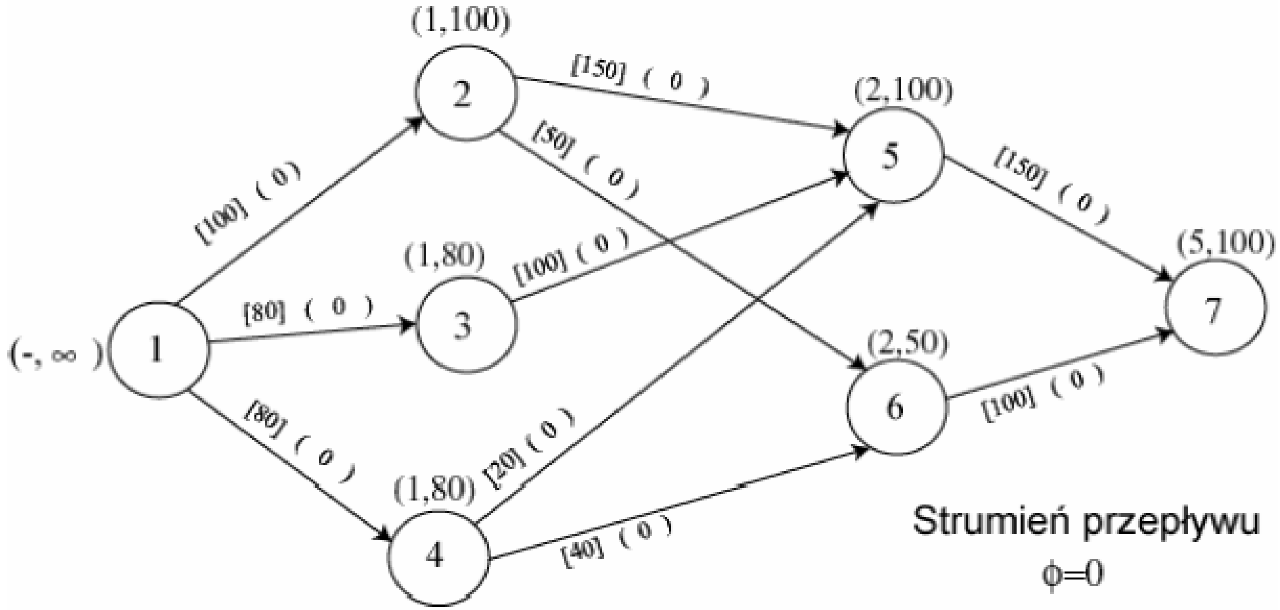
Wierzchołek: **j** - badany staje się wtedy **ocechowany i zbadany**. Przechodzimy do kolejnego wierzchołka ocechowanego i niezbadanego i procedurę cechowania powtarzamy, aż uda się ocechować **wierzchołek wyjściowy** (v_n).

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Kryterium optymalności (maksymalności) strumienia przepływu:

Aktualny strumień przepływu jest maksymalny, jeżeli stosując procedurę cechowania wierzchołków nie da się ocechować węzła wyjścia.

Stosując procedurę cechowania wierzchołków do naszego przykładu otrzymujemy:

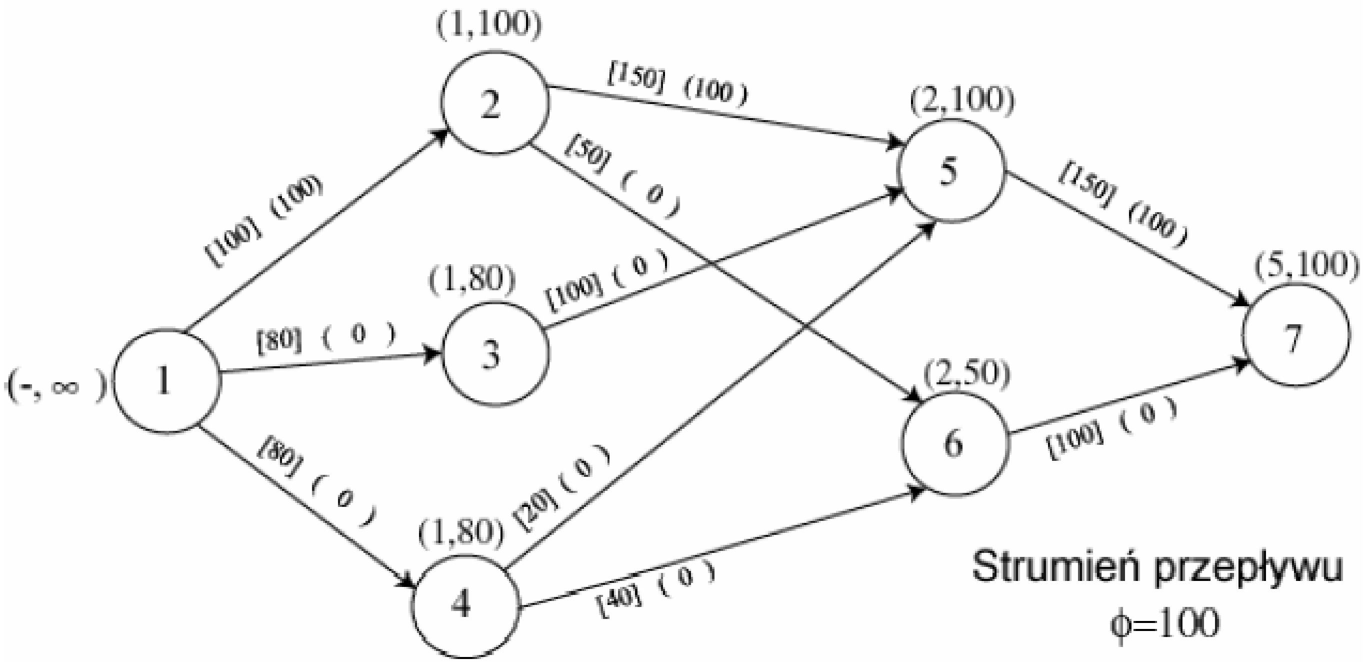


❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Możliwe było ocechowanie wierzchołka wyjściowego zatem (co było do przewidzenia) strumień zerowy nie jest maksymalny.

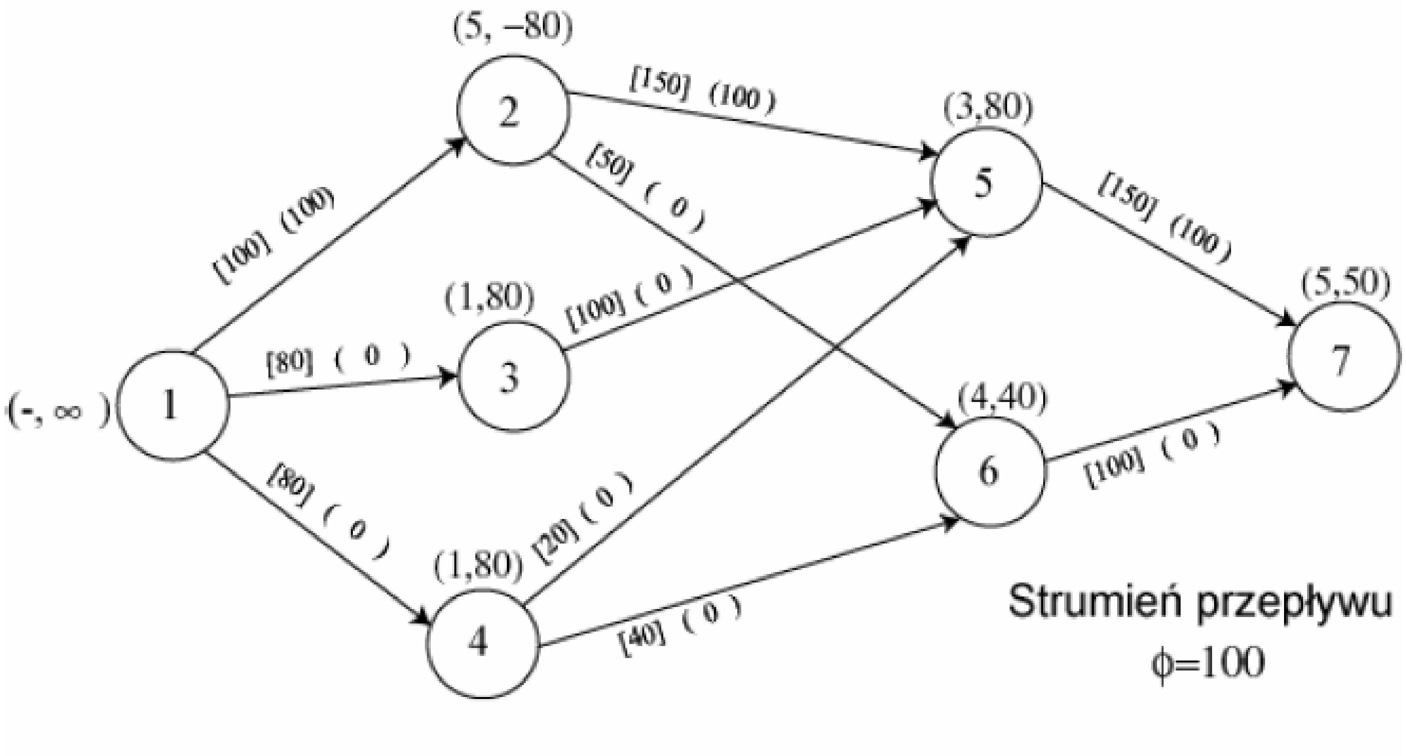
Realizacja kroku 3:

Procedura cechowania wierzchołków podaje ponadto o ile możemy poprawić wartość aktualnego strumienia. Mówi o tym wartość: $\varepsilon_7 = 100$ **przypisana wierzchołkowi wyjścia**. Pierwsze składowe cech podają nam również **ścieżkę zwiększającą ten przepływ: 1 – 2 – 5 – 7**.



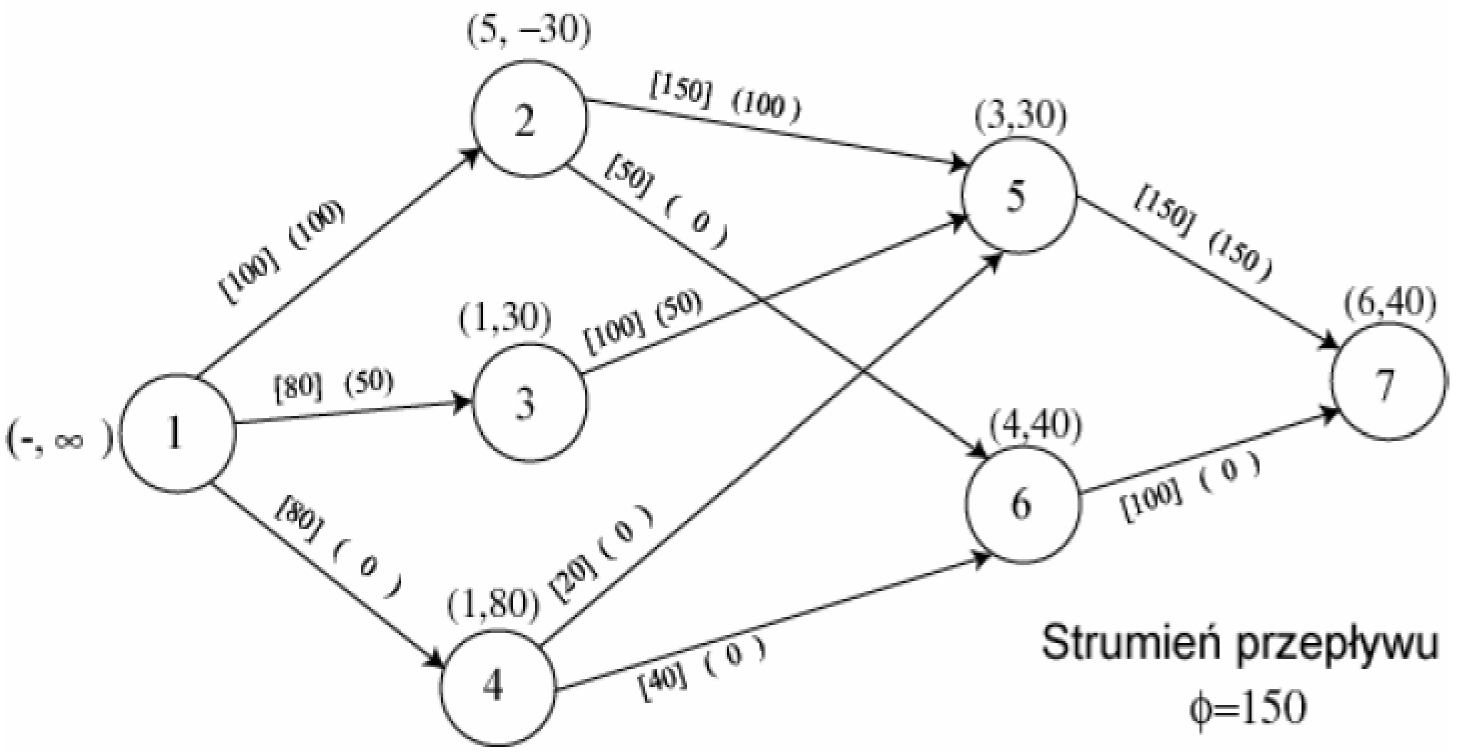
❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Ponownie **powracamy do kroku 2** (sprawdzając czy strumień aktualny $\phi = 100$) jest maksymalny, **itd**. Kolejne etapy przebiegu algorytmu dla naszego przykładu przedstawiają poniższe rysunki.



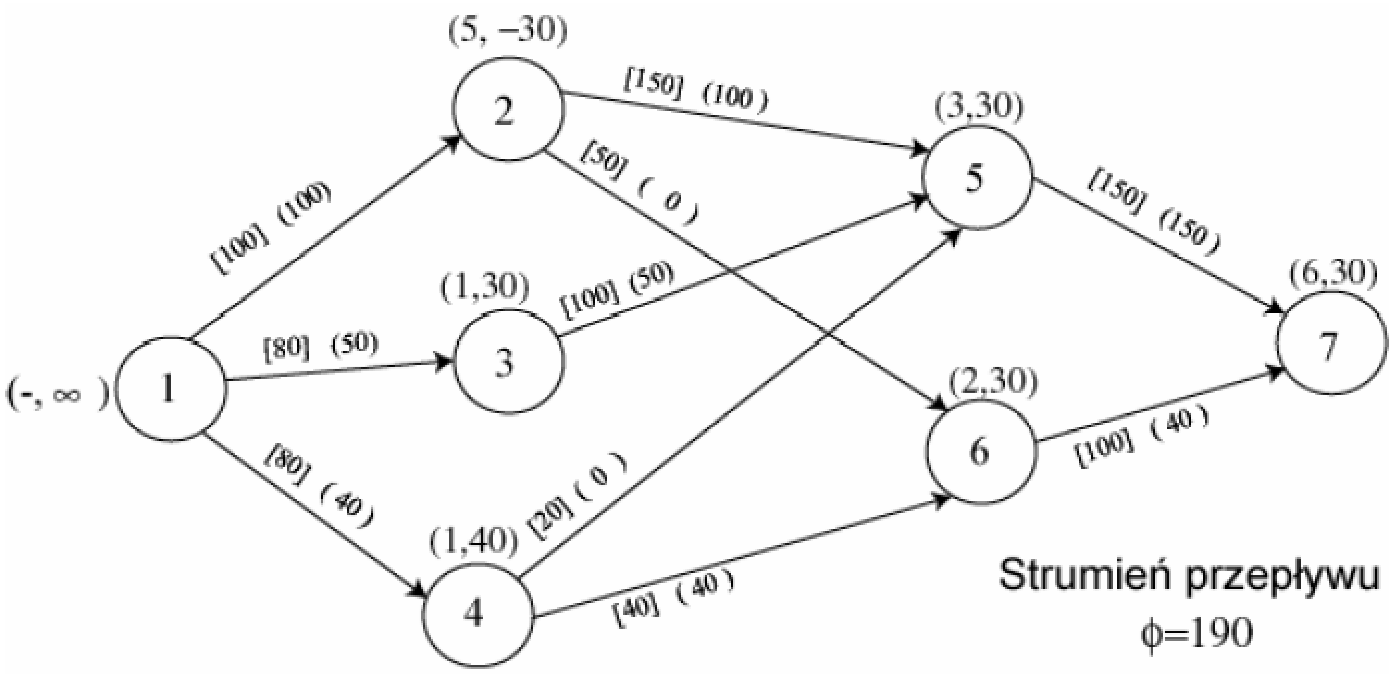
Ścieżka zwiększająca przepływ **o 50** jest postaci: **1 – 3 – 5 – 7**.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona



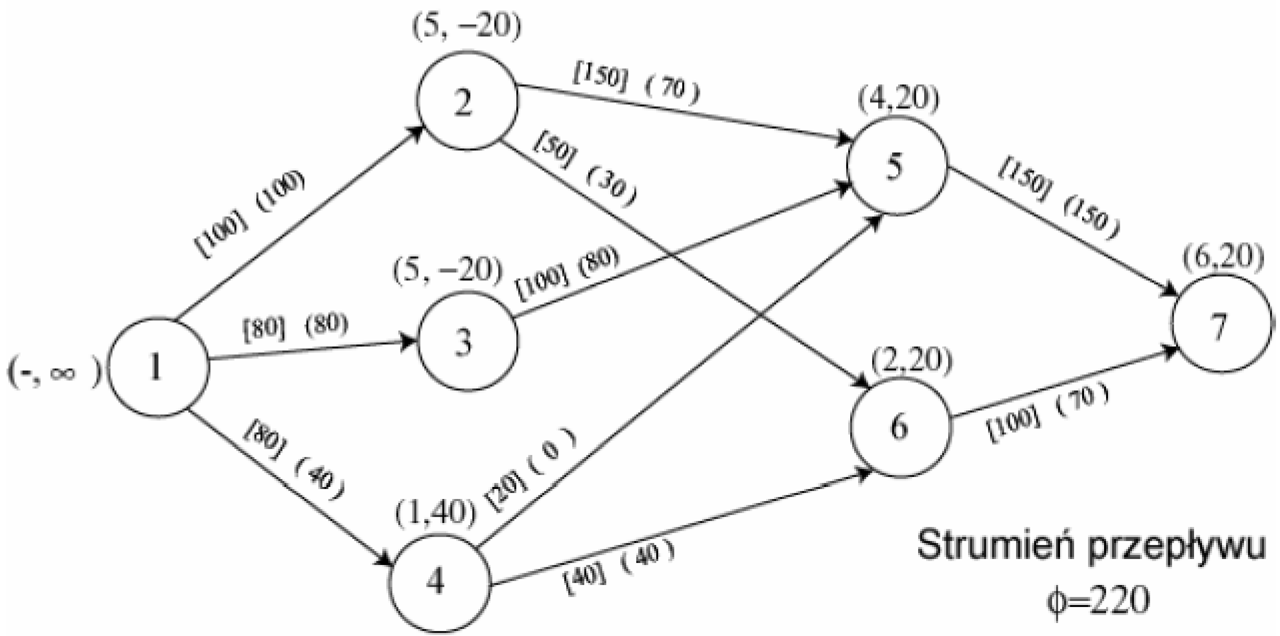
Ścieżka zwiększająca przepływ o 40 jest postaci: 1 – 4 – 6 – 7.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona



Ścieżka zwiększająca przepływ **o 30** jest postaci: **1 – 3 – 5 – 2 – 6 – 7**.

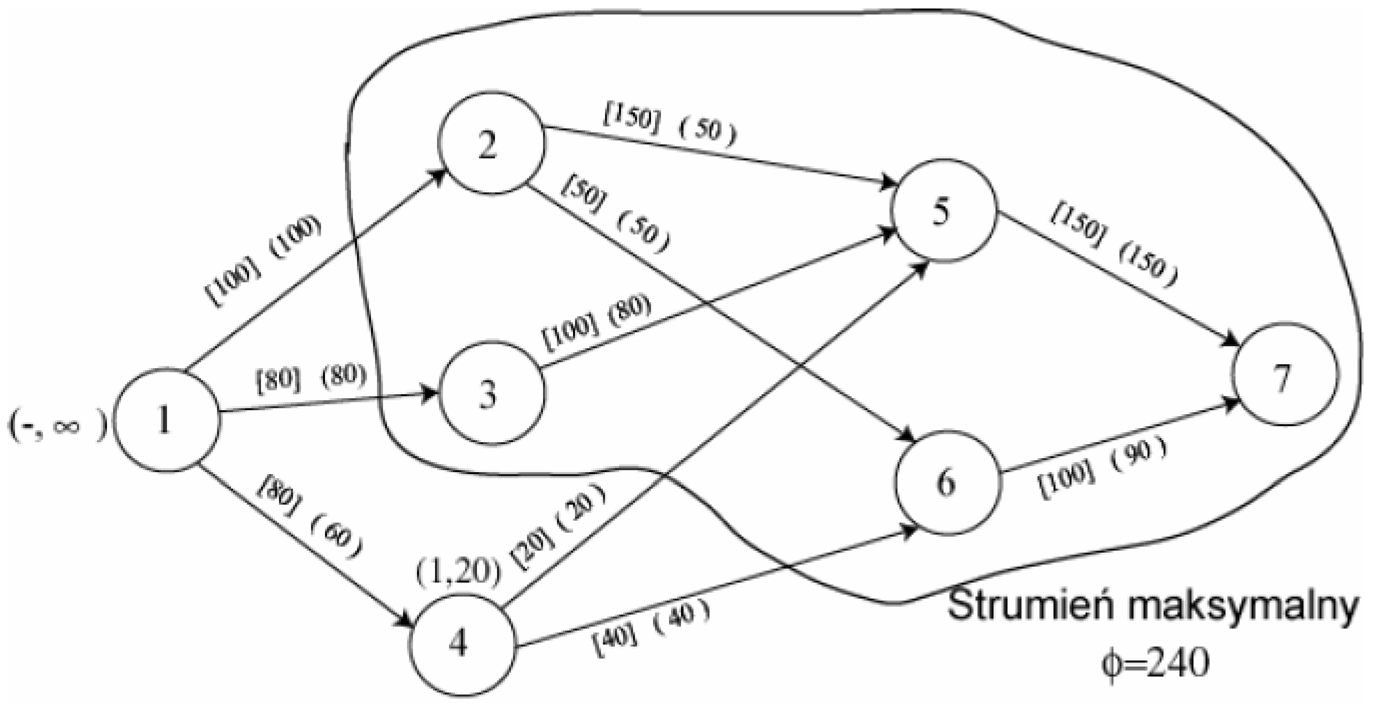
❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona



(poprzednia dystrybucja)

Ścieżka zwiększająca przepływ **o 20** jest postaci: **1 – 4 – 5 – 2 – 6 – 7**.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona



Otrzymany strumień przepływu jest zarazem strumieniem maksymalnym $\Phi = 240 = \Phi_{max}$, gdyż nie jest możliwe zgodnie z kryterium optymalności strumienia - stosując procedurę cechowania oznaczenie wierzchołka wyjściowego v_7.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

W ostatnim kroku algorytmu otrzymaliśmy rozbicie zbioru wierzchołków **V** sieci na dwa zbiory: wierzchołków **ocechowanych**: $V^O = \{1,4\}$ - zawierający zawsze wierzchołek wejścia i wierzchołków **nieocechowanych**: $V^N = \{2,3,5,6,7\}$ - zawierający zawsze wierzchołek wyjścia.

Zauważmy, że wszystkie łuki prowadzące do wierzchołków, których nie można ocechować są nasycone.

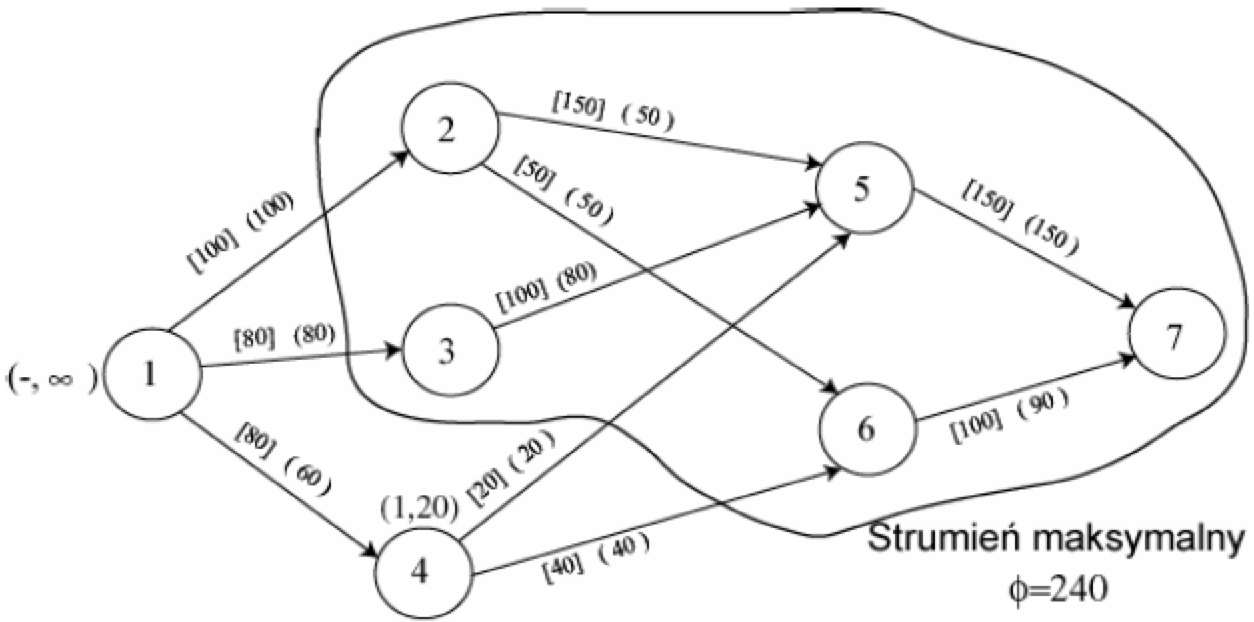
- Przekrojem **S** w sieci **G** nazywamy zbiór łuków: $\{(i,j) \in U : i \in P^1 \wedge j \in P^2\}$, gdzie zbiory P^1, P^2 spełniają następujące warunki: $P^1 \cap P^2 = \emptyset$, $P^1 \cup P^2 = V$; $1 \in P^1, n \in P^2$ oraz dla każdego $(i,j) \in U$ zachodzi: $i,j \in P^1$ lub $i,j \in P^2$ albo $i \in P^1, j \in P^2$.

  Jest to każdy **minimalny zbiór łuków**, których usunięcie spowoduje **utratę spójności sieci** (nie będzie istnieć ścieżka prowadząca od v_1 do v_n).

  Do każdej ścieżki $(v_1 \to v_n)$ musi istnieć **co najmniej jeden** z łuków przekroju;

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

- Liczbę $\psi = \psi(S) = \sum_{(i,j)\in S} x_{i,j}$ równą sumie przepustowości łuków przekroju nazywamy **przepustowością przekroju**;
- Przekrojem minimalnym będziemy nazywać przekrój S^* o **minimalnej przepustowości** $\Psi_{\min}$. Jest to przekrój generowany przez zbiór V^N, czyli przekrój postaci: $\{(i,j) \in U : i \in V^O \wedge j \in V^N\}$;



❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE - algorytm maksymalnego przepływu Forda - Fulkersona

Twierdzenie Forda - Fulkersona:

$$\Phi_{max} = \Psi_{min}$$

Wartość maksymalnego przepływu w sieci równa się wartości minimalnego jej przekroju.

W naszym przykładzie mamy:

$$\Phi_{max} = 150 + 90 = 240 \text{ ton}$$

(liczone na łukach wchodzących do v_7)

Przepustowość przekroju na łukach wchodzących do $V^N = \{2,3,5,6,7\}$ ma wartość: $\Psi_{min} = 100 + 80 + 20 + 40 = 240$ ton

Zatem z twierdzenia Forda – Fulkersona mamy: $\Phi_{max} = \Psi_{min} = 240$.

WYBRANE ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA I ANALIZY SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

1. Uwagi wstępne.

Przez ***„system obsługi masowej"*** rozumie się różnego rodzaju urządzenia ze ***stanowiskami obsługi (kanałami obsługi)***, do których zgłaszają się w stałych lub losowych odstępach czasu ***klienci***, którzy chcą być obsłużeni.

Przykładami tego rodzaju systemów może być:

Numer systemu obsługi	***Klient***	***Stanowisko obsługi Kanał obsługi***	***Rodzaj obsługi***
1	statek	nabrzeże portowe	załadunek lub rozładunek statku
2	pacjent	gabinet lekarski	badanie stanu zdrowia pacjenta
3	abonent telefoniczny	centrala telefoniczna	połączenie z wybranym numerem
4	samochód	stacja benzynowa	tankowanie paliwa
5	samochód	stacja obsługi samochodów	naprawa samochodu (badanie stanu technicznego)
6	maszyna	konserwator maszyn	naprawa uszkodzonej maszyny
7	widz kinowy	kasa biletowa	sprzedaż biletu do kina
8	kupujący w supermarkecie	kasa supermarketu	pobieranie należności za towar

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte, to zgłaszający się klient ma dwie możliwości:

- zrezygnować z obsługi
- ustawić się w kolejce (nie jest to skutkiem złej organizacji pracy, lecz faktem obiektywnym wynikającym z losowego czasu przybywania klientów do stanowisk obsługi oraz losowego czasu trwania ich obsługi)

Uwaga:

Całkowita likwidacja kolejek (przez znaczne zwiększenie liczby stanowisk obsługi) jest rozwiązaniem nie tylko ekonomicznie najgorszym ***(najbardziej kosztownym)***, ale także fizycznie ***niemożliwym*** (zmniejszeniu się liczby klientów oczekujących na obsługę towarzyszyć będzie znaczny wzrost liczby niewykorzystanych stanowisk obsługi oczekujących na klientów - powstaje zatem ***inny rodzaj kolejki***).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Aby skrócić czas oczekiwania klientów w kolejce na obsługę menadżer systemu może:

- zwiększyć ilość stanowisk obsługi,
- skrócić czas obsługi klientów przez wszystkie kanały obsługi lub tylko ich część,

Uwaga:

Oba rozwiązania wymagają poniesienia ***dodatkowych kosztów*** na inwestycje oraz powodują, że ***wydłuży się czas*** w którym wszystkie stanowiska obsługi lub ich część ***będą niewykorzystane*** (system ponosi wtedy niepotrzebne straty). Menadżer systemu musi podjąć decyzje, które są pewnym ***kompromisem*** pomiędzy ***interesami klientów*** (brak kolejek, szybszy czas obsługi) oraz ***interesami zarządzającego systemem*** (niższe koszty funkcjonowania systemu, brak strat).

Zakres zastosowań ***teorii masowej obsługi*** obejmuje różne dziedziny działalności ludzkiej. Teoria ta znalazła zastosowanie m.in. przy rozwiązywaniu bardzo wielu ***problemów ekonomicznych***. Do zadań z teorii masowej obsługi należą również zadania z zakresu ***teorii niezawodności,*** oraz ***zarządzania zapasami***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

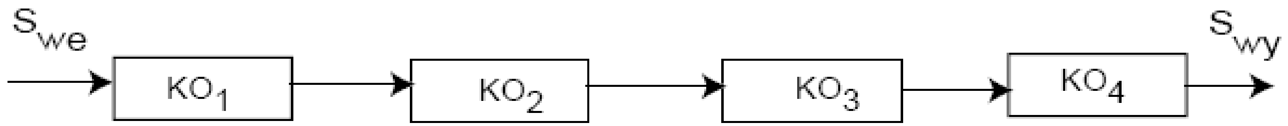
2. Struktura systemów obsługi i ich podstawowe elementy.

Systemy masowej obsługi (jak np. wielkie przedsiębiorstwa, systemy zaopatrzeniowo – magazynowe, systemy transportu miejskiego) poza dużą różnorodnością indywidualnych właściwości posiadają wiele wspólnych cech. Główną ich wspólną cechą jest występowanie w nich trzech podstawowych elementów:

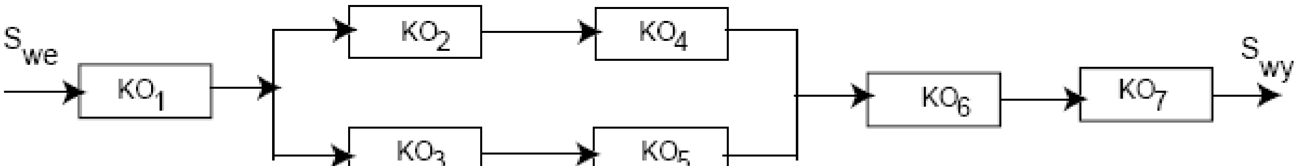
- ***Źródło zgłoszeń*** - zbiór potencjalnych ***zgłoszeń*** (klienci, życzenia, potrzeby, przedmioty) do systemu, które czekają na ***obsługę*** (sprzedaż, przegląd, obróbkę) przez urządzenia obsługujące.
- ***Urządzenia obsługujące*** (***kanały obsługi***) - realizują obsługę na podstawie zgłoszeń wchodzących do systemu. Mogą to być zarówno obsługujący zgłoszenia ***ludzie*** jak i ***maszyny.***
- ***Kolejka*** (powstaje, gdy liczba wolnych kanałów obsługi jest mniejsza od liczby zgłoszeń). Nie jest to jedynie ***zbiór oczekujących na obsługę***, ale także pewna struktura podlegająca pewnemu zbiorowi reguł – ***regulamin kolejki***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

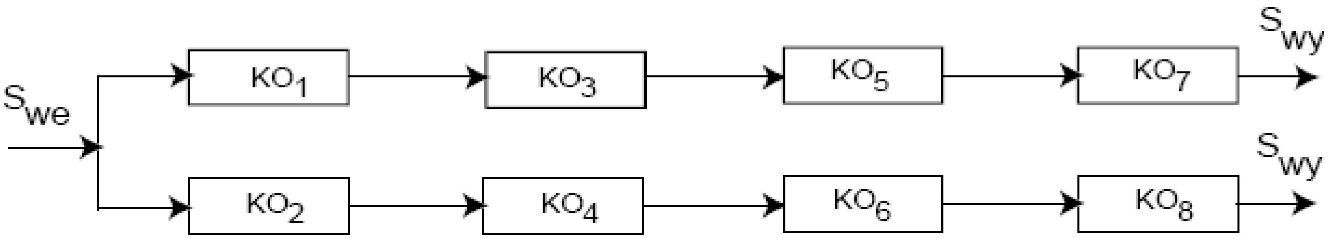
Schemat funkcjonowania przykładowych systemów masowej obsługi przedstawia poniższy rysunek:



a) szeregowa struktura wielofazowego systemu obsługi masowej



b) szeregowo - równoległa struktura wielofazowego systemu obsługi masowej



c) równoległa struktura wielofazowego systemu obsługi masowej

Powstałe w źródle zgłoszenia pojawiają się w stałych lub losowych chwilach czasu i tworzą tzw. ***wejściowy strumień zgłoszeń*** **(S_{we})**. Każde zgłoszenie przechodzi kolejno przez kilka kanałów (faz) i przed każdym może czekać w kolejce (obsługa kończy się po przejściu wszystkich faz). Wszystkie obsłużone zgłoszenia tworzą ***strumień wyjściowy*** **(S_{wy})**. Obsługa zgłoszeń przez oddzielny kanał obsługi podlega określonym prawidłowościom – tzw. ***mechanizm obsługi*** (zależy on m.in. od systemu, celu obsługi, kanału obsługi).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka wejściowego strumienia zgłoszeń.

Zgłoszenia wchodzące do systemu (pojedynczo lub grupowo) tworzą tzw. ***wejściowy strumień zgłoszeń***. Strumień zgłoszeń jest ***określony*** - jeśli znane są prawidłowości rządzące powstawaniem zgłoszenia w przedziale czasu $[t, t+T]$ od chwili „t" – powrotu jego do źródła do chwili „t+T" ponownego jego pojawienia się w systemie (znana jest ***probabilistyczna charakterystyka*** zmiennej losowej „T") oraz ***liczba zgłoszeń*** „N".

Jeżeli w wejściowym strumieniu zgłoszeń nie występują przypadki pojawienia się dwóch lub większej liczby zgłoszeń (tzw. ***strumień pojedynczy***), to jest on w pełni charakteryzowany za pomocą długości przedziału czasu „ξ_n" pomiędzy kolejnym (n – „tym", n=1,2,3,...) oraz poprzednim (n-1 – „szym") zgłoszeniem.

Wejściowy strumień zgłoszeń może być ***strumieniem regularnym*** (zgłoszenia wpływają w jednakowych odstępach czasu: $\xi_n = const$). W praktyce przypadek ten bardzo rzadko występuje (czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami zależy od bardzo wielu czynników przypadkowych). Zatem najczęściej wejściowy strumień zgłoszeń jest ***strumieniem losowym*** (ξ_n - są zmiennymi losowymi o określonych funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa).

Jeżeli długości przedziałów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami nie wpływają wzajemnie na siebie (zmienne losowe ξ_n - są niezależne), to strumień nazywa się ***strumieniem bez następstw*** (***bez pamięci***). W szczególności, gdy zmienne losowe ξ_n mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa to taki strumień nazywa się ***strumieniem rekurencyjnym***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W zależności od typu rozkładu zmiennych losowych ξ_n strumienie rekurencyjne posiadają pewne specyficzne nazwy. Często w systemach obsługi masowej rozpatruje się wejściowy rekurencyjny strumień zgłoszeń będący tzw. ***strumieniem Poissona.***

Dla wejściowego strumienia zgłoszeń ***typu Poissona*** zmienne losowe $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ (n=1,2,...) określające czas pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, a zatem posiadają rozkład prawdopodobieństwa określony za pomocą dystrybuanty postaci:

$$F(t) = P(\xi_n < t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}; \quad \lambda > 0, t \geq 0 .$$

Wynika to z poniższego twierdzenia

Twierdzenie:

Jeśli proces zgłoszeń do systemu jest ***procesem Poissona*** z intensywnością $\lambda > 0$, to odstępy czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami (zmienne losowe ξ_n) posiadają ten sam ***rozkład wykładniczy*** z parametrem $\lambda > 0$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Niech $X(t)$ - będzie ***sygnałowym procesem Poissona*** (proces jednorodny o przyrostach niezależnych i pojedynczy) oraz oznacza ilość sygnałów (zgłoszeń) jakie pojawiły się w przedziale czasu [0,t].

Dla strumienia wejściowego będącego ***strumieniem Poissona*** prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale [0,t] pojawiło się „k" – zgłoszeń (sygnałów) wynosi:

$$P(X(t)=k)=e^{-\lambda \cdot t}\frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!};k=0,1,2,\ldots$$

Oczekiwana (średnia) ilość zgłoszeń (sygnałów) w przedziale czasu [0,t] wynosi zatem: $E[X(t)]=\lambda \cdot t$. Stąd parametr „$\lambda>0$" – interpretujemy jako ilość zgłoszeń w jednostce czasu, a więc jako ***intensywność zgłoszeń*** dla strumienia typu Poissona.

W praktycznych zastosowaniach rozważa się także wejściowy strumień zgłoszeń ***typu Erlanga*** (rzędu „k"). W tym przypadku strumień napływających zgłoszeń może być ***strumieniem Poissona***, lecz do obsługi dopuszcza się tylko jedno (ostatnie) z każdych „k" – kolejno napływających zgłoszeń.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W dotychczasowych rozważaniach wejściowy strumień zgłoszeń charakteryzował się tym, że kolejne zgłoszenia pojawiały się pojedynczo. W praktyce występują również takie przypadki, gdzie zgłoszenia pojawiają się ***grupowo*** w dowolnych chwilach czasu i liczba tych zgłoszeń może być ***losowa***.

W zależności od tego czy struktura probabilistyczna (rozkład) strumienia wejściowego ***zmienia się w czasie czy też nie,*** strumienie dzielimy na ***niestacjonarne*** oraz ***stacjonarne*** (znacznie prostsze do analizy).

Oznaczmy przez:

N_t - liczba zgłoszeń, które weszły do systemu od chwili początkowej „$t_0 = 0$” do chwili czasu „t>0”, $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ kolejne chwile pojawiania się zgłoszeń, zaś przez $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - liczba zgłoszeń (liczba serii zgłoszeń) pojawiająca się w tych chwilach.

Uwaga: Strumień wejściowy uważa się za określony jeśli znany jest rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego:

$$\left(\xi_1 = t_1 - t_0, \ldots, \xi_n = t_n - t_{n-1}; X_1, \ldots, X_n\right),$$

gdzie: $\xi_j = t_j - t_{j-1};\ j = 1,2,\ldots,n$ - czas pomiędzy pojawieniem się „j-tej” serii zgłoszeń.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Analiza strumienia zgłoszeń wpływającego do systemu obsługi określa jego typ:

- Jeżeli zmienne losowe $\xi_1,\dots,\xi_n; X_1,\dots,X_n$ są niezależne to strumień wejściowy nazywamy z ***ograniczonymi następstwami*** (z ograniczoną pamięcią). Strumień taki określa się za pomocą następujących rozkładów:

$$F_n(t) = P(\xi_n < t);\ \text{n=1,2,...} \qquad A_n(k) = P(\{X_n = k\});\ \text{k=0,1,...};\ \text{n=1,2,...}$$
$$P(\{\xi_1 < t_1^0,\dots,\xi_n < t_n^0; X_1 = k_1^0,\dots,X_n = k_n^0\}) = F_1(t_1^0)\cdot\ldots\cdot F_n(t_n^0)\cdot A_1(k_1^0)\cdot\ldots\cdot A_n(k_n^0)$$

- Jeżeli praktycznie niemożliwe jest pojawienie się dwóch lub więcej zgłoszeń w jednej i tej samej chwili, to strumień wejściowy nazywamy ***strumieniem pojedynczym*** (np. strumień Poissona).
- Jeżeli prawdopodobieństwo pojawienia się „k" zgłoszeń w przedziale czasu [t,t+T) nie zależy od tego ile zgłoszeń i w jaki sposób pojawiło się w czasie poprzedzającym ten przedział to strumień taki nazywa się ***strumieniem bez następstw*** (bez pamięci). Jeżeli $N_{t,t+T}$ - oznacza liczbę zgłoszeń, które pojawiły się w przedziale czasu [t,t+T), to warunek braku następstw dla strumienia wejściowego możemy zapisać następująco:

$$P(\{N_{t,t+T} = k \mid N_t = n\}) = P(\{N_{t,t+T} = k\}),\quad \text{k,n – całkowite nieujemne.}$$

Inaczej: brak pamięci określa wzajemną niezależność liczby zgłoszeń, które wpływają w rozłącznych przedziałach czasu

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Jeżeli dla dowolnej skończonej liczby rozłącznych przedziałów czasu: $[t_1, t_1 + \Delta_1), \ldots, [t_r, t_r + \Delta_r)$ prawdopodobieństwo pojawienia się w tych przedziałach odpowiednio: $k_1, \ldots, k_r$ - zgłoszeń zależy tylko od długości tych przedziałów, a nie od położenia względem pozostałych przedziałów, to strumień wejściowy nazywa się ***strumieniem stacjonarnym***.
- Jeżeli strumień wejściowy jest: stacjonarny, pojedynczy oraz bez następstw, to jest tzw. ***strumieniem prostym***.

Charakterystyka mechanizmu obsługi.

Teoria masowej obsługi bada procesy, w których z jednej strony powstaje zapotrzebowanie na wykonanie pewnych prac (usług), a z drugiej powstaje konieczność zaspokojenia tych potrzeb. Związane jest to z odpowiednim mechanizmem obsługi, który ***określa sposoby postępowania ze zgłoszeniami***, ale ***od strony kanału obsługi***.

Do podstawowych charakterystyk kanału obsługi należą:

- ***Czas trwania obsługi.***
- ***Zdolność przepustowa systemu***
- ***Dostępność systemu***

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Czas trwania obsługi - to przedział czasu niezbędny dla realizacji obsługi dla pojedynczego zgłoszenia.

Przyjmuje się, że czasy trwania obsługi dla poszczególnych zgłoszeń są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach.

Jeżeli jednak występuje ***kilka rodzajów zgłoszeń***, to każdy rodzaj ma ***własny czas trwania*** obsługi. Podobnie każdy ***kanał obsługi*** (jeśli jest ich wiele) może posiadać własny czas trwania obsługi.

Typ rozkładu czasu trwania obsługi określa nazwę odpowiedniej obsługi (możemy mieć do czynienia z obsługą: ***wykładniczą, deterministyczną, Erlanga, dowolną***). Badania systemów obsługi masowej pokazują, że najczęściej rozkład czasu trwania obsługi jest ***rozkładem wykładniczym***.

Niech η_k - oznacza czas konieczny do obsługi „k-tego" zgłoszenia (k=1,2,...) Zakładając ponadto, że zmienne losowe $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, to rozkład prawdopodobieństwa dla wykładniczego czasu trwania obsługi „k – tego" zgłoszenia określa dystrybuanta: $B(t) = P(\eta_k < t) = 1 - e^{-\nu \cdot t}$.

Stąd otrzymujemy, że ***średni czas trwania obsługi*** dla jednego zgłoszenia (w przypadku rozkładu wykładniczego) wynosi: $t_{śr} = E[\eta_k] = \frac{1}{\nu}$. Odwrotność średniego czasu obsługi nazywamy ***intensywnością obsługi***: $\nu = \frac{1}{t_{śr}}$ (liczba zgłoszeń obsłużona w jednostkowym przedziale czasu).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Jeżeli system obsługi jest systemem wieloetapowym (każde zgłoszenie jest obsługiwane przez jeden kanał w ***„m”*** etapach), zaś czas trwania obsługi dla każdego etapu ma identyczny rozkład wykładniczy, to rozkład pełnego czasu trwania obsługi (po zakończeniu wszystkich etapów) jest ***rozkładem Erlanga*** postaci: $B(t) = P(\eta < t) = 1 - e^{\nu t}\left[1 + \frac{\nu \cdot t}{1!} + \frac{(\nu \cdot t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\nu \cdot t)^m}{m!}\right]$.

<u>Zdolność przepustowa systemu</u> – to ***maksymalna liczba zgłoszeń***, które mogą być jednocześnie obsługiwane przez system.

W zależności od liczby jednocześnie obsługiwanych zgłoszeń rozróżniamy systemy: ***jednokanałowe*** (tylko jedno zgłoszenie w tym samym czasie obsługiwane) oraz ***wielokanałowe*** (więcej niż jedno zgłoszenie może być jednocześnie obsługiwane).

W praktyce spotyka się również tzw. ***systemy wielofazowe*** (każde zgłoszenie musi przejść przez kilka kanałów obsługi i przy każdym z nich może czekać w kolejce).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Dostępność systemu – określa dostęp zgłoszeń do różnych kanałów obsługi. System jest w ***pełni dostępny***, gdy każde zgłoszenie może być obsłużone przez dowolny kanał. Jeżeli jest to niemożliwe, to system należy do grupy systemów ***niepełnodostępowych***.

Najczęściej w systemach masowej obsługi zgłoszenia są obsługiwane zgodnie z ***kolejnością*** ich napływania. Mogą jednak zdarzyć się takie systemy obsługi, w których niektóre zgłoszenia są ***uprzywilejowane*** (systemy z ***priorytetem***).

Mogą być to systemy z ***priorytetem bezwzględnym*** (przerywana jest obsługa zgłoszeń o niższym priorytecie) oraz o ***priorytecie względnym*** (zgłoszenie o wyższym priorytecie musi czekać na zakończenie rozpoczętej obsługi zgłoszenia o niższym priorytecie). Możliwe zasady obsługi zgłoszeń zawiera ***regulamin*** (dyscyplina) obsługi.

Uwaga: Do charakterystyk mechanizmu obsługi należy również ***niezawodność kanału obsługi*** (określa się ją za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla ***przedziału czasu sprawnej - niezawodnej pracy*** kanału obsługi oraz dla ***przedziału czasu trwania jego odnowy*** – naprawy w sytuacji awarii).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka regulaminu kolejek.

Regulamin kolejki – to reguła wyboru zgłoszenia, które ma zostać obsłużone, gdy tylko zakończy się obsługa poprzedniego.
Jeżeli zgłoszenia ustawiają się w kolejce w kolejności ich przybywania to taki porządek tworzenia kolejki nazywa się ***naturalnym***.
Występują też inne zasady w ***regulaminie kolejki***: wybór zgłoszenia, którego obsługa zajmuje najmniej czasu, ***losowy*** wybór zgłoszeń, ***priorytetowy*** (względny lub bezwzględny) wybór zgłoszeń oraz ***mieszany*** wybór zgłoszeń.
Regulamin kolejki obejmuje również:

- Ograniczenia liczby oczekujących zgłoszeń (***systemy z odmową*** lub ze stratą).
- Ograniczenia dotyczące czasu oczekiwania na obsługę oraz pobytu zgłoszenia w systemie (mogą być to wielkości stałe lub zmienne losowe).
- Przepisy regulujące możliwości przechodzenia z jednej kolejki do drugiej.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

3. Klasyfikacja systemów masowej obsługi.

Najczęściej systemy masowej obsługi charakteryzowane są za pomocą kodu zaproponowanego przez D. G. Kendalla (jednego z twórców teorii). Oznaczenie systemu masowej obsługi ma postać: $X \mid Y \mid n \mid N \mid f_i^j$, gdzie:

„X" – oznacza typ strumienia wejściowego,

„Y" – oznacza typ rozkładu czasu trwania obsługi,

Przyjmuje się kod X=M – oznaczający Poissonowski (Markowski) strumień zgłoszeń (wykładniczy rozkład czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami), Y=M – wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi, X=D – deterministyczne (regularne) zgłoszenia klientów do systemu, Y=D – stały czas obsługi, X=G – dowolny proces zgłoszeń klientów do systemu, Y=G – dowolny rozkład prawdopodobieństw czasu trwania obsługi, $X=E_k$ – rozkład Erlanga (z parametrami λ, k) odstępów czasu między zgłoszeniami, $Y=E_k$ - rozkład Erlanga (z parametrami ν, k) prawdopodobieństw czasu trwania obsługi.

„n" – liczba kanałów w systemie (system z nieograniczoną liczbą kanałów obsługi oznacza się $n=\infty$),

„N" – maksymalna liczba miejsc oczekiwania (systemy z odmową mają N=0, dla nieograniczonej kolejki $N=\infty$),

f_i^j - regulamin obsługi (wskaźnik „i") i regulamin kolejki (wskaźnik „j")

Znaczenie indeksów: „i=0" – ***niepriorytetowa*** obsługa (porządek naturalny FIFO lub odwrotny LIFO), „i=1" ***względny*** priorytet obsługi, „i=2" – ***bezwzględny*** priorytet obsługi, „j=0" – priorytet w kolejce ***nie obowiązuje*** (zgłoszenie, które zastaje wszystkie miejsca zajęte w kolejce odchodzi), „j=2" – ***bezwzględny*** priorytet zgłoszeń (zgłoszenie z wyższym priorytetem usuwa z kolejki jedno zgłoszenie z niższym priorytetem).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

4. Przykłady systemów masowej obsługi i ich podstawowe charakterystyki.

Bardzo ważną charakterystyką systemów masowej obsługi jest prawdopodobieństwo: $P_k(t) = P(V_t = k)$ - losowo wchodzące do systemu zgłoszenie w chwili „t" zastaje w nim „k" innych zgłoszeń (jako „k-te" ustawia się w kolejce). Rozkład tego prawdopodobieństwa zależy od czasu. W praktyce można jednak zauważyć, że dla pewnych systemów (***systemy stabilne***) wpływ czasu na charakterystyki zmniejsza się wraz z jego upływem. Jest to ważna własność ustalania się tzw. ***trybu stacjonarnego systemu***. Wariant stacjonarny interpretuje się jako graniczny wariant systemu niestacjonarnego: $\lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$.

Nie dla każdego systemu ***wariant stacjonarny istnieje***. Systemy z ograniczoną liczbą miejsc oczekiwania zawsze mają wariant stacjonarny, gdy intensywności zgłoszeń (parametr λ) oraz obsługi (parametr ν) są skończone. Dla systemów z nieograniczoną liczbą miejsc oczekiwania wariant regularny istnieje tylko wtedy, gdy tzw. ***współczynnik obciążenia*** (zajętości systemu) $\dfrac{\lambda}{n\nu} < 1$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|1|\infty$ - jest to jednokanałowy system obsługi, z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanał obsługi posiada wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa zgodnie z kolejnością przybyć do systemu (porządek naturalny). Dla takiego systemu ***wariant regularny*** istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda<\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych). Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\dfrac{\lambda}{\nu}$ (dla tego systemu jest to ***obciążenie systemu***), to prawdopodobieństwo $P_k=(1-\rho)\rho^k$, k=0,1,2,...

  Prawdopodobieństwo, że w systemie w kolejce oczekuje więcej niż r_0 zgłoszeń wynosi:

  $$P(r>r_0)=P_{r_0+2}+P_{r_0+3}+\ldots=(1-\rho)\rho^{r_0+2}+(1-\rho)\rho^{r_0+3}+\ldots=$$
  $$=(1-\rho)\rho^{r_0+2}\left[1+\rho+\rho^2+\ldots\right]=\rho^{r_0+2}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w systemie obsługi wynosi: $E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń w systemie obsługi wynosi:

$$D^2[V] = E[V^2] - E[V]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k - \left(\sum_{k=0}^{\infty} kP_k\right)^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce wynosi: $\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_{k+1} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1}\right)^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \rho e^{-(\nu-\lambda)t_0}$$

Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce (na obsługę) oraz jego wariancja wynoszą: $E[T] = \dfrac{\rho}{\nu - \lambda}$, $D^2[T] = \dfrac{\rho(2-\rho)}{(\nu-\lambda)^2}$,

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie przebywać w systemie dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(Z > t_0) = e^{-(\nu-\lambda)t_0}$$

Średni całkowity czas przebywania zgłoszenia w systemie oraz jego wariancja wynoszą: $E[Z] = \dfrac{1}{\nu - \lambda}$, $D^2[Z] = \dfrac{1}{(\nu-\lambda)^2}$,

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|\infty$ - jest to system obsługi składający się z „n" kanałów obsługi z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). Zgłoszenia czekają w kolejce tylko wtedy, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (***w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału***) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (***porządek naturalny***). Dla takiego systemu ***wariant regularny*** istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda<n\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych przez wszystkie kanały). Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\frac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo: $P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_0$, dla k=0,1,2,...,n, oraz $P_k=\frac{\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0$, dla k=n+1,n+2,..., gdzie: $P_0=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}\right)^{-1}$.

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie obsłużone bez czekania*** (w systemie znajduje się co najwyżej n-1 zgłoszeń) wynosi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right)$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie oczekiwało w kolejce*** wynosi:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{n}{n-\rho} P_n$$

Prawdopodobieństwo, że $1 \le s_0 \le n-1$ ***kanałów obsługi jest zajętych*** wynosi: $P(S = s_0) = P_{s_0} = \frac{\rho^{s_0}}{s_0!} P_0$

Prawdopodobieństwo, że ***długość kolejki wynosi*** $r_0 \ge 0$ obliczamy ze wzoru:

$$P(R = r_0) = P_{n+r_0} = \frac{\rho^{n+r_0}}{n! n^{r_0}} P_0$$

Prawdopodobieństwo, że ***w kolejce oczekuje więcej*** niż $r_0 \ge 0$ zgłoszeń wynosi:

$$P(R > r_0) = P_{n+r_0+1} + P_{n+r_0+2} + \ldots = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n! n^{r_0+1}} P_0 \left[1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n! n^{r_0+1}} P_0 \frac{n}{n-\rho} = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n! n^{r_0} (n-\rho)} P_0$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w kolejce wynosi: $\sum_{r=0}^{\infty} rP_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}P_0$

Średnia liczba zajętych kanałów (istotna informacja dla zarządzającego systemem) wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k = \rho = \frac{\lambda}{\nu}$. Zatem ***średnia liczba wolnych kanałów*** wynosi: $n-\rho = n - \frac{\lambda}{\nu} = n\left(1-\frac{\lambda}{n\nu}\right)$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \rho + P_0\frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \frac{n}{n-\rho}P_n e^{-(n-\rho)\nu \cdot t_0}$$

Średni czas oczekiwania na obsługę (w kolejce) oraz jego ***wariancja*** wynoszą: $E[T] = \frac{\Pi}{n\nu-\lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$; $D^2[T] = \frac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu-\lambda} = \frac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M\,|\,M\,|\,n\,|\,N$ - jest to system obsługi składający się z „n" kanałów obsługi z odmową (ograniczona liczba „$N<\infty$" miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). W omawianym systemie może znajdować się jednocześnie najwyżej „n+N" zgłoszeń, z których „n" - będzie obsługiwanych, zaś „N" – będzie czekać w kolejce. Napływające w tym czasie zgłoszenia otrzymują *odmowę* i odchodzą nie obsłużone. Przyjete zgłoszenia albo od razu są obsługiwane (jeśli jest wolny kanał) lub czekają w kolejce (jeśli wszystkie kanały obsługi są zajęte). Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (*w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału*) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (*porządek naturalny*). Dla takiego systemu *wariant regularny (system jest stabilny)* istnieje zawsze. Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\dfrac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo:

$P_k=\dfrac{\rho^k}{k!}P_0$, dla k=0,1,2,...,n, oraz $P_k=\dfrac{\rho^k}{n!\,n^{k-n}}P_0$, dla k=n+1,n+2,...,n+N,

gdzie: $$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k\right)^{-1}.$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte (dostanie odmowę)***, czyli ***prawdopodobieństwo straty zgłoszenia*** wynosi:

$$P_{n+N} = \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^N P_0$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** do obsługi (procentowa przepustowość systemu – ***g***) wynosi: $g = 1 - P_{n+N}$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie będzie obsłużone bez czekania*** wynosi: $\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie musiało czekać w kolejce*** wynosi: $\sum_{k=0}^{N-1} P_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi: $\sum_{k=1}^{N} kP_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$

Średnia liczba zajętych kanałów wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=1}^{N} nP_{n+k} = \rho(1 - P_{n+N})$.

Średnia ***liczba wolnych kanałów*** (z powodu braku zgłoszeń) wynosi: $n - \rho(1 - P_{n+N})$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie (równa średniej liczbie zajętych kanałów obsługi plus średniej liczbie zgłoszeń czekających w kolejce) wynosi:

$$E[V] = \rho(1 - P_{n+N}) + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$$

Średnia liczba zgłoszeń, które ***otrzymały odmowę*** wynosi: λP_{n+N} (w jednostce czasu). Średni ***odstęp czasu między dwoma kolejnymi zgłoszeniami***, które otrzymały odmowę wynosi: $\frac{1}{\lambda P_{n+N}}$.

Średnia ***liczba wolnych miejsc w kolejce*** jest równa: N - E[V].

Średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi (oczekiwania w kolejce) wynosi: $E[T] = \frac{n\nu P_n}{(n\nu - \lambda)^2} \left[1 - (N+1) \left(\frac{\rho}{n} \right)^N + N \left(\frac{\rho}{n} \right)^{N+1} \right]$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|0$ - jest to szczególny przypadek systemu poprzedniego, w którym występuje ***strata zgłoszeń*** (każde zgłoszenie, które przychodzi i zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte odchodzi nie obsłużone). Dla tego systemu prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla k=0,1,2,...,n, gdzie: } P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) \right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte*** (stracone) wyraża się wzorem: $P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$, zaś prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** (a tym samym ***obsłużone bez czekania***) wynosi:

$$1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Średnia ***liczba zajętych kanałów obsługi*** (tym samym średnia ***liczba zgłoszeń w systemie***) wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{n} nP_k = \rho \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) P_0 = \rho(1 - P_n).$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Przykład praktyczny:

Do stacji technicznej obsługi samochodów mającej n=4 identycznie wyposażone kanały zgłaszają się klienci. Strumień zgłoszeń jest typu Poissona z intensywnością $\lambda = 3$ zgłoszenia na godzinę. Intensywność obsługi przez każdy kanał obsługi (z wykładniczym czasem trwania obsługi) wynosi $\nu = 2$ klientów na godzinę. Zakładamy, że jest to system bez odmowy (nieograniczona ilość miejsc w kolejce).

- Sprawdzić czy system jest stabilny ? (stacjonarny):

  Warunkiem koniecznym aby system był stabilny jest by: $\lambda < n\nu$. W naszym przykładzie $\lambda = 3 < 4 \cdot 2 = 8$. Zatem system jest stabilny.

- Obliczyć: średni (w procentach) *czas przestoju wszystkich kanałów* obsługi systemu - P_0, średnią liczbę *zajętych kanałów obsługi*, prawdopodobieństwo, że *klient będzie czekał w kolejce*, średnią *liczbę klientów w kolejce* oraz średni *czas oczekiwania klienta* na rozpoczęcie obsługi.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Procentowy (średni) czas przestoju wszystkich kanałów obsługi

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{-1} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{1.5^k}{k!} + \frac{1.5^4}{4!} \left(1 - \frac{1.5}{4}\right)^{-1} \right)^{-1} = 0,22$$

bo $\rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{3}{2} = 1.5$

Średnia liczba zajętych kanałów obsługi wynosi: $\rho = 1.5$

Prawdopodobieństwo, że klient będzie czekał w kolejce wynosi:

$$\Pi = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{1.5^4}{3!(4-1.5)} 0.22 = 0,074 .$$

Średnia liczba klientów w kolejce wynosi:

$$P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{(n-\rho)^2} = 0.22 \frac{1.5^5}{3!} \frac{1}{(4-1.5)^2} = 0,045$$

- **kolejka praktycznie nie istnieje**

Średni czas oczekiwania klienta na rozpoczęcie obsługi wynosi:

$$E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{0.074}{4 \cdot 2 - 3} = 0,015[h] \text{ (0,9 minuty).}$$

System jest wyraźnie niedociążony (obciążenie systemu: $\frac{\lambda}{n\nu} = \frac{3}{8}$).

WIELOKRYTERIALNE ZAGADNIENIA OPTYMALIZACYJNE

❑ PLAN PREZENTACJI WYKŁADU

1. Wprowadzenie do zagadnień wielokryterialnych.
2. Budowa rankingu obiektów w świetle ocen wielokryterialnych.
3. Metody wielokryterialnego programowania liniowego:
   - przykład wielokryterialnego problemu decyzyjnego,
   - zbieżność kryteriów w zagadnieniach wielokryterialnych,
   - optimum w sensie Pareto (rozwiązanie sprawne),

PLAN PREZENTACJI WYKŁADU

Metody wielokryterialnego programowania liniowego c-d:

- wybrane metody wyznaczania rozwiązań optymalnych w sensie Pareto (sprawnych),

  - metakryterium: liniowa kombinacja wypukła kryteriów,
  - metakryterium: minimalizacja odchyleń kryteriów,
  - hierarchizacja kryteriów: (na przykładzie organizacji kampanii reklamowej)

    a) ścisła hierarchizacja kryteriów,

    b) relaksacja hierarchizacji celów (quasi-hierarchia).

4. Programowanie celowe:

- Określenie strategii długookresowej firmy

❑ WPROWADZENIE

W praktyce zarządzania spotyka się sytuacje, w których różne warianty decyzji ocenia się przy uwzględnieniu wielu kryteriów. Mamy wtedy do czynienia nie z jedną, lecz z wieloma funkcjami celu.

Zagadnienia optymalizacyjne, w których występuje więcej niż jedna funkcja celu nazywamy zadaniami programowania wielokryterialnego.

Przykładem tego typu zagadnień optymalizacyjnych może być:

- dwukryterialne zadanie transportowe,
- dwukryterialne zagadnienie produkcyjne itp.

❑ WPROWADZENIE

Rozwiązanie problemów decyzyjnych z wieloma kryteriami wyboru może odbywać się poprzez:

- agregację kryteriów decyzyjnych, w wyniku której otrzymuje się zadanie z jednym syntetycznym kryterium (metakryterium),
- zastosowanie odpowiedniej hierarchii kryteriów,
- zastosowanie specjalnych metod programowania wielokryterialnego, które uwzględniają mnogość funkcji celu (np. dla różnorodnych dyskretnych zadań wielokryterialnych – zob. Trzaskalik [1]).

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Podstawowe pojęcia

Zjawisko złożone – pewien abstrakcyjny twór związany ze stanem jakościowym rzeczywistych obiektów opisany przez co najmniej dwie cechy (diagnostyczne).

Przykładowe zjawiska złożone:

- poziom rozwoju społeczno-gospodarczego,
- atrakcyjność rynkowa produktów,
- konkurencyjność techniczno-ekonomiczna wyrobów,
- jakość kadry zarządzającej, itp.

Porównanie różnych obiektów w zakresie zjawisk złożonych umożliwia konstrukcja ich rankingu.

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Ranking obiektów – układ, w którym obiekty są uporządkowane nierosnąco ze względu na wartości zmiennej syntetycznej (agregatowej).

Zmienna agregatowa – charakteryzuje obiekty ze względu na oceniane zjawisko złożone; powstaje w wyniku agregacji (najczęściej sumowania) unormowanych zmiennych diagnostycznych.

Unormowane zmienne diagnostyczne – powstają w wyniku przekształcenia (unormowania) oryginalnych cech diagnostycznych (pozbawienie mian, porównywalność rzędu wielkości).

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Przykład: Budowa rankingu obiektów. Agregacja kryteriów decyzyjnych przy pomocy metody unitaryzacji zerowej (MUZ).

Możliwych jest 5 różnych wariantów budowy pewnego zakładu produkcyjnego. Warianty te zostały scharakteryzowane za pomocą czterech cech:

X_1 – koszt inwestycji [tys. zł],
X_2 – docelowa roczna zdolność produkcyjna [tys. sztuk],
X_3 – czas wykonania zadania inwestycyjnego [miesiące],
X_4 – przewidywany roczny poziom emisji zanieczyszczeń ze zrealizowanego obiektu [tony].

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Oszacowane wartości wymienionych charakterystyk wariantów przedsięwzięcia podano w tabeli.

Zbudować ranking wariantów (wybrać najlepszy wariant).

Warianty	Cechy (zmienne diagnostyczne)			
	X_1	X_2	X_3	X_4
W1	253	18,3	24	13,1
W2	178	16,8	18	12,2
W3	244	24,6	26	18,4
W4	174	16,4	25	15,8
W5	196	17,7	20	16,7
max x_{ij}	253	24,6	26	18,4
min x_{ij}	174	16,4	18	12,2

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Rozwiązanie:

1. Rozpoznanie typu zmiennych diagnostycznych.

Stymulanta – większe wartości wskazują na bardziej korzystny wariant.

Destymulanta – mniejsze wartości oznaczają bardziej korzystny wariant.

Nominanta – ma określoną, najkorzystniejszą wartość (nominalną) lub przedział takich wartości.

Stymulanta: X_2

Destymulanty: X_1, X_3, X_4

Nominant - brak

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

2. Normowanie zmiennych diagnostycznych (MUZ).

Z_j – unormowana j-ta zmienna diagnostyczna.
z_{ij} – i-ta wartość unormowanej j-ej zmiennej diagnostycznej.

Dla stymulant:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}} \qquad (1)$$

Dla destymulant:

$$z_{ij} = \frac{\max_i x_{ij} - x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}} \qquad (2)$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Dla nominant:

$$z_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}{c_{1j} - \min\limits_i x_{ij}}, & \text{gdy} \quad x_{ij} < c_{1j}, \\ 1, & \text{gdy} \quad c_{1j} \le x_{ij} \le c_{2j}, \\ \dfrac{x_{ij} - \max\limits_i x_{ij}}{c_{2j} - \max\limits_i x_{ij}}, & \text{gdy} \quad x_{ij} > c_{2j}, \end{cases} \qquad (3)$$

gdzie: $[c_{1j}, c_{2j}]$ – przedział wartości nominalnych

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Normowanie zmiennej X_1 – destymulanty (wzór 2). Podobnie normujemy zmienne X_3, X_4

$$z_{11} = \frac{253-253}{253-174} = \frac{0}{79} = 0;$$

$$z_{21} = \frac{253-178}{253-174} = \frac{75}{79} = 0{,}949;$$

$$z_{31} = \frac{253-244}{253-174} = \frac{9}{79} = 0{,}114;$$

$$z_{41} = \frac{253-174}{253-174} = \frac{79}{79} = 1;$$

$$z_{51} = \frac{253-196}{253-174} = \frac{57}{79} = 0{,}722.$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Normowanie zmiennej X_2 – stymulanty (wzór 1)

$$z_{12} = \frac{18{,}3 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{1{,}9}{8{,}2} = 0{,}232;$$

$$z_{22} = \frac{16{,}8 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{0{,}4}{8{,}2} = 0{,}049;$$

$$z_{32} = \frac{24{,}6 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{8{,}2}{8{,}2} = 1;$$

$$z_{42} = \frac{16{,}4 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{0}{8{,}2} = 0;$$

$$z_{52} = \frac{17{,}7 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{1{,}3}{8{,}2} = 0{,}159.$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Wyniki normowania przedstawione są w tabeli.

Warianty	Unormowane zmienne diagnostyczne				Q_i
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	
W1	0	0,232	0,250	0,855	1,337
W2	0,949	0,049	1	1	2,998
W3	0,114	1	0	0	1,114
W4	1	0	0,125	0,419	1,544
W5	0,722	0,159	0,750	0,274	1,905

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

3. Obliczenie wartości zmiennej agregatowej (syntetycznej) dla każdego obiektu (wariantu) i budowa rankingu obiektów.

Q – zmienna agregatowa (syntetyczna), będąca łączną wielokryterialną oceną każdego z obiektów.
Q_i – wartość zmiennej agregatowej przypisana i-temu obiektowi.

$$Q_i = \sum_j z_{ij} \qquad (4)$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Ranking wariantów budowy:

Miejsce w rankingu	Wariant	Q_i
1	W_2	2,998
2	W_5	1,905
3	W_4	1,544
4	W_1	1,337
5	W_3	1,114

Najlepszym wariantem jest W_2.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE - przykład

Przykład:

Firma produkuje dwa wyroby W1 i W2. Dysponuje surowcami S1, S2, S3 w ograniczonych ilościach, odpowiednio 24 tys. jedn., 14 tys. jedn. i 12 tys. jedn. Jednostkowe zużycie poszczególnych surowców przy produkcji wyrobów podano w tabeli. Ceny wyrobów W1 i W2 wynoszą odpowiednio 3 zł i 2 zł za sztukę.

Ustalić plan produkcji, który z jednej strony maksymalizuje przychody ze sprzedaży wyrobów, a z drugiej strony maksymalizuje wielkość produkcji wyrobu W2.

Wyroby	Jednostkowe zużycie surowców		
	S1	S2	S3
W1	3	1	2
W2	3	2	1

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE - przykład

Model matematyczny

x_1 – wielkość produkcji wyrobu W1 (w tys. sztuk),

x_2 – wielkość produkcji wyrobu W2 (w tys. sztuk) (= K_2),

K_1 – przychód ze sprzedaży wyrobów (w tys. zł).

$$K_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow \max$$

$$(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \le 24,$$

$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \le 14,$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 \le 12,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – zbieżność kryteriów

Ze względu na zbieżność kryteriów rozróżniamy 3 przypadki:

- kryteria K_1 i K_2 są zgodne, gdy:

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \leq K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \leq K_2(\bar{x}_2);$$

- kryteria K_1 i K_2 nie są zgodne, gdy:

$$\exists \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \leq K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \geq K_2(\bar{x}_2);$$

- kryteria K_1 i K_2 są przeciwstawne, gdy:

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \leq K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \geq K_2(\bar{x}_2);$$

gdzie:

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ – decyzje dopuszczalne,

D – zbiór decyzji dopuszczalnych.

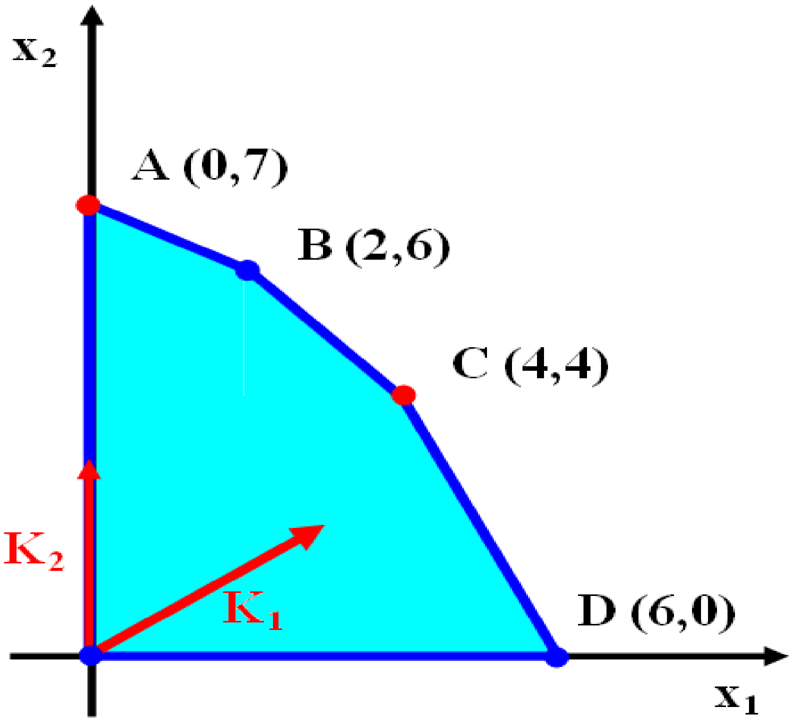
❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – zbieżność kryteriów

$$K_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 + 3x_2 \le 24, \\ (2) & x_1 + 2x_2 \le 14, \\ (3) & 2x_1 + x_2 \le 12, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Rozwiązanie optymalne: C(4,4).
$K_1^0 = K_1(C) = 20.$

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 + 3x_2 \le 24, \\ (2) & x_1 + 2x_2 \le 14, \\ (3) & 2x_1 + x_2 \le 12, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Rozwiązanie optymalne: A(0,7).
$K_2^0 = K_2(A) = 7.$



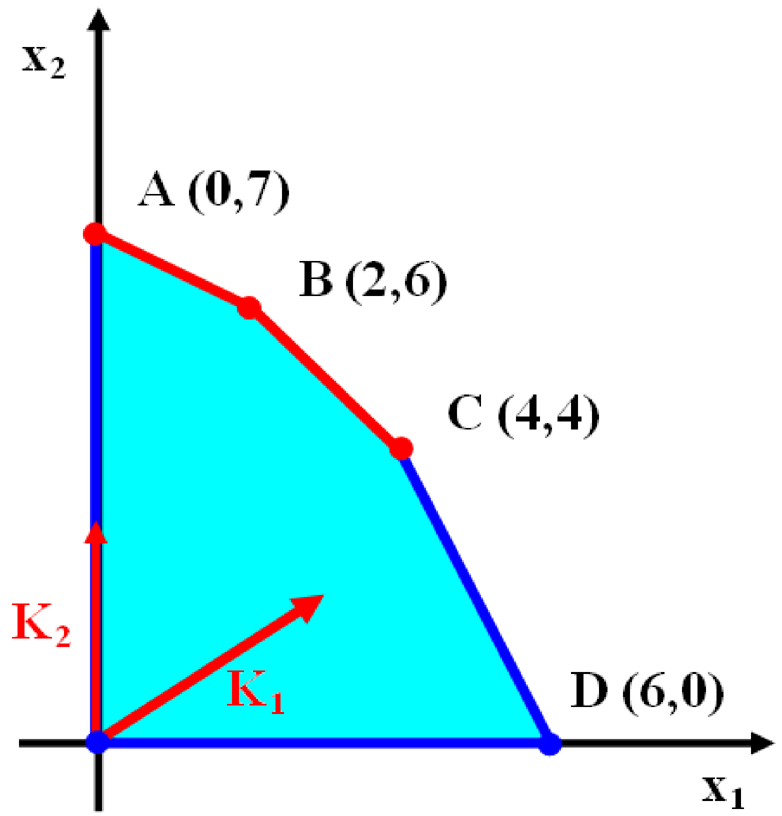
W przykładzie kryteria K_1 i K_2 nie są zgodne gdyż:
$K_1(A)=14<K_1(D)=18$, zaś $K_2(A)=7>K_2(D)=0$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – optimum w sensie PARETO

Rozwiązanie: $\bar{x}^* \in D$ nazywamy **optymalnym w sensie PARETO (sprawnym)**, jeżeli w zbiorze decyzji dopuszczalnych D nie istnieje taka decyzja $\bar{x}$, że dla każdego i = 1,2,...,n:

$$K_i(\bar{x}) \geq K_i(\bar{x}^*),$$

i co najmniej dla jednego kryterium warunek ten jest spełniony z nierównością ostrą.



❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

METAKRYTERIUM – LINIOWA KOMBINACJA WYPUKŁA KRYTERIÓW

Przy konstrukcji metakryterium w postaci liniowej kombinacji wypukłej należy:

- zapewnić wykonywalność operacji matematycznych (uwaga na jednostki!),
- wyeliminować efekty skali,
- preferencje dotyczące celów uwzględnić w postaci wag.

$$MK(\overline{x}) = \sum_i \alpha_i K_i^*(\overline{x}) \to \max$$

gdzie: α_i – wagi, $\alpha_i > 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$,

$$K_i^*(\overline{x}) = \frac{K_i(\overline{x})}{K_i^0(\overline{x})}, \qquad K_i^0 = \max_{\overline{x} \in D} \{K_i(\overline{x})\}.$$

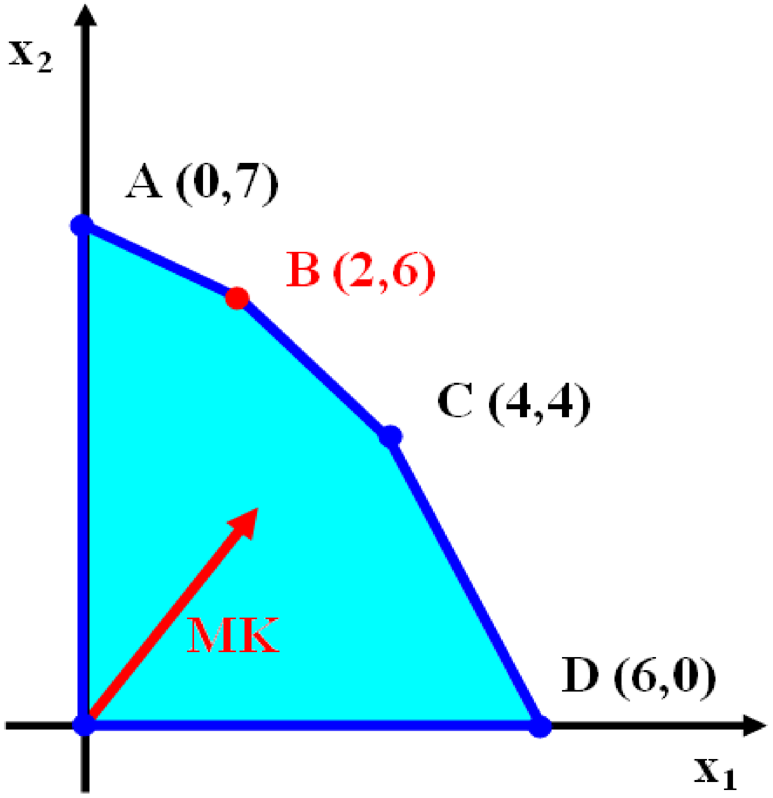
❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

$$MK(x_1, x_2) =$$

$$= 0{,}6 * \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2) + 0{,}4 * \frac{1}{7}x_2 =$$

$$= \frac{1}{700}(63x_1 + 82x_2) \to \max$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 + 3x_2 \le 24, \\ (2) & x_1 + 2x_2 \le 14, \\ (3) & 2x_1 + x_2 \le 12, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$



Rozwiązanie optymalne: B(2,6).

MK(B) = 618/700 = 0,88.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

METAKRYTERIUM – MINIMALIZACJA ODCHYLEŃ KRYTERIÓW

Poszukuje się rozwiązania, które minimalizuje odchylenie wszystkich kryteriów od ich wartości optymalnych.

$$MK(u) = u \to \min$$

$$\begin{array}{ll}
(1) & 3x_1 + 3x_2 \le 24, \\
(2) & x_1 + 2x_2 \le 14, \\
(3) & 2x_1 + x_2 \le 12, \\
 & x_1, x_2 \ge 0, \\
(K_1) & 1 - \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2) \le u, \\
(K_2) & 1 - \frac{1}{7}x_2 \le u.
\end{array}$$

Rozwiązanie optymalne:

F(1,75; 6,125).

MK(F) = 0,125.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Przykład: Organizacja kampanii reklamowej.

Organizowana jest kampania reklamowa, adresowana do ustalonej grupy docelowej. Kampania będzie prowadzona w tygodnikach A, B, C, D i E. Dysponuje sie informacjami dotyczącymi:

Cechy	Tygodnik				
	A	B	C	D	E
cena 1 ogłoszenia [setki zł]	30	28	23	19	18
Prestiż (skala 1-10)	2	1	4	5	3
Jednostkowy zasięg [%]	7.5	7	5.75	4.75	4.5
Jednostkowa częstotliwość czytelnictwa	0.16	0.15	0.12	0.10	0.10

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Organizator kampanii chce, aby jej zasięg był nie mniejszy niż 70[%] (grupy docelowej), natomiast łączna częstotliwość czytelnictwa nie powinna być mniejsza niż 2. Jednocześnie chce (co dla niego jest najważniejsze), aby kampania była możliwie najtańsza i cechowała się najwyższym możliwym prestiżem.

ROZWIĄZANIE:

Zadanie jest dwukryterialnym problemem hierarchicznym.

Gdy potrafimy, ze względu na preferencje podejmującego decyzje, uporządkować liniowo wszystkie kryteria, to możemy zastosować metody hierarchizacji.

Załóżmy, że uporządkowano cele począwszy od najważniejszego: $K_1, K_2, \ldots, K_n$.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Cel 1: Minimalizacja kosztu kampanii
Cel 2: Maksymalizacja efektu prestiżu

MODEL - ZMIENNE DECYZYJNE:

X_1 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku A
X_2 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku B
X_3 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku C
X_4 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku D
X_5 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku E

MODEL - FUNKCJE CELU:

$$K_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 30x_1 + 28x_2 + 23x_3 + 19x_4 + 18x_5 \rightarrow \min$$ **(1 CEL)**

$$K_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$ **(2 CEL)**

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

MODEL - WARUNKI OGRANICZAJĄCE

$7,5x_1 + 7x_2 + 5,75x_3 + 4,75x_4 + 4,5x_5 \geq 70$ - **całkowity zasięg**

$0,16x_1 + 0,15x_2 + 0,12x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 \geq 2$ - **całkowita częstotliwość**

MODEL - WARUNKI BRZEGOWE

$0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 4;$

$0 \leq x_4 \leq 4; 0 \leq x_5 \leq 4;$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - **całkowite**

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

ROZWIĄZANIE – ŚCISŁA HIERARCHIZACJA CELÓW

Z hierarchizacją ścisłą (ostrą) mamy do czynienia wtedy, gdy chcemy nade wszystko osiągnąć optymalną wartość najważniejszego kryterium K_1, potem (w miarę możliwości) K_2,..., na końcu (...) K_n.

Idea algorytmu.

1. Rozwiązujemy zadanie PM z pierwszym niezbadanym kryterium.
2. Jeżeli uzyskujemy tylko jedno rozwiązanie optymalne, to jest to rozwiązanie optymalne zadania wielokryterialnego z hierarchizacją ostrą. Koniec.
3. Jeżeli są co najmniej 2 rozwiązania optymalne, to traktujemy je jako zbiór rozwiązań dopuszczalnych i wracamy do punktu 1.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Dwa rozwiązania optymalne: (dla I poziomu hierarchii)

$$x_1^{(1)} = 3; x_2^{(1)} = 4; x_3^{(1)} = 1; x_4^{(1)} = 4; x_5^{(1)} = 4;$$

$$x_1^{(2)} = 4; x_2^{(2)} = 4; x_3^{(2)} = 3; x_4^{(2)} = 0; x_5^{(2)} = 4;$$

$$K_1\left(\overline{x}^{(1)}\right) = K_1\left(\overline{x}^{(2)}\right) = 373$$

Ponieważ wartość funkcji prestiżu $K_2\left(\overline{x}^{(1)}\right) = 46 > K_2\left(\overline{x}^{(2)}\right) = 36$,

to jako rozwiązanie zadania należy wybrać rozwiązanie (1).

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

ROZWIĄZANIE - RELAKSACJA HIERARCHIZACJI CELÓW (QUASI HIERARCHIA)

W zadaniach wielokryterialnych z relaksacją hierarchizacji celów dąży się do osiągnięcia wartości (prawie) optymalnych przez kolejne (coraz mniej ważne) kryteria. Istotne jest tu spełnienie kryterium w stopniu dostatecznie wysokim.

Algorytm rozwiązywania zadań z relaksacją hierarchizacji celów jest bardzo podobny do poprzedniego, z tym że dodawane są warunki w postaci nierówności.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

PIERWSZY POZIOM HIERARCHII – etap obliczeń jak poprzednio.

DRUGI POZIOM HIERARCHII:

Załóżmy, że podejmujący decyzje postanowił zwiększyć kwotę na reklamę z poziomu minimalnego (373 – I poziom hierarchii) o 10[%], czyli maksymalnym akceptowalnym poziomem kosztów będzie wartość 410.

Otrzymujemy zadanie:

$$K_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 \to \max$$

Warunki ograniczające:

$7,5x_1 + 7x_2 + 5,75x_3 + 4,75x_4 + 4,5x_5 \geq 70$ - całkowity zasięg

$0,16x_1 + 0,15x_2 + 0,12x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 \geq 2$ - całkowita częstotliwość

$0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 4; 0 \leq x_4 \leq 4; 0 \leq x_5 \leq 4;$ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - całkowite

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

PRZYKŁAD – PROGRAMOWANIE CELOWE

Firma rozpatruje możliwość wprowadzenia do produkcji 3 nowych wyrobów, które mają zastąpić obecnie wytwarzane modele.

Właściciel firmy uważa, że planując strategię długookresową należy uwzględnić:

- **zysk długookresowy,**
- **stabilność zatrudnienia,**
- **poziom nakładów inwestycyjnych.**

Dlatego zostały sformułowane 3 cele:

CEL 1: **osiągnięcie zysku długookresowego równego przynajmniej 100 [mln zł]**

CEL 2: **utrzymanie zatrudnienia na poziomie 3000 osób**

CEL 3: **utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie wyższym niż 40 [mln zł]**

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

Ponieważ osiągnięcie wszystkich 3 celów jednocześnie prawdopodobnie nie będzie możliwe, zarząd określił wartości poszczególnych współczynników kar (związanych z nieosiągnięciem poszczególnych celów).

Potrzebne informacje podaje tabela:

Cel	Zysk (produkty)			Założony poziom osiągnięcia celu	Współczynniki kary (niekorzystne dla firmy odchylenia)
	P_1	P_2	P_3		
Zysk długookresowy	10	8	13	>= 100 [mln zł]	6 (-)
Poziom zatrudnienia	4	2	3	= 30 [setki osób]	2 (+), 5 (-)
Nakłady inwestycyjne	5	7	8	<= 40 [mln zł]	4 (+)

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL - ZMIENNE DECYZYJNE:

X_1 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_1

X_2 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_2

X_3 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_3

MODEL - ZMIENNE BILANSUJĄCE CELE:

Y_1^+ - wielkość o jaką osiągnięty zysk przekracza wartość 100 mln zł (cel 1)

Y_1^- - wielkość o jaką osiągnięty zysk jest mniejszy od 100 mln zł

Y_2^+ - wielkość o jaką zatrudnienie przekracza 30 setek osób (cel 2)

Y_2^- - wielkość o jaką zatrudnienie jest mniejsze od 30 setek osób

Y_3^+ - wielkość o jaką nakłady inwestycyjne przekraczają 40 mln zł (cel 3)

Y_3^- - wielkość o jaką zatrudnienie jest mniejsze od 30 setek osób

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – FUNKCJA CELU I WARUNKI OGRANICZAJĄCE:

(Minimalizacja sumy niekorzystnych odchyleń od ustalonych poziomów osiągnięcia celów)

$$6y_1^- + 2y_2^+ + 5y_2^- + 4y_3^- \to \min$$

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$ - **(CEL 1)**

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$ - **(CEL 2)**

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$ - **(CEL 3)**

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

ROZWIĄZANIE W PRZYPADKU HIERARCHIZACJI CELÓW

I POZIOM HIERARCHII:

CEL (2A):

nieprzekroczenie aktualnego poziomu zatrudnienia (3000 osób)

CEL 3:

utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie większym niż 40 mln zł

II POZIOM HIERARCHII:

CEL (1):

osiągnięcie zysku długookresowego na poziomie 100 mln zł.

CEL (2B):

nieobniżenie dotychczasowego poziomu zatrudnienia

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – ZADANIE PIERWSZEGO POZIOMU HIERARCHII:

$2y_2^+ + 4y_3^+ \to \min$ **(funkcja celu)**

Warunki ograniczające:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – ZADANIE DRUGIEGO POZIOMU HIERARCHII:

$$6y_1^- + 4y_2^- \rightarrow \min$$ **(funkcja celu)**

Warunki ograniczające:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

Dodajemy warunek:

$$2y_2^+ + 4y_3^+ = 0$$

warunki brzegowe:

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$