Programowanie dynamiczne
(algorytm sekwencyjny Bellmana) – rozwiązane przykłady

Literatura: Karol Kukuła (red.), Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, rozdział 7, str. 231-240.

Przykład 1. Pewien środek transportowy o ładowności 10 [j. t.] należy załadować trzema rodzajami towarów, przy czym waga jednej sztuki wynosi odpowiednio: 2, 1 i 3 [j.t.], a ich wartość odpowiednio: 50, 30, 100 [j. p.]. Określić optymalny sposób załadunku środka transportu aby przewieźć ładunek o jak największej wartości.

Rozwiązanie:

Oznaczenia (dane):

s – możliwa do wykorzystania ładowność środka transportu: (s=0,1,2,…,10)

$w_1 = 50$ – wartość [j. p.] jednej jednostki przewożonych towarów o wadze 2 [j. t.]

$w_2 = 30$ – wartość [j. p.] jednej jednostki przewożonych towarów o wadze 1 [j. t.]

$w_3 = 100$ – wartość [j. p.] jednej jednostki przewożonych towarów o wadze 3 [j. t.]

Zmienne decyzyjne:

x_1 – liczba towarów o wadze 2 [j. t.] załadowanych na środek transportowy o ładowności 10 [j. t.]

x_2 – liczba towarów o wadze 1 [j. t.] załadowanych na środek transportowy o ładowności 10 [j. t.]

x_3 – liczba towarów o wadze 3 [j. t.] załadowanych na środek transportowy o ładowności 10 [j. t.]

Funkcja celu:

$F(x_1, x_2, x_3) = 50 * x_1 + 30 * x_2 + 100 * x_3 \to max$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 2 * x_1 + 1 * x_2 + 3 * x_3 = 10 & (1) \\ x_1 \in \{0,1, \dots, x_1(10) = 5\}, x_2 \in \{0,1, \dots, x_2(10) = 10, x_3 \in \{0,1, \dots, x_3(10) = 3\}\} & (2) \end{cases}$$

Ponieważ funkcja celu F – jest funkcją „separowalną" (można ją rozbić jako suma pojedynczych funkcji celu z każdą zmienną decyzyjną z osobna, to możemy zastosować metodologię programowania dynamicznego do rozwiązania tego zadania **(zob. materiały z wykładu)**.

$$F(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = 50 * x_1 + 30 * x_2 + 100 * x_3 \to max$$

Tabela - tablicowania wartości zmiennych decyzyjnych oraz składowych funkcji celu $f_i(x_i)$:

s	2 [j. t.]		1 [j. t.]		3 [j. t.]	
	$x_1(s) = \left[\frac{s}{2}\right]$	$f_1(x_1(s)) = w_1 * x_1(s)$	$x_2(s) = \left[\frac{s}{1}\right]$	$f_2(x_2(s)) = w_2 * x_2(s)$	$x_3(s) = \left[\frac{s}{3}\right]$	$f_3(x_3(s)) = w_3 * x_3(s)$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	30	0	0
2	1	50	2	60	0	0
3	1	50	3	90	1	100
4	2	100	4	120	1	100
5	2	100	5	150	1	100
6	3	150	6	180	2	200
7	3	150	7	210	2	200
8	4	200	8	240	2	200
9	4	200	9	270	3	300
10	5	250	10	300	3	300

Uwaga: W obliczeniach w tabeli operator [x] – oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x.

Proces decyzyjny jest wieloetapowym procesem decyzyjnym, który możemy podzielić na (3) etapy. Na każdym etapie rozwiązujemy proste problemy decyzyjne z pojedyncza zmienną decyzyjną i korzystając na etapie kolejnym z optymalnych rozwiązań z etapu poprzedniego znajdujemy w rezultacie optymalną strategię dla wszystkich zmiennych decyzyjnych (zgodnie z zasadą optymalności Bellmana – zob. wykład).

Etap 1:

Polega na optymalnym sposobie załadowania samochodu o ładowności „s" np. towarami o wadze 2 [j. t.].

Jest to etap trywialny – problem decyzyjny który należy rozwiązać jest następujący:

Oznaczmy $F_1(s) = \max_{x_1}\{f_1(x_1(s))\}$ – maksymalna wartość towarów o wadze 2 [j.t.], które możemy przewieźć środkiem transportu o ładowności (s).

Zauważmy, że w tym przypadku: $F_1(s) = f_1(x_1(s))$.

Zatem:

$F_1(10) = f_1(x_1(10) = 5) = 250, x_1 = 5$

$F_1(9) = f_1(x_1(9) = 4) = 200, x_1 = 4$

$F_1(8) = f_1(x_1(8) = 4) = 200, x_1 = 4$

$F_1(7) = f_1(x_1(7) = 3) = 150, x_1 = 3$

$F_1(6) = f_1(x_1(6) = 3) = 150, x_1 = 3$

$F_1(5) = f_1(x_1(5) = 2) = 100, x_1 = 2$

$F_1(4) = f_1(x_1(4) = 2) = 100, x_1 = 2$

$F_1(3) = f_1(x_1(3) = 1) = 50, x_1 = 1$

$F_1(2) = f_1(x_1(2) = 1) = 50, x_1 = 1$

$F_1(1) = f_1(x_1(1) = 0) = 0, x_1 = 0$

$F_1(0) = f_1(x_1(0) = 0) = 0, x_1 = 0$

Etap 2:

Dołączamy drugi przewożony towar np. o wadze 1 [j. t.].

Zadanie optymalizacyjne polega na optymalnym sposobie załadunku samochodu o ładowności „s" [j. t.] dwoma typami towarów o wadze 2 [j. t.] oraz 1 [j. t.].

Oznaczmy $F_{12}(s)$ – maksymalna wartość towarów o wadze 2 [j.t.] oraz 1 [j. t.], które możemy przewieźć środkiem transportu o ładowności (s).

Zauważmy, że w tym przypadku należy rozwiązać zadanie optymalizacyjne postaci:

$$F_{12}(s) = \max_{x_2 \in \{0,1,\ldots,x_2(s)\}} \{F_1(s - 1 * x_2) + f_2(x_2)\}$$

lub równoważne zadanie (z mniejszą liczbą wartości dla zmiennych decyzyjnych do rozpatrzenia):

$$F_{12}(s) = \max_{x_1 \in \{0,1,\ldots,x_1(s)\}} \{f_1(x_1) + f_2(s - 2 * x_1)\}.$$

Zastosujmy tą drugą możliwość:

$$F_{12}(10) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(10 - 2 * 0 = 10); \\ f_1(1) + f_2(10 - 2 * 1 = 8); \\ f_1(2) + f_2(10 - 2 * 2 = 6); \\ f_1(3) + f_2(10 - 2 * 3 = 4); \\ f_1(4) + f_2(10 - 2 * 4 = 2); \\ f_1(5) + f_2(10 - 2 * 5 = 0) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 300 = 300; \\ 50 + 240 = 290; \\ 100 + 180 = 280; \\ 150 + 120 = 270; \\ 200 + 60 = 260; \\ 250 + 0 = 250 \end{Bmatrix} = 300.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,10 \rangle \end{matrix}$.

Musimy wyznaczyć jeszcze optymalne rozwiązania dla s=9,8,7,…,1,0, gdyż będą one wykorzystywane na etapie 3.

$$F_{12}(9) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(9 - 2*0 = 9); \\ f_1(1) + f_2(9 - 2*1 = 7); \\ f_1(2) + f_2(9 - 2*2 = 5); \\ f_1(3) + f_2(9 - 2*3 = 3); \\ f_1(4) + f_2(9 - 2*4 = 1); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 270 = 270; \\ 50 + 210 = 260; \\ 100 + 150 = 250; \\ 150 + 90 = 240; \\ 200 + 30 = 230; \end{Bmatrix} = 270.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,9 \rangle \end{matrix}.$

$$F_{12}(8) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(8 - 2*0 = 8); \\ f_1(1) + f_2(8 - 2*1 = 6); \\ f_1(2) + f_2(8 - 2*2 = 4); \\ f_1(3) + f_2(8 - 2*3 = 2); \\ f_1(4) + f_2(8 - 2*4 = 0); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 240 = 240; \\ 50 + 180 = 230; \\ 100 + 120 = 220; \\ 150 + 60 = 210; \\ 200 + 0 = 200; \end{Bmatrix} = 240.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,8 \rangle \end{matrix}.$

$$F_{12}(7) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(7 - 2*0 = 7); \\ f_1(1) + f_2(7 - 2*1 = 5); \\ f_1(2) + f_2(7 - 2*2 = 3); \\ f_1(3) + f_2(7 - 2*3 = 1); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 210 = 210; \\ 50 + 150 = 200; \\ 100 + 90 = 190; \\ 150 + 30 = 180; \end{Bmatrix} = 210.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,7 \rangle \end{matrix}.$

$$F_{12}(6) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(6 - 2*0 = 6); \\ f_1(1) + f_2(6 - 2*1 = 4); \\ f_1(2) + f_2(6 - 2*2 = 2); \\ f_1(3) + f_2(6 - 2*3 = 0); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 180 = 180; \\ 50 + 120 = 170; \\ 100 + 60 = 160; \\ 150 + 0 = 150; \end{Bmatrix} = 180.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,6 \rangle \end{matrix}.$

$$F_{12}(5) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(5 - 2*0 = 5); \\ f_1(1) + f_2(5 - 2*1 = 3); \\ f_1(2) + f_2(5 - 2*2 = 1); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 150 = 150; \\ 50 + 90 = 140; \\ 100 + 30 = 130; \end{Bmatrix} = 150.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,5 \rangle \end{matrix}.$

$$F_{12}(4) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(4 - 2*0 = 4); \\ f_1(1) + f_2(4 - 2*1 = 2); \\ f_1(2) + f_2(4 - 2*2 = 0); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 120 = 120; \\ 50 + 60 = 110; \\ 100 + 0 = 100; \end{Bmatrix} = 120.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,4 \rangle \end{matrix}.$

$$F_{12}(3) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(3 - 2*0 = 3); \\ f_1(1) + f_2(3 - 2*1 = 1); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 90 = 90; \\ 50 + 30 = 80; \end{Bmatrix} = 90.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,3 \rangle \end{matrix}.$

$$F_{12}(2) = \max \begin{Bmatrix} f_1(0) + f_2(2 - 2*0 = 2); \\ f_1(1) + f_2(2 - 2*1 = 0); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 60 = 60; \\ 50 + 0 = 50; \end{Bmatrix} = 60.$$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,2 \rangle \end{matrix}.$

$F_{12}(1) = \max\{f_1(0) + f_2(1 - 2 * 0 = 1)\} = \max\{0 + 30 = 30;\} = 30.$

Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,1 \rangle \end{matrix}.$

$F_{12}(0) = \max\{f_1(0) + f_2(0)\} = 0$, Strategia optymalna: $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \langle 0,0 \rangle \end{matrix}.$

Etap 3:

Dołączamy ostatni trzeci przewożony towar o wadze 3 [j. t.].

Zadanie optymalizacyjne polega na optymalnym sposobie załadunku samochodu o ładowności „s" [j. t.] wszystkimi trzema typami towarów o wadze 2 [j. t.] , 1 [j. t.] oraz 3 [j. t.].

Oznaczmy $F_{123}(s)$ – maksymalna wartość towarów o wadze 2 [j.t.], 1 [j. t.] oraz 3 [j. t.], które możemy przewieźć środkiem transportu o ładowności (s).

Zauważmy, że w tym przypadku należy rozwiązać zadanie optymalizacyjne postaci:

$$F_{123}(s) = \max_{x_3 \in \{0,1,\dots,x_3(s)\}} \{F_{12}(s - 3 * x_3) + f_3(x_3)\}$$

Dlatego

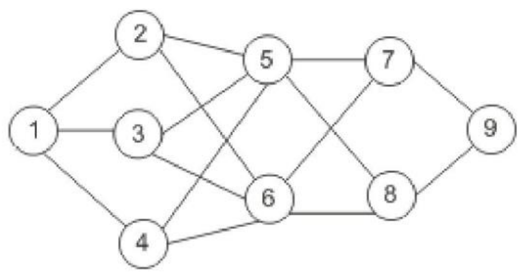
$$F_{123}(s = 10) = \max_{x_3 \in \{0,1,2,3\}} \begin{Bmatrix} f_3(0) + F_{12}(10 - 3 * 0 = 10); \\ f_3(1) + F_{12}(10 - 3 * 1 = 7); \\ f_3(2) + F_{12}(10 - 3 * 2 = 4); \\ f_3(3) + F_{12}(10 - 3 * 3 = 1); \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 300 = 300; \\ 100 + 210 = 310; \\ 200 + 120 = 320; \\ 300 + 30 = 330; \end{Bmatrix} = 330.$$

Strategia optymalna ostateczna: $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \langle 0 & 1 & 3 \rangle \end{matrix}.$

Należy zatem załadować 3 towary o wadze 3 [j. t.] oraz 1 towar o wadze 1 [j. t.], aby przewieźć łącznie towary o jak największej wartości 330 [j. p.] np. zł.

Przykład 2. Stosując zasady programowania dynamicznego, znaleźć w przedsięwzięciu przedstawionym na rysunku najkrótszą drogę z punktu 1 do punktu 9. Odległości pomiędzy poszczególnymi punktami wynoszą [w km]:
1-2 (50); 1-3 (40); 1-4 (100); 2-5 (30); 2-6 (50); 3-5 (60); 3-6 (80); 4-5 (50); 4-6 (70); 5-7 (60); 5-8 (100);

6-7 (120); 6-8 (120); 7-9 (40); 8-9 (50).



Rozwiązanie:
Ponieważ funkcja celu będąca łączną długością marszruty z punktu (1) do (9) jest funkcją separowalną i można ją przedstawić jako sumę funkcji składowych celu dla poszczególnych etapów marszruty dlatego zadanie to możemy rozwiązać stosując zasady programowania dynamicznego.

Rozbijmy zadanie na 4-etapy pośrednie.
Oznaczmy: I_k – zbiór indeksów miast należących do k-tego etapu (k=1,2,3,4).
Na etapie k=1 mamy miasta (7) oraz (8), z których możemy bezpośrednio dostać się do celu (do miasta 9). $I_1 = \{7,8\}$.
Na etapie k=2 mamy miasta (5) oraz (6), z których możemy dostać się do celu (do miasta 9) przejeżdżając przez jedno z miast pośrednich na etapie wcześniejszym k=1. $I_2 = \{5,6\}$.
Na etapie k=3 mamy miasta (2), (3) oraz (4), z których możemy dostać się do celu (do miasta 9) przejeżdżając przez dwa miasta pośrednie z etapów wcześniejszym k=1,2. $I_3 = \{2,3,4\}$.
Na etapie ostatnim k=4 mamy miasto początkowe (1), z którego możemy dostać się do celu (do miasta 9) przejeżdżając przez trzy miasta pośrednie z etapów k=1,2 i 3. $I_4 = \{1\}$.

Oznaczmy ponadto: $d_{i,j}$ – długość etapu marszruty z miasta „i" do „j" $\langle i, j \rangle$.
<u>Etap 1:</u>
Problem decyzyjny rozwiązywany na etapie k=1.
Oznaczmy $F_1(i)$ – długość najkrótsze drogi z miasta $i \in I_1 = \{7,8\}$ do celu miasta (9).
Zatem:
$F_1(7) = d_{7,9} = 40$, optymalna marszruta: $\langle 7,9 \rangle$
$F_1(8) = d_{8,9} = 50$, optymalna marszruta: $\langle 8,9 \rangle$

<u>Etap 2:</u>
Problem decyzyjny rozwiązywany na etapie k=2.
Oznaczmy $F_2(i)$ – długość najkrótsze drogi z miasta $i \in I_2 = \{5,6\}$ do celu miasta (9).

$$F_2(i) = \min_{l \in I_1 = \{7,8\}} \{d_{i,l} + F_1(l)\}$$

Zatem:
$F_2(5) = min\{d_{5,7} + F_1(7); d_{5,8} + F_1(8)\} = min\{60 + 40; 100 + 50\} = 100$, optymalna marszruta: $\langle 5,7,9 \rangle$
$F_2(6) = min\{d_{6,7} + F_1(7); d_{6,8} + F_1(8)\} = min\{120 + 40; 120 + 50\} = 160$, optymalna marszruta: $\langle 6,7,9 \rangle$

<u>Etap 3:</u>
Problem decyzyjny rozwiązywany na etapie k=3.
Oznaczmy $F_3(i)$ – długość najkrótsze drogi z miasta $i \in I_3 = \{2,3,4\}$ do celu miasta (9).

$$F_3(i) = \min_{l \in I_2 = \{5,6\}} \{d_{i,l} + F_2(l)\}$$

Zatem:
$F_3(2) = min\{d_{2,5} + F_2(5); d_{2,6} + F_2(6)\} = min\{30 + 100; 50 + 160\} = 130$, optymalna marszruta: $\langle 2,5,7,9 \rangle$
$F_3(3) = min\{d_{3,5} + F_2(5); d_{3,6} + F_2(6)\} = min\{60 + 100; 80 + 160\} = 160$, optymalna marszruta: $\langle 3,5,7,9 \rangle$
$F_3(4) = min\{d_{4,5} + F_2(5); d_{4,6} + F_2(6)\} = min\{50 + 100; 70 + 160\} = 150$, optymalna marszruta: $\langle 4,5,7,9 \rangle$

<u>Ostatni etap 4:</u>
Problem decyzyjny rozwiązywany na etapie k=4.
Oznaczmy $F_4(i)$ – długość najkrótsze drogi z miasta $i \in I_4 = \{1\}$ do celu miasta (9).

$$F_4(i) = \min_{l \in I_3 = \{2,3,4\}} \{d_{i,l} + F_3(l)\}$$

Zatem:
$F_4(1) = min\{d_{1,2} + F_3(2); d_{1,3} + F_3(3); d_{1,4} + F_3(4)\} = min\{50 + 130; 40 + 160; 100 + 150\} = 180$.
Optymalna marszruta: $\langle 1,2,5,7,9 \rangle$.

Długość najkrótszej marszruty przejazdu przebiegającej przez etapy pośrednie: 1-2-5-7-9 w podanej na rysunku sieci drogowej wynosi 180 km.