LINIOWE MODELE OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Istnieje bardzo wiele sytuacji decyzyjnych, których nie możemy opisać używając tylko wyłącznie zmiennych ciągłych.

Wynika to z nieciągłości pewnych rozważanych procesów ekonomicznych:

- pracownika można przydzielić tylko do jednego z kilku dostępnych stanowisk pracy;
- projekt inwestycyjny będzie przyjmowany do realizacji lub nie;
- zakład produkcyjny będzie lokalizowany w jednym z możliwych punktów lokalizacji lub też nie;

We wszystkich przytoczonych sytuacjach decyzyjnych wymagamy, aby wszystkie (lub choć jedna zmienna decyzyjna), spośród tych które mamy wyznaczyć przyjmowały wartości tzw. ***dyskretne*** (np. ze zbioru liczb całkowitych: $x \in Z$, lub ze zbioru liczb binarnych: $x \in \{0,1\}$).

Zagadnienia decyzyjne, w których przynajmniej jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości dyskretne nazywamy – ***dyskretnym zagadnieniem decyzyjnym***, a ich matematyczne modele – ***dyskretnym zadaniem decyzyjnym*** (DZD).

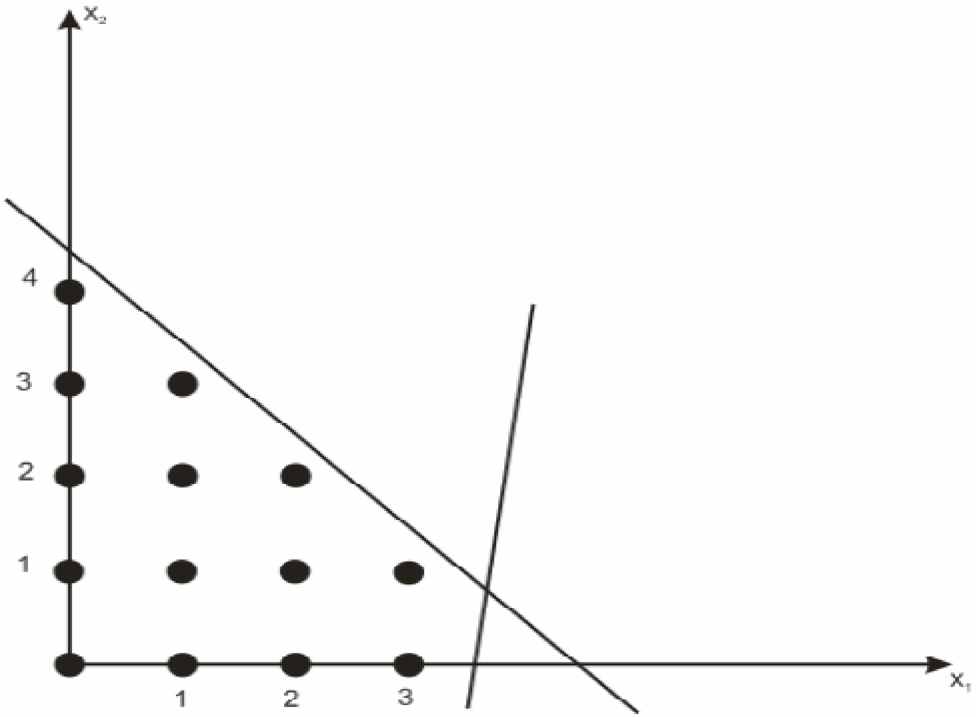
❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Interesować nas będą obecnie tylko takie dyskretne problemy decyzyjne, w których zarówno funkcja celu jak i warunki ograniczające są postaci liniowej – *zadania programowania dyskretnego - liniowego* (PDL). Wśród tego typu zadań wyróżnia się trzy podstawowe grupy:

- zadania *programowania całkowitoliczbowego - liniowego* (PCL)
- zadania *programowania binarnego – liniowego* (PBL)
- zadania *programowania mieszanego – liniowego* (PML)

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych „*D*” zadania programowania dyskretnego – liniowego jest zawsze zbiorem niespójnym (np. dla zadania programowania całkowitoliczbowego z dwoma zmiennymi - będzie to zbiór punktów o współrzędnych całkowitych znajdujących się w pewnym wieloboku). Nieciągłość zmiennych decyzyjnych powoduje, że zadania tego typu są trudniejsze do rozwiązania, niż zwykłe zadania programowania liniowego.



❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

- **Zagadnienie optymalnego przydziału**

Istnieje możliwość obsadzenia „n" – stanowisk roboczych (i = 1,2,...,n) przez „n" – osób (pracowników) (j = 1,2,...,n). Znane są efekty pracy j – tego robotnika na i – tym stanowisku pracy (macierz efektów pracy - $W_{i,j} = [w_{i,j}]_{i,j=1,2,...,n}$).

Efekty te mogą być oceniane pozytywnie (wydajność pracy, wartość produkcji w przeliczeniu na jednostkę czasu) lub negatywnie (liczba braków, czas wykonania pracy, koszty związane z pracą).
Należy dokonać takiego przydziału pracowników do poszczególnych stanowisk pracy, tak aby zminimalizować negatywne lub zmaksymalizować pozytywne efekty pracy dla całego zespołu (zakładu pracy).
Zakłada się ponadto, że każde stanowisko pracy może być obsadzone tylko przez jednego pracownika, a tym samym każdy pracownik może pracować tylko na jednym stanowisku.

Oznaczenia:

Oznaczmy przez $X_{i,j} = [x_{i,j}]_{i,j} = 1,2,...,n$ - macierz zmiennych decyzyjnych, która jest postaci:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{gdy j - ty pracownik jest przydzielony do i - tego stanowiska} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Model matematyczny:

Problem ten można przedstawić za pomocą następującego liniowego zadania programowania binarnego (PBL):

(funkcja celu)

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \cdot x_{i,j} \to \max(\min)$$

(warunki ograniczające)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

(każde stanowisko jest obsadzone tylko przez 1 pracownika)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$$

(każdy pracownik jest przydzielony tylko do 1 stanowiska)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{i, j=1,2,...,n.}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne (tym samym optymalne) to macierze postaci (dla n=5):

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie jest tylko jedna jedynka).

Zadanie optymalnego przydziału, mimo że jest klasycznym problemem **programowania dyskretnego**, to może być rozwiązane metodami programowania liniowego – **algorytmem simpleks** (co jest bardzo pracochłonne). Istnieje jednak stosunkowo prosty i skuteczny algorytm postępowania – **algorytm węgierski** (oparty na twierdzeniu węgierskiego matematyka - **Denesa Königa**), który można zastosować do rozwiązywania zadań optymalnego przydziału.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Przykład: W pewnym magazynie pracuje 3 pracowników magazynowych: P1, P2, P3, którzy mogą wykonywać 4 rodzaje zadań: Z1, Z2, Z3, Z4, z różną wydajnością. W tabeli poniżej podana jest wydajność pracowników przy wykonywaniu poszczególnych zadań:

Pracownicy	Wydajność pracowników (szt./godz.) przy wykonywaniu zadań magazynowych			
	Z1	Z2	Z3	Z4
P1	15	4	5	2
P2	3	6	3	10
P3	12	4	6	3

Zakładając specjalizację w ciągu dnia pracowników przy wykonywaniu tylko jednego zadania, przydzielić zadania poszczególnym pracownikom, tak aby zmaksymalizować łączną wydajność ich pracy.

Ponieważ w problemie optymalnego przydziału zakłada się, że liczba stanowisk pracy jest taka sama jak liczba pracowników, to w naszym przykładzie musimy wprowadzić czwartego fikcyjnego pracownika. Oczywiście wydajność jego pracy dla poszczególnych zadań będzie równa 0.

Macierz wydajności pracy (współczynników funkcji celu) jest więc postaci:

$$W = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \\ 12 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Matematyczny model zadania:

$$F(x_{i,j}) = 15x_{1,1} + 4x_{1,2} + 5x_{1,3} + 2x_{1,4} + 3x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3} + 10x_{2,4} + $$
$$+ 12x_{3,1} + 4x_{3,2} + 6x_{3,3} + 3x_{3,4} \to \max$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} & = & 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & = & 1 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} & = & 1 \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} & = & 1 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} & = & 1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} & = & 1 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} & = & 1 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_{i,j} = 0 \ \text{lub} \ x_{i,j} = 1; \\ i, j = 1,\dots,4; \end{array}$$

Rozwiążemy zadanie korzystając z wersji algorytmu węgierskiego, która zakłada, że funkcja celu jest postaci - minimum. Dlatego w rozwiązaniu będziemy minimalizować funkcję przeciwną do funkcji celu: $-F(x_{i,j})$, dla której macierz współczynników jest postaci:

$$W = \begin{bmatrix} -15 & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & -10 \\ -12 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 1: Przekształcenie macierzy: **W** – tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie znalazło się co najmniej jedno zero;

$$W=\begin{bmatrix} \boxed{-15} & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & \boxed{-10} \\ \boxed{-12} & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element najmniejszy

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & \boxed{13} \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-2 - (-15) = 13

Krok 2: Skreślenie w przekształconej macierzy współczynników funkcji celu wierszy oraz kolumn zawierających zero możliwie najmniejszą liczbą linii;

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

trzy linie – zatem przechodzimy do kroku 4

Jeżeli najmniejsza liczba linii konieczna do pokrycia wszystkich zer jest równa wymiarowi macierzy (**czyli - n**), to rozwiązanie, które otrzymamy na podstawie tak przekształconej macierzy współczynników będzie optymalne – przechodzimy do **kroku 3**. Jeżeli jest ona mniejsza niż wymiar macierzy – **W**, to przechodzimy do **kroku 4**.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 3: Ustalić tak rozwiązanie optymalne, aby w macierzy $\left[x_{i,j}^*\right]$ jedynki znalazły się tylko na tych miejscach, gdzie są zera w przekształconej macierzy – **W** (musimy dbać także, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie była tylko jedna jedynka).

Krok 4: Gdy liczba linii pokrywających zera jest mniejsza od wymiaru macierzy współczynników, to w bieżącej (przekształconej) macierzy współczynników należy znaleźć element najmniejszy oraz:

- odjąć go od elementów nieskreślonych;
- dodać go do elementów podwójnie skreślonych;
- elementy skreślone jedną linią (raz) pozostawiamy bez zmian;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & \boxed{6} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element minimalny

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 7 \\ 13 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elementy odjęte

Powrót do **kroku 2** i powtórzenie procedury, aż do uzyskania rozwiązania optymalnego.

elementy dodane

$$W = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 5 & 4 & 7 \\ 13 & 4 & 7 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & \boxed{0} & 3 \\ 6 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cztery linie
zatem rozwiązanie optymalne
(krok 3)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(x_{i,j}) = 15 + 10 + 6 =$$
$$= 31 \text{ [szt./godz.]}$$

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dla dyskretnych zadań decyzyjnych uniwersalną metodą ich rozwiązywania jest metoda ***podziału i ograniczeń***. Nie jest to ściśle ustalony algorytm postępowania jak np. algorytm „simpleks”, lecz raczej pewne podejście do rozwiązywania określonej klasy (***dyskretnych***) zadań optymalizacyjnych. Podejście to zostanie zaprezentowane na następującym przykładzie:

Przykład:
Rozwiązać następujące zadanie programowania całkowitoliczbowego – liniowego (PCL):

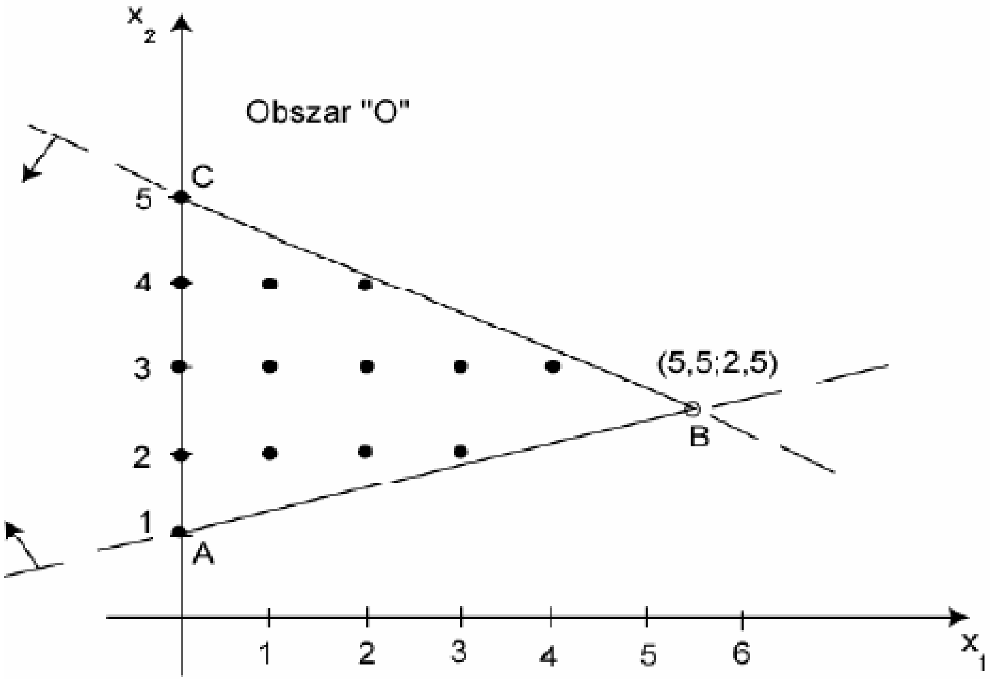
$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \geq 11 \\ 5x_1 + 11x_2 \leq 55 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ - całkowite} \end{cases}$$

Jeżeli pominiemy warunek całkowitoliczbowości, to zadanie to jest zadaniem programowania liniowego (PL), które można rozwiązać (geometrycznie, algorytmem „simpleks”).
Jeżeli zadanie (PL) nie ma rozwiązania optymalnego, to nie posiada go także zadanie PCL.
Jeżeli otrzymane rozwiązanie optymalne dla (PL) spełnia ponadto warunek całkowitoliczbowości, to jest to oczywiście poszukiwane rozwiązanie zadania PCL, jeśli nie, to stosuje się wtedy metodę ***podziału i ograniczeń***.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Ponieważ nasze zadanie posiada tylko dwie zmienne decyzyjne, to spróbujemy go rozwiązać metodą geometryczną.



$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2$$

warstwica: $x_2 = -2x_1$

$f(A) = 2$, $f(C) = 10$

$\max = f(B) = 27$

Ponieważ nasze rozwiązanie maksymalne nie jest całkowitoliczbowe, to należy zastosować metodę podziału i ograniczeń.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Zdefiniujmy tzw. funkcję ograniczającą z góry ***„ozn. w" (kres górny)*** określoną na rodzinie 2^O wszystkich podzbiorów obszaru „O", która spełnia warunki:

(1) $x \in O_1 \subset O \Rightarrow f(x) \leq w(D_1)$ - kres górny zbioru nie może być mniejszy od maksymalnej wartości funkcji celu dla rozwiązań z tego zbioru.

(2) $O_2 \subset O_1 \subset O \Rightarrow w(O_2) \leq w(O_1)$ - kres górny zbioru zawierającego jakiś swój podzbiór nie może być mniejszy od kresu górnego tego jego podzbioru.

(3) $O_1 = \{x\} \subset D \Rightarrow w(O_1) = f(x)$ - jeżeli zbiór jest jednoelementowy, to jego kres górny jest równy wartości funkcji celu dla tego elementu.

Uwaga: W definicji kresu dolnego nierówności w warunkach (1) i (2) zmieniają się na przeciwne.

Przykład:

Kresem górnym może być funkcja:

$w(O) = 15$, $O_1 \subset O = \{x^1, x^2\}, f(x^1) = 8, f(x^2) = 9$, $w(O_1) = 10$,

$O_2 \subset O = \{x^3\}, f(x^3) = 14, w(O_2) = 14$.

Nie może być to natomiast funkcja zdefiniowana następująco:

$w(O) = 15$, $O_1 \subset O = \{x^1, x^2\}, f(x^1) = 8, f(x^2) = 9$, $w(O_1) = 20$,

$O_2 \subset O = \{x^3\}, f(x^3) = 14, w(O_2) = 16$

(nie są spełnione warunki (2) i (3))

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dokonujemy podziału zbioru (obszaru) „O” na coraz mniejsze podzbiory. W wyniku „r” podziałów zbioru „O” uzyskujemy „2r” jego podzbiorów. Podziałów kolejnych podzbiorów dokonujemy dla tzw. ***podzbiorów perspektywicznych***.

Podzbiorem perspektywicznym O_p w „r - tym” kroku obliczeń (dla zadań na maksimum) jest taki zbiór, dla którego $w(O_p) = \max\{w(D_l) : D_l \in G^r\}$, gdzie G^r - rodzina podzbiorów ***aktywnych*** (które nie zostały jeszcze podzielone). Dla zadań na minimum w warunku tym pojawia się (minimum oraz kres dolny).

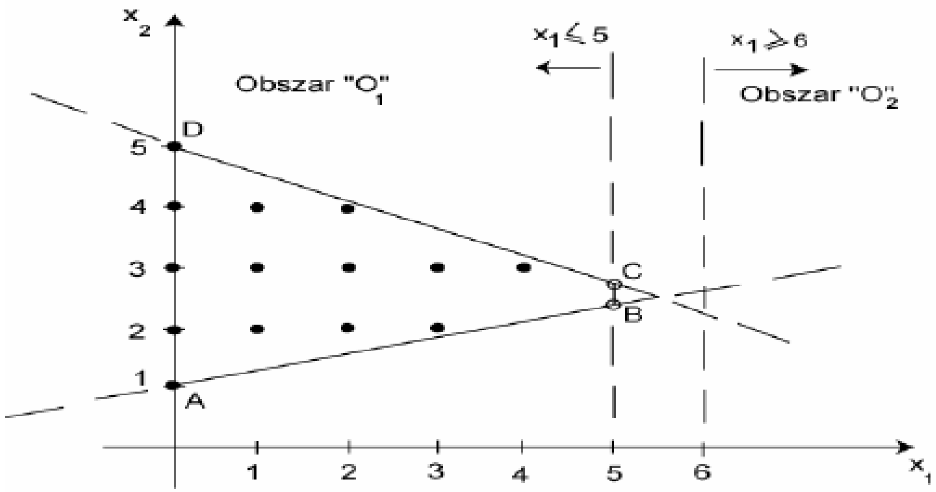
Podstawę podziału zbiorów aktywnych – perspektywicznych stanowi pierwsza zmienna w rozwiązaniu optymalnym (dla zbioru perspektywicznego) - x^p, która nie spełnia warunku całkowitoliczbowości. Jeżeli będzie to zmienna x_k^p - wtedy dzielimy go na dwa podzbiory:

(4)

$$O_{2r+1} = \{x : x \in O_p \wedge x_k \le N(x_k^p)\}, O_{2r+2} = \{x : x \in O_p \wedge x_k \ge N(x_k^p) + 1\}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dla naszego przykładu początkowym zbiorem aktywnym perspektywicznym jest zbiór „O”. Kres górny tego zbioru wynosi: $w(O) = f(B) = 27$. Obie zmienne decyzyjne w stowarzyszonym rozwiązaniu optymalnym (PL) nie są całkowite, więc dokonujemy podziału „O” na dwa podzbiory: O_1, O_2 względem zmiennej x_1 zgodnie ze wzorem (4).

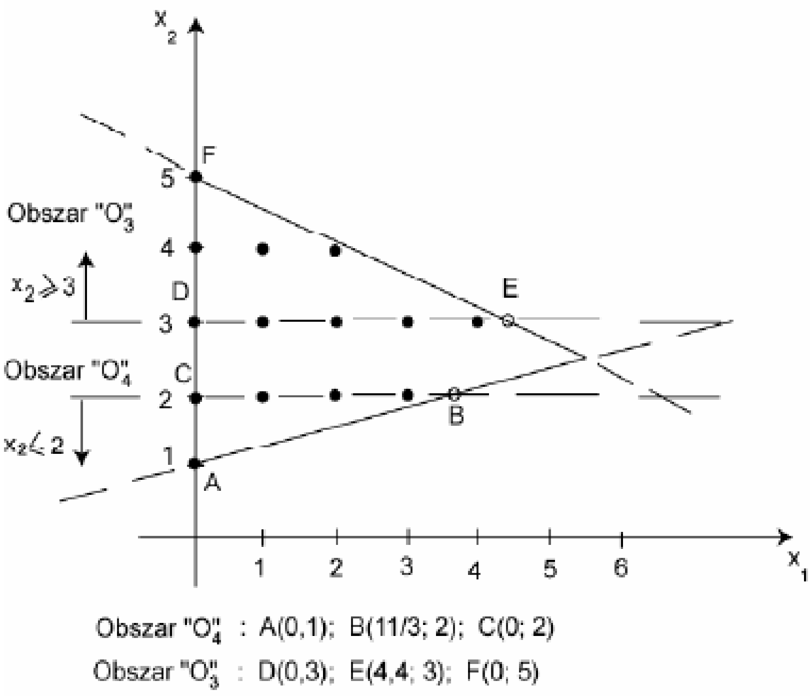


Obszar "O_1" : A(0,1); B(5; 26/11); C(5; 30/11); D(0,5)

Obszar O_2 - jest zbiorem pustym dlatego ***zamykamy go*** przypisując mu symboliczny kres górny: $w(O_2) = -\infty$. Obszar O_1 jest zatem obszarem perspektywicznym – aktywnym. Optymalna wartość funkcji celu dla stowarzyszonego zadania PL jest spełniona dla punktu „C” tego obszaru i wynosi: 280/11=25,45. Jako kres górny możemy przyjąć: $w(O_1) = 26$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Ponieważ druga współrzędna optymalnego rozwiązania (PL) nie jest całkowita, więc zgodnie z (4) dzielimy O_1 na dwa podzbiory aktywne: O_3, O_4 względem zmiennej x_2.



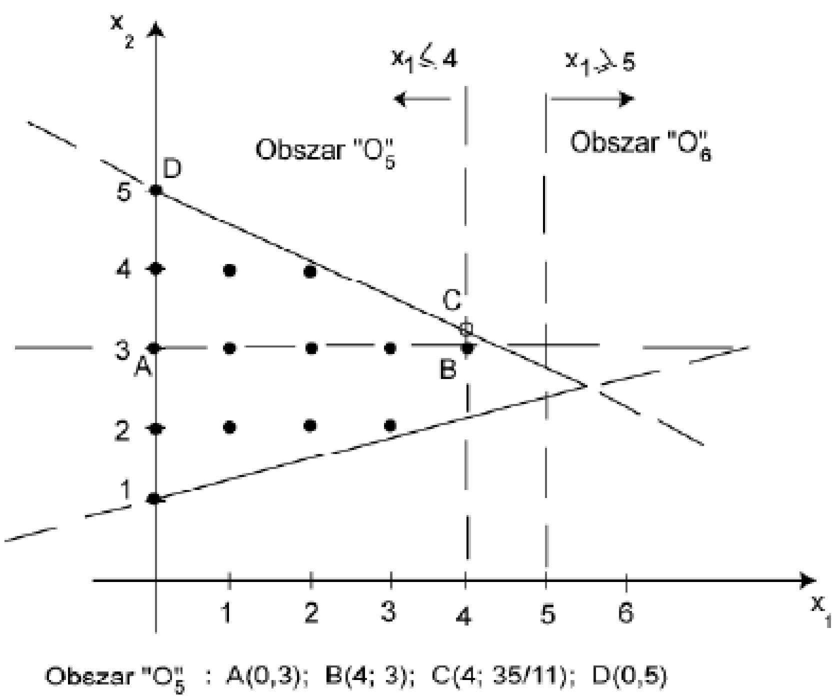
Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_3 jest spełniona dla punktu „E" tego obszaru oraz wynosi: 23,6. Jako kres górny możemy przyjąć: $w(O_3) = 24$.

Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_4 jest spełniona dla punktu „B" tego obszaru oraz wynosi: 56/3=18,67.

Za kres górny możemy przyjąć: $w(O_4) = 19$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Podzbiorem perspektywicznym jest zatem zbiór O_3. Ponieważ pierwsza współrzędna optymalnego rozwiązania (PL) nie jest całkowita, więc zgodnie z (4) dzielimy O_3 na dwa podzbiory aktywne: O_5, O_6 względem zmiennej x_1.

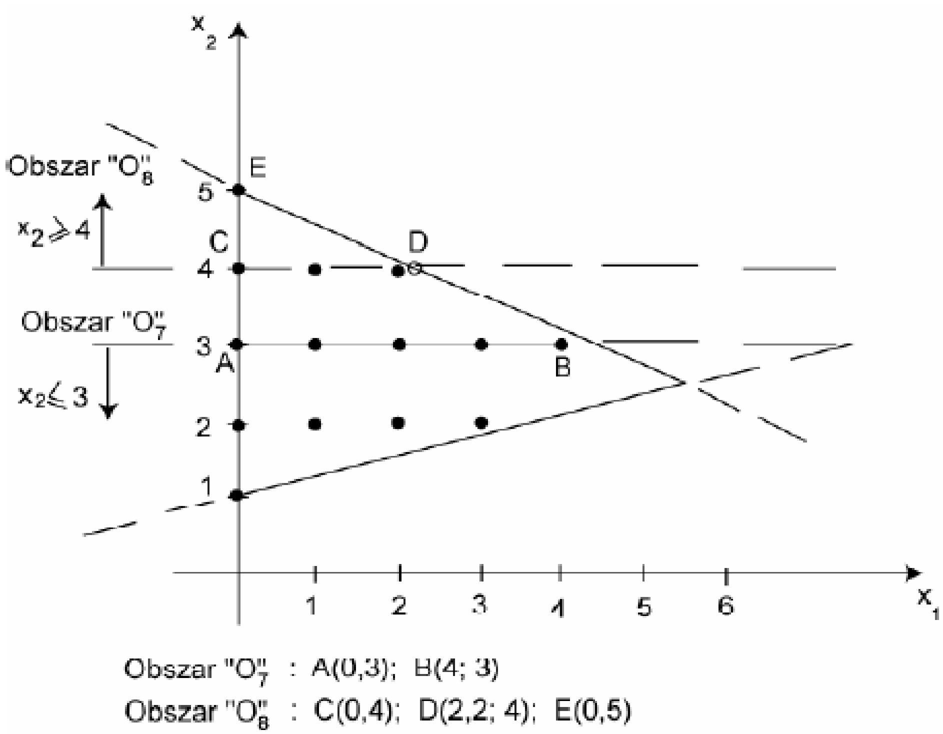


Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_5 jest spełniona dla punktu „C" tego obszaru oraz wynosi: 246/11=22,36.
Jako kres górny możemy przyjąć: $w(O_5) = 23$.

Obszar O_6 jest zbiorem pustym zatem zamykamy go przyjmując kres górny $w(O_6) = -\infty$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Zbiór O_5 jest perspektywiczny, więc znowu go dzielimy na dwa podzbiory O_7, O_8 względem zmiennej posiadającej niecałkowite rozwiązanie optymalne dla zadania stowarzyszonego (PL) w tym obszarze. Będzie to zmienna - x_2.



Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_7 jest spełniona dla punktu „B” tego obszaru oraz wynosi: 22.

Ponieważ optymalne rozwiązanie PL dla obszaru O_7 jest całkowitoliczbowe, to: jest to również rozwiązanie optymalne wyjściowego zadania ***PCL***.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Podział zbioru „O" na coraz mniejsze podzbiory można przedstawić w postaci tzw. *„drzewa podziału"*. Z każdym jego wierzchołkiem (o numerze „k - tym") jest związany:

- podzbiór O_k
- zadanie programowania liniowego PL^k (dla tego podzbioru)
- jego rozwiązanie optymalne: x_k^*
- kres górny (dolny) tego zbioru $w(O_k)$

Dla naszego zadania drzewo jest postaci: