



**ELEMENTY**

**TEORII GIER**

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## ELEMENTY TEORII GIER

**TEORIA GIER** jest to matematyczna teoria rozwiązywania sytuacji konfliktowych bądź współpracy, w których wynik uzyskany przez jedną osobę (gracza, uczestnika gry) zależy także od decyzji podejmowanych przez innych uczestników gry. Teoria gier nie bada przyczyn ani genezy konfliktów – interesują ją tylko optymalne ich rozwiązania.

Jak sama nazwa wskazuje, teoria gier wzięła swój początek z analizy rozgrywek gier karcianych, szachów itp. Obecnie jej zastosowanie jest o wiele szersze i obejmuje wiele dziedzin, w tym nauki o zarządzaniu.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## Podstawowe definicje i założenia

Pod nazwą **GRY** rozumiemy pewien sformalizowany model sytuacji konfliktowej.

Słowo **GRACZ** oznacza pojedynczą osobę lub grupę osób tworzących koalicję (działających wspólnie, we wspólnym interesie).

Aby daną sytuację rozpatrywać z punktu widzenia teorii gier należy przyjąć pewne założenia odnośnie gry i stron konfliktu:

- istnieje co najmniej dwóch graczy,
- każdy z graczy posiada przynajmniej dwie **strategie** czyli drogi postępowania,
- w wyniku każdej gry każdy z graczy otrzymuje pewną wygraną (zwaną też **wypłatą**), której wysokość zależy od strategii zastosowanych przez wszystkich graczy. Wygraną (wypłatę) wyraża się dla wygody w liczbach.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## TYPY GIER

Gry można dzielić według wielu kryteriów, np. ze względu na:

- ilości graczy: gry **dwuosobowe** i **wielosobowe** (w przypadku niektórych gier wielosobowych może dochodzić do zawiązywania koalicji),
- kooperację między graczami: gry **kooperatywne** (w których gracze mogą porozumiewać się między sobą i zawierać koalicje) i **niekooperatywne** (w których jest to zabronione lub niemożliwe),
- charakter gry: gry **o sumie zerowej** (w których jeden z graczy otrzymuje dokładnie tyle ile drugi musi oddać) i gry **o sumie niezerowej** (możliwe jest np. że wszyscy gracze zyskują w wyniku rozgrywki),
- dostępną informację: gry **z pełną informacją** (gracz zna wszystkie strategie i cel swojego przeciwnika) i gry **z informacją niekompletną** (gracz nie wie jaki cel przyświeca przeciwnikowi),
- gry **strategiczne** i gry **ekstensywne**.

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W grach strategicznych gracze znają nawzajem swoje strategie, czyli wiedzą, jak mogą zachować się inni gracze. Wyboru strategii dokonują jednak jednocześnie, a dokładniej czynią to nie wiedząc, którą ze swoich strategii wybrali przeciwnicy. Co więcej, ustalają oni w ten sposób swój plan postępowania raz na zawsze i nie mogą go zmienić w trakcie rozgrywki. Prostym przykładem takiej gry jest dziecięca zabawa w "kamień-nożyce-papier".

W grach ekstensywnych istnieje pewna kolejność posunięć – gracze wykonują swoje ruchy (tj. dokonują wyboru strategii) na podstawie ruchów przeciwnika. Innymi słowy mamy tu do czynienia z ciągłym dopasowywaniem się graczy do zaistniałej sytuacji. Za przykład mogą posłużyć tu szachy.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO

Z grami o sumie zerowej mamy do czynienia wszędzie tam, gdzie interesy graczy są dokładnie przeciwstawne, czyli tam, gdzie wygrana (zysk) jednego gracza jest równy przegranej (stracie) drugiego. Gry te służą więc do modelowania sytuacji czystego konfliktu, w których nie ma mowy o współpracy między graczami, ze względu na wyraźną sprzeczność ich interesów.

### Przykład

Dwie firmy (A i B) produkują pewien wyrób i konkurują ze sobą o rynek zbytu. Aby zwiększyć swą konkurencyjność, firmy podjęły pewne działania marketingowe. Obie firmy rozważają 3 możliwości (strategie):  $A_1$  ( $B_1$ ) – zastosować lepsze opakowanie produktu,  $A_2$  ( $B_2$ ) – zwiększyć nakłady na reklamę,  $A_3$  ( $B_3$ ) – nieznacznie obniżyć cenę. Oszacowane efekty tych działań w postaci procentowego zwiększenia udziału w rynku sprzedaży produktu dla firmy A umieszczone są w tabeli.

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Wybrać optymalną strategię dla każdej z firm zakładając, że każda z nich podejmując decyzję nie zna wyboru konkurenta.

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	4	6	2
$A_2$	2	8	0
$A_3$	6	-4	-2

Gry dwuosobowe najłatwiej jest przedstawić w postaci **macierzy wypłat**. Tak przedstawioną grę nazywamy **grą w postaci normalnej**. Macierz wypłat zawiera wartości wypłat dla wszystkich możliwych kombinacji strategii obu graczy. W przypadku gier o sumie zerowej stosuje się zapis uproszczony – wystarczy macierz wypłat gracza A o elementach  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ;  $j=1,2,\dots,m$ ;  $n$  – liczba strategii gracza A,  $m$  – liczba strategii gracza B).

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Poszukiwanie rozwiązania gry najlepiej przeprowadzić w 3 krokach:

1. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.
2. Usunięcie strategii zdominowanych.
3. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.

**Strategie czyste:**

- gracza A:  $A_1, A_2, A_3,$
- gracza B:  $B_1, B_2, B_3.$

**Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.**

Ogólny sposób poszukiwania rozwiązania w zbiorze strategii czystych (punktu siodłowego) jest następujący:

- wypisać minima z każdego wiersza i wybrać największe z nich:

$$v_A = \max_i \{ \min_j \{ a_{ij} \} \} \quad (\text{wartość dolna gry})$$



# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

- wypisać maksima z każdej kolumny i wybrać najmniejsze z nich:

$$v_B = \min_j \{ \max_i \{ a_{ij} \} \} \quad (\text{wartość górna gry})$$

Jeżeli obie liczby są równe ( $v_A = v_B$ ), to gra posiada rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (punkt siodłowy). Gracze powinni stosować te strategie, które odpowiadają wyznaczonemu wierszowi i kolumnie. Jeżeli wybiorą inne strategie, narażą się na niepotrzebne straty.

W przykładzie istnieje punkt siodłowy (rozwiązanie w zbiorze strategii czystych). Gracz A powinien stosować strategię  $A_1$ , gracz B –  $B_3$ . Wartość gry wyniesie wtedy:  $v = v_A = v_B = 2$ .

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$\min a_{ij}$
$A_1$	4	6	2	2
$A_2$	2	8	0	0
$A_3$	6	-4	-2	-4
$\max a_{ij}$	6	8	2	

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## Poszukiwanie strategii zdominowanych.

Strategii zdominowanych (nieefektywnych, nieracjonalnych) poszukujemy, aby uprościć grę (zmniejszyć macierz wypłat). Strategię  $S_p$  nazywamy **zdominowaną** przez strategię  $S_r$ , jeżeli:

- dla gracza A:  $\forall j : a_{pj} \leq a_{rj}$ ,
- dla gracza B:  $\forall i : a_{ip} \geq a_{ir}$ .

Procedurę znajdowania i usuwania strategii zdominowanych przedstawiono dla przykładowej macierzy wypłat.

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	4	6	2
$A_2$	2	8	0
$A_3$	6	-4	-2

Strategie gracza A nie są zdominowane (na razie).  
 $B_1$  jest zdominowana przez  $B_3$  (usuwamy  $B_1$ ).

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$a_{ij}$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	6	2
$A_2$	8	0
$A_3$	-4	-2

$A_3$  jest zdominowana przez np.  $A_1$  (usuwamy  $A_3$ ).

$a_{ij}$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	6	2
$A_2$	8	0

$B_2$  jest zdominowana przez  $B_3$  (usuwamy  $B_2$ ).

$a_{ij}$	$B_3$
$A_1$	2
$A_2$	0

$A_2$  jest zdominowana przez  $A_1$  (usuwamy  $A_2$ ).

$a_{ij}$	$B_3$
$A_1$	2

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Udało się macierz wypłat zredukować do jednego wiersza i jednej kolumny, czyli gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych ( $A_1$ ,  $B_3$ ). Wartość gry wynosi 2.

**Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.**

**Strategią mieszaną** dla danego gracza będziemy nazywać liniową kombinację wypukłą jego strategii czystych.

Stosowane są na ogół w dwóch rodzajach sytuacji:

- w przypadku wielokrotnego (niezależnego od siebie) rozgrywania tej samej gry,
- gdy obszar zastosowania decyzji daje się podzielić na wystarczająco wiele obszarów częściowych.

Optymalnym rozwiązaniem gry będzie strategia mieszana, gdy gra nie ma punktu siodłowego.

Przyjmijmy **NOWĄ** macierz wypłat w analizowanym przykładzie.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	2	4	6
$A_2$	3	1	4
$A_3$	2	3	3

Gra nie ma rozwiązania w zbiorach strategii czystych ( $v_A=2$ ,  $v_B=3$ ).  
Usuujemy strategie zdominowane ( $A_3$  jest zdominowana przez  $A_1$ ,  $B_3$  jest zdominowana przez  $B_1$ ).

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$
$A_1$	2	4
$A_2$	3	1

Szukając optymalnych strategii mieszanych można wykorzystać metody i techniki programowania liniowego.

## Oznaczenia:

$p_i$  – częstość stosowania przez gracza A strategii  $A_i$ ,  $i=1,2$ ,

$q_j$  – częstość stosowania przez gracza B strategii  $B_j$ ,  $j=1,2$ .

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza A (częstości  $p_i$ ) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}v &\rightarrow \max \\2p_1 + 3p_2 &\geq v, \\4p_1 + 1p_2 &\geq v, \\p_1 + p_2 &= 1, \\p_1, p_2 &\geq 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Jeżeli dokonamy podstawienia:  $x_i = \frac{p_i}{v}$  (przy zał.  $v > 0$ ), to (1) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} &= x_1 + x_2 \rightarrow \min \\2x_1 + 3x_2 &\geq 1, \\4x_1 + 1x_2 &\geq 1, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}\tag{2}$$

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Rozwiązanie (2):  $x_1=0,2$ ,  $x_2=0,2$ ,  $v=2,5$ .

Stąd łatwo wyznaczyć:  $p_1=0,5$ ,  $p_2=0,5$ .

Czyli gracz A powinien stosować strategie  $A_1$  i  $A_2$  z częstością 0,5 oraz nie stosować strategii  $A_3$  (zdominowana). Minimalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy 2,5.

Podobnie postępujemy dla gracza B. Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza B (częstości  $q_j$ ) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}v &\rightarrow \min \\2q_1 + 4q_2 &\leq v, \\3q_1 + 1q_2 &\leq v, & (3) \\q_1 + q_2 &= 1, \\q_1, q_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Jeżeli dokonamy podstawienia:  $y_j = \frac{q_j}{v}$  (przy zał.  $v>0$ ), to (3) można zapisać następująco:

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} = y_1 + y_2 &\rightarrow \max \\ 2y_1 + 4y_2 &\leq 1, \\ 3y_1 + 1y_2 &\leq 1, \\ y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**Rozwiązanie (4):  $y_1=0,3$ ,  $y_2=0,1$ ,  $v=2,5$ .**

**Stąd łatwo wyznaczyć:  $q_1=0,75$ ,  $q_2=0,25$ .**

**Czyli gracz B powinien stosować strategię  $B_1$  z częstością 0,75 i strategię  $B_2$  z częstością 0,25 oraz nie stosować strategii  $B_3$  (zdominowana). Maksymalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy również 2,5.**



# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## GRY Z NATURĄ

Gry z naturą rozgrywane są przy założeniu pasywnej postawy drugiego z graczy, któremu wynik gry jest obojętny.

### Przykład

Inwestor ma podjąć decyzję  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), jaki typ zakładu usługowego ma uruchomić. Dla każdego typu zakładu oszacowano przewidywany zysk  $a_{ij}$ , jaki osiągnie się w wyniku eksploatacji zakładu przy różnych stanach  $S_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) przyszłego popytu (pesymistycznym –  $S_1$ , przeciętnym –  $S_2$ , optymistycznym –  $S_3$ ). Dane umieszczone są w poniższej tabeli.

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$D_1$	-20	15	50
$D_2$	-10	25	40
$D_3$	-5	10	20
$D_4$	5	5	25

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Decydent może kierować się np. 4 poniższymi kryteriami podejmowania decyzji w warunkach niepewności: Walda (maksyminowe), Hurwicza, Bayesa i Savage'a.

## 1. Kryterium Walda (maksyminowe)

Zgodnie z tym kryterium należy wybrać taki wariant działalności, który przy najmniej korzystnym stanie natury pozwala osiągnąć najlepszy wynik. Jest to reguła asekurancka, reguła gracza ostrożnego, ale inteligentnego.

$$a_{kl} = \max_i \{ \min_j \{ a_{ij} \} \} \rightarrow D_k$$

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\min\{a_{ij}\}$
$D_1$	-20	15	50	-20
$D_2$	-10	25	40	-10
$D_3$	-5	10	20	-5
$D_4$	5	5	25	5

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Walda powinien podjąć decyzję  $D_4$ .

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## 2. Kryterium Hurwicza

Jest to kryterium kompromisowe między skrajnym pesymizmem a skrajnym optymizmem. Wprowadza się w nim tzw. **współczynnik ostrożności**  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ), który określa, w jakim stopniu podejmujący decyzję jest pesymistą.

$$a_k = \max_i \{ \gamma \min_j \{ a_{ij} \} + (1 - \gamma) \max_j \{ a_{ij} \} \} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Hurwicza przy współczynniku ostrożności 0,4 powinien podjąć decyzję  $D_1$ .

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\min\{a_{ij}\}$	$\max\{a_{ij}\}$	$a_k$
$D_1$	-20	15	50	-20	50	22
$D_2$	-10	25	40	-10	40	20
$D_3$	-5	10	20	-5	20	10
$D_4$	5	5	25	5	25	17

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## 3. Kryterium Bayesa

W tym kryterium przyjmuje się, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne (możemy więc mówić o neutralnym stanowisku w kwestii przyszłych warunków działalności) i wyznacza się wartość średnią wyników dla każdej decyzji. Optymalną jest ta decyzja, dla której średni wynik jest maksymalny.

$$\bar{a}_k = \max_i \{\bar{a}_i\} = \max_i \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij} \right\} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Bayesa powinien podjąć decyzję  $D_2$ .

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\bar{a}_i$
$D_1$	-20	15	50	15
$D_2$	-10	25	40	18,3
$D_3$	-5	10	20	8,3
$D_4$	5	5	25	11,7

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## 4. Kryterium Savage'a

W tym kryterium nie ocenia się wyników podjętych decyzji, lecz skutki (straty) wynikające z niepodjęcia decyzji, która przy danym stanie natury byłaby najlepsza. Wyznaczenie decyzji optymalnej odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym tworzymy macierz „żalu” (względnych, relatywnych strat), w której znajdują się różnice  $b_{ij}$  między maksymalnym do osiągnięcia wynikiem w warunkach  $S_j$  a wynikiem uzyskanym w razie podjęcia decyzji  $D_i$ .

$$b_{ij} = \max_i \{a_{ij}\} - a_{ij}$$

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$D_1$	-20	15	50
$D_2$	-10	25	40
$D_3$	-5	10	20
$D_4$	5	5	25
$\max a_{ij}$	5	25	50

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W etapie drugim, w tak określonej macierzy względnych strat poszukuje się elementu maksymalnego w każdym wierszu, a następnie wiersza, w którym wartość ta jest najmniejsza.

$$b_{kl} = \min_i \{ \max_j \{ b_{ij} \} \} \rightarrow D_k$$

$b_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\max\{b_{ij}\}$
$D_1$	25	10	0	25
$D_2$	15	0	10	15
$D_3$	10	15	30	30
$D_4$	0	20	25	25

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Savage'a powinien podjąć decyzję  $D_2$ .