ZAGADNIENIA

TRANSPORTOWE

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

WYBRANE ZAGADNINIA OPTYMALIZACJI LINIOWEJ W PROBLEMACH TRANSPORTOWYCH

1. Zagadnienie transportowe – zamknięte (ZZT)

Przedsiębiorstwo potrzebuje przetransportować produkt z m - punktów lokalizacji (magazynów, lokalizacji początkowych) do n - lokalizacji docelowych.

Zakłada się, że w każdej lokalizacji początkowej znajduje się $a_i, i = 1,\ldots,m$ jednostek towaru (dostępna podaż towaru), zaś do każdej lokalizacji docelowej należy dostarczyć $b_j, j = 1,\ldots,n$ jednostek tego towaru (popyt – zapotrzebowanie na produkt).

Zakłada się ponadto, że całkowita wielkość towaru dostępna w punktach początkowych równa jest wymaganej całkowitej wielkości towaru niezbędnej do dostarczenia do punktów docelowych: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Jeżeli jednostkowy koszt transportu (1 jednostki towaru) z i-tego punktu początkowego do j-tego punktu docelowego wynosi $c_{ij}, i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n$ należy odpowiedzieć na pytanie:

Ile jednostek towaru powinno być przetransportowanych pomiędzy każdym punktem początkowym, a każdym punktem docelowym jego lokalizacji, aby zminimalizować całkowity koszt transportu.

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zakładając $x_{ij} \geq 0, i = 1,...,m, j = 1,...,n$ - wielkości produktu transportowane z i-tego punktu początkowego do j-tego punktu docelowego, powyższy problem decyzyjny można zapisać za pomocą następującego zadania optymalizacji liniowej:

$$Min\ F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,...,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,...,n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,...,m; j = 1,...,n) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

3. Modyfikacje zagadnienia transportowego:

- Otwarte zagadnienie transportowe - OZT

Jeżeli zmodyfikujemy założenie o bilansie pomiędzy całkowitą podażą oraz całkowitym popytem, tzn. przyjmiemy założenie, że $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$, to zadanie transportowe jest zadaniem otwartym (OZT) postaci:

$$Min\ F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

- Zagadnienie transportowo-produkcyjno-magazynowe (ZTP-M)

Jeżeli założymy, że istnieje nadwyżka podaży nad popytem: $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$, to nadwyżka towaru: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, jaka pozostaje w magazynach punktów początkowych i nie jest wysyłana do punktów docelowych musi być składowana w punktach początkowych.

Załóżmy, że wielkości magazynowanego towaru w punktach początkowych opisują zmienne: $x_{i,n+1} \geq 0, i = 1,\dots,m$, $\left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = b_{n+1}\right)$, zaś jednostkowy koszt jego składowania wynosi $h_i, i = 1,\dots,m$.

W analizowanym problemie decyzyjnym uwzględniamy dodatkowo jednostkowe koszty wytworzenia (wyprodukowania) przewożonych towarów w każdym punkcji początkowym.

Koszt ten opisują parametry: $p_i, i = 1,\dots,m$.

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zadanie optymalizacji liniowej dla tak sformułowanego problemu decyzyjnego jest postaci:

$$Min\ F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (p_i + c_{ij}) \cdot x_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{i,n+1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n+1) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n+1) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

4. Zagadnienie pośrednika:

Pośrednik (sprzedawca) nabywa towar od m - dostawców, przewozi go oraz sprzedaje n - odbiorcom.

Dane są:

a_i - maksymalna ilość towaru jaką można kupić u i -tego dostawcy (jego podaż)

b_j - maksymalna ilość towaru jaką można sprzedać j -temu odbiorcy (jego popyt)

k_i - cena zakupu u i -tego dostawcy

p_j - cena sprzedaży j -temu odbiorcy

c_{ij} - jednostkowy koszt transportu na trasie od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy

Należy ustalić taki plan zakupów, transportu i sprzedaży, aby dochód pośrednika był maksymalny (dochód = przychód ze sprzedaży - koszty zakupu - koszty transportu)

$d_{ij} = p_j - k_i - c_{ij}$ - dochód jednostkowy z trasy zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \to \max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

5. Zagadnienie transportowe z ograniczoną przepustowością tras:

Mamy m - dostawców pewnego towaru oraz n - jego odbiorców.

Znana jest:

a_i - podaż i-tego dostawcy

b_j - popyt j-tego odbiorcy

c_{ij} - jednostkowe koszty transportu na trasie $\langle i, j \rangle$ od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy

Zakładamy, że przepustowość niektórych lub wszystkich tras jest ograniczona (np. dostępną ładownością środków transportu).

Oznaczmy:

H - zbiór tras z ograniczoną przepustowością

h_{ij} - maksymalna przepustowość na trasie $\langle i, j \rangle$

Zakłada się również, że: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Należy ustalić taki plan dostaw towarów od nadawców do odbiorców, aby łączny ich koszt był minimalny.

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} \cdot x_{ij}) \to \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \le h_{ij} & \langle i, j \rangle \in H \\ x_{ij} \ge 0 & (i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

6. **Minimalizacja pustych przebiegów (dotyczy optymalnego krążenia środków transportu rozwożących towar):**

Załóżmy, że istnieje n - miast pomiędzy którymi odbywa się wymiana towarowa.

Miasta te tworzą układ zamknięty, tzn. wymiana towarów odbywa się tylko pomiędzy nimi i każde z nich może być zarówno dostawca jak i odbiorcą towarów.

Do każdego miasta przywozi się i z każdego wywozi się określoną masę towarową nadającą się do przewozu określonym środkiem transportu (o określonej ładowności)

Znane są:

d_{ij} - odległości pomiędzy i-tym oraz j-tym miastem

a_{ij} - przewóz masy towarowej pomiędzy miastami - wyrażony liczbą pełnych środków transportu (samochodów, wagonów)

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Dla każdego miasta określa się:

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do wywiezienia masy towarowej (wywóz) równą: $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do przywiezienia masy towarowej (przywóz) równą: $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Dla całego układu spełniona jest równość: $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Natomiast dla poszczególnych miast wywóz (w_i) wcale nie musi być równy przywozowi (p_i).

Miasta w których $w_i > p_i$ - są odbiorcami tzw. pustych przebiegów, a ich zapotrzebowanie na puste środki transportu wynosi: $b_i = w_i - p_i > 0$.

Miasta w których $w_i < p_i$ - są dostawcami pustych przebiegów, a ich podaż pustych środków transportu wynosi: $a_i = p_i - w_i > 0$.

Miasta w których $p_i = w_i$ eliminujemy z dalszych rozważań (bo nie występuje dla nich problem pustych przebiegów)

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Problem decyzyjny jest następujący:
Znaleźć taki plan przebiegów pustych środków transportu pomiędzy miastami, aby łączny pojazdokilometraż (samochodokilometraż, wagonokilometraż) pustych przebiegów był minimalny.

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - liczba pustych środków transportu wysyłanych z miasta i do miasta j

$i = 1, 2, ..., k$ - indeks miast dostawców, dla których występuje problem pustych przebiegów

$j = 1, 2, ..., l$ - indeks miast odbiorców, dla których występuje problem pustych przebiegów

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \to \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, ..., k) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, ..., l) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, ..., k;\ j = 1, ..., l) \end{cases}$$

1. Praktyczny przykład problemu decyzyjnego – sformułowanego za pomocą zamkniętego zadania transportowego ZZT.

Cztery piekarnie zlokalizowane na terenie miasta są zaopatrywane w mąkę z dwóch magazynów znajdujących się na peryferiach miasta. Zapasy mąki w magazynach wynoszą odpowiednio: I magazyn – 130 t, II – magazyn – 200 t. Natomiast zapotrzebowanie piekarń jest równe odpowiednio: I piekarnia – 80 t, II – piekarnia – 120 t, III – piekarnia – 70 t, III – piekarnia – 60 t. Koszty dostawy mąki do piekarń zależą tylko od odległości dostaw i są podane w tabeli kosztów:

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Należy wyznaczyć, taki plan dostaw mąki z magazynów do piekarń, aby dostarczyć piekarniom wymagane ilości, przy minimalnych sumarycznych kosztach jej transportu.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

1. Algorytm wyznaczania rozwiązań ZZT.

Idea poszukiwania rozwiązań ZZT jest podobna do idei algorytmu „simpleks".

Najpierw należy znaleźć jakiekolwiek początkowe rozwiązanie bazowe (ponieważ rząd macierzy rz(A)= n + m – 1), to rozwiązanie bazowe niezdegenerowane posiada n + m - 1 dodatnich wartości w wektorze zmiennych decyzyjnych – zmienne bazowe, pozostałe wartości to zera – dla zmiennych niebazowych.

Następnie sprawdza się, czy rozwiązanie bazowe aktualne jest optymalne, czy też nie. Jeśli nie to znajdujemy kolejne rozwiązanie nie gorsze od poprzedniego i znów sprawdzamy jego optymalność. Powyższe postępowanie kończymy, gdy wreszcie uzyskamy rozwiązanie bazowe optymalne.

Algorytmicznie otrzymywanie rozwiązań ZZT można przedstawić następująco:
ETAP I (wyznaczenie dopuszczalnego początkowego rozwiązania bazowego).
W literaturze opisanych jest wiele metod konstrukcji początkowego rozwiązania bazowego, np.:

- Metoda ***kąta północno – zachodniego*** (N-W) – prosta ale mało efektywna (wymagane jest zazwyczaj przeprowadzenie dużej liczby iteracji, aby uzyskać z niego końcowe rozwiązanie optymalne).
- Metoda ***minimalnego elementu*** macierzy kosztów transportu – na ogół bardziej efektywna od poprzedniej.
- Metoda VAM (***aproksymacyjna***) – nieco bardziej złożona od poprzednich, ale daje rozwiązania początkowe bliskie rozwiązaniom optymalnym.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów:

Oznaczmy przez (r , k) – numer zmiennej wybieranej w danej (p – tej) iteracji za zmienną bazową: $x_{r,k}^{(p)} > 0$. Oznaczmy przez: $\boldsymbol{I}$ – zbiór indeksów dostawców, których zasoby w danym kroku nie zostały jeszcze rozdysponowane, zaś przez $\boldsymbol{J}$ – zbiór indeksów odbiorców, których zapotrzebowanie w danym kroku nie zostało jeszcze zaspokojone. Numer zmiennej wprowadzanej do bazy w każdej iteracji wyznaczamy zgodnie z formułą:

$$c_{r,k} = \min\{c_{i,j} : (i,j) \in I \times J\}$$

Następnie przypisujemy (p – tej) - zmiennej bazowej aktualną wielkość transportu od dostawcy (r – tego) do odbiorcy (k – tego) zgodnie ze wzorem:

$$x_{r,k}^{(p)} = \min\left\{a_r^{(p-1)}, b_k^{(p-1)}\right\}, \; p = 1,2,\ldots,\; m+n-1;$$

$$a_r^{(p)} = a_r^{(p-1)} - x_{r,r}^{(p)}, b_k^{(p)} = b_k^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, \; p = 1,2,\ldots,\; m+n-1;$$

$$a_i^{(p)} = a_i^{(p-1)}, b_j^{(p)} = b_j^{(p-1)}, \quad \text{dla} \quad i \neq r,\; j \neq k,\; p = 1,\ldots,\; m+n-1;$$

$$a_i^{(0)} = a_i, b_j^{(0)} = b_j;\; i = 1,\ldots,\; n;\; j = 1,\ldots,\; m;$$

Eliminujemy z dalszych rozważań ze zbioru indeksów dostawców „$\boldsymbol{I}$" lub odbiorców „$\boldsymbol{J}$" ten indeks, dla którego $a_r^{(p)} = 0$ (zapasy tego dostawcy zostały wyczerpane) lub $b_k^{(p)} = 0$ (zapotrzebowanie tego odbiorcy zostało zrealizowane).

Powtarzamy tę procedurę i na ogół po (m + n - 1) krokach znajdujemy wartości wszystkich zmiennych bazowych dla rozwiązania początkowego.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy) 1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Tablica przewozów (kolejne iteracje):

i \ j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1		$x_{1,2}^{(4)}=70$		$x_{1,4}^{(1)}=60$	130	70	70	70	0	0
2	$x_{2,1}^{(3)}=80$	$x_{2,2}^{(5)}=50$	$x_{2,3}^{(2)}=70$		200	200	130	50	50	0
$b_j^{(0)}$	80	120	70	60	330					
$b_j^{(1)}$	80	120	70	0						
$b_j^{(2)}$	80	120	0	0						
$b_j^{(3)}$	0	120	0	0						
$b_j^{(4)}$	0	50	0	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0	0						

Iteracja p=5: $I=\{2\}; J=\{2\};$ 5 zmienna bazowa: $x_{2,2}^{(5)}=\min\{50,50\}=50$

modyfikujemy: $a_1^{(4)}=a_1^{(3)}-x_{1,2}=70-70=0$; $b_2^{(4)}=b_4^{(3)}-x_{1,2}=120-70=50$;

pozostałe: $a_i^{(4)}=a_i^{(3)}$; $b_j^{(4)}=b_j^{(3)}$. Skreślamy ze zbioru nadawców 1 – nadawcę.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tablica przewozów (ostateczna)

i \ j	1	2	3	4
1	0	70	0	60
2	80	50	70	0

Otrzymujemy zatem rozwiązanie bazowe początkowe postaci:

$$f(x_{i,j}) = 80\cdot 17 + 70\cdot 24 + 50\cdot 30 + 70\cdot 15 + 60\cdot 13 = 6370$$

ETAP II (sprawdzenie optymalności rozwiązania bazowego).

Wyznaczamy tzw. ***tablicę kosztów zastępczych*** $\hat{c}_{i,j}$ w następujący sposób:

- Koszty zastępcze dla aktualnych przewozów rozwiązania bazowego ($x_{i,j} > 0$) przyjmujemy równe kosztom wyjściowym podanym w tablicy: $c_{i,j}$.
- Znajdujemy parę takich wierszy lub kolumn dla których możemy wyznaczyć ich różnicę (w tej samej kolumnie lub wierszu są dwie zmienne bazowe).
- Znając ile wynosi taka różnica - wyznaczamy pozostałe elementy w macierzy kosztów zastępczych, których wartości jeszcze nie znamy, rozwiązując odpowiednie równania, tak aby zgadzała się wyznaczona różnica.

Po wyznaczeniu kosztów zastępczych wyznaczamy ***tablicę różnic***: $r_{i,j} = c_{i,j} - \hat{c}_{i,j}$.

Uwaga: Dla zmiennych bazowych $r_{i,j} = 0$.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium optymalności rozwiązania bazowego:

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, jeżeli wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie.

Dla naszego przykładu (w przypadku otrzymanego rozwiązania początkowego metodą minimalnego elementu macierzy kosztów) mamy:

Macierz kosztów zastępczych (początkowa)

i \ j	1	2	3	4
1		24		13
2	17	30	15	

Różnica np. między drugim i pierwszym wierszem wynosi: 6, zatem pozostałe elementy tej macierzy wyznaczamy rozwiązując równania: $17 - \hat{c}_{1,1} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,1} = 11$, $15 - \hat{c}_{1,3} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,3} = 9$, $\hat{c}_{2,4} - 13 = 6 \Rightarrow \hat{c}_{2,4} = 19$.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych (pełna)

i \ j	1	2	3	4
1	11	24	9	13
2	17	30	15	19

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	14	0	19	0
2	0	0	0	7

Ponieważ wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie to otrzymane rozwiązanie początkowe jest optymalne.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

ETAP III (modyfikacja rozwiązania bazowego i poprawa wartości funkcji celu):

Z każdym zadaniem transportowym związany jest graf tego zadania odpowiadający aktualnemu rozwiązaniu bazowemu. Jeżeli rozwiązanie bazowe nie jest zdegenerowane, to taki graf jest grafem ***spójnym*** i ***bezkonturowym***.

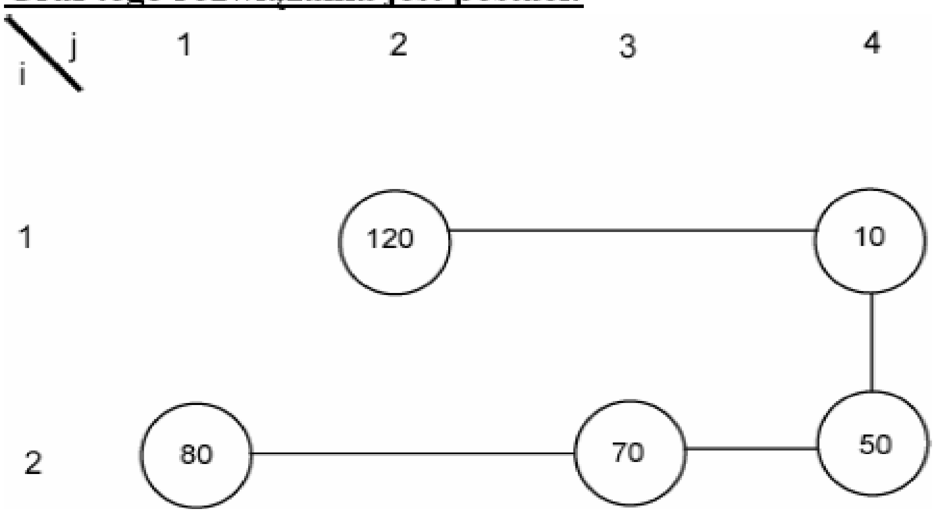
Np. dla naszego przykładu dla rozwiązania bazowego postaci:

Tablica przewozów

i \ j	1	2	3	4
1	0	120	0	10
2	80	0	70	50

Funkcja celu wynosi: $f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 120 \cdot 24 + 70 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 50 \cdot 26 = 6720$ (więcej niż dla rozwiązania optymalnego).

Graf tego rozwiązania jest postaci:



❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych:

i \ j	1	2	3	4
1	4	24	2	13
2	17	37	15	26

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

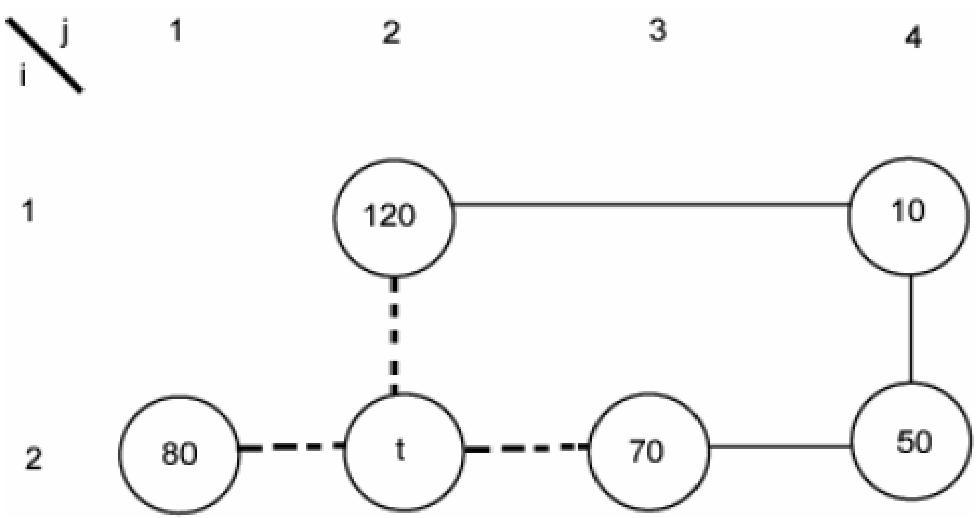
Ponieważ $\hat{c}_{2,2} = -7$, to rozwiązanie to nie jest oczywiście optymalne. Należy go zatem poprawić.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wejścia do bazy:

Do bazy wprowadzamy tę zmienną niebazową, dla której element macierzy różnic jest najmniejszy (z ujemnych). W naszym przypadku zmienną $x_{2,2}$. Wprowadzając tę zmienną (przypisując jej wielkość transportu „t>0” jednostek) poprawiamy rozwiązanie bazowe. Po wprowadzeniu tej zmiennej otrzymalibyśmy dla zadania graf konturowy postaci:

Węzły narożne konturu określają numery zmiennych, których wartości się zmieniają, gdy wprowadzamy do bazy nową zmienną.



Należy ustalić, zatem którą zmienną z aktualnej bazy (spośród narożnych konturu) należy usunąć. Określa to kryterium wyjścia dla zadania transportowego.

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wyjścia:

Niech $G = \{(k,l)\}$, gdzie: (k,l) - węzły narożne konturu. Zbiór ten ma parzystą liczbę wierzchołków (dla nas 4). Wierzchołki te cechujemy na przemian (+/-) poczynając od wierzchołka, który wprowadzamy do bazy (otrzymuje on cechę plus). Cechowanie dzieli ten zbiór na 2 rozłączne zbiory G^+ oraz G^-.

W naszym przykładzie: $G^+ = \{(2,2),(1,4)\}; G^- = \{(1,2),(2,4)\}$.

Wartość nowo wprowadzanej zmiennej bazowej w (p – tej) iteracji wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$x^{(p)}{}_{k,l} = \min_{(i,j)\in G^-} \left\{ x_{i,j}^{(p-1)} \right\}$$

Nowe wartości zmiennych narożnych obliczamy zgodnie ze wzorami:

$$x_{i,j}^{p} = x_{i,j}^{(p-1)} - x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j) \in G^-;$$

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} + x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j) \in G^+, (i,j) \neq (k,l);$$

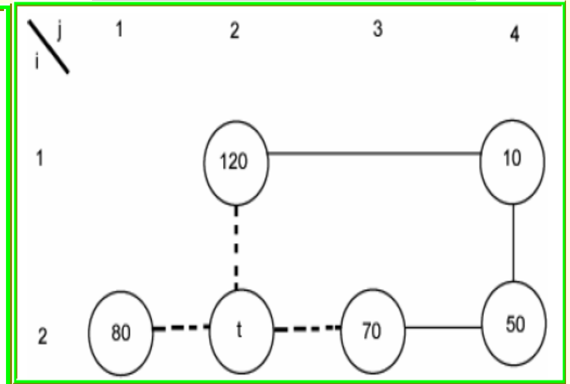
$$x_{i,j}^{0} = x_{i,j};$$

Pozostałe zmienne nie będące narożne w grafie nie zmieniają wartości.

W naszym przykładzie:

$$x_{2,2}^{(1)} = \min \left\{ x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0} \right\} = \min \{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$

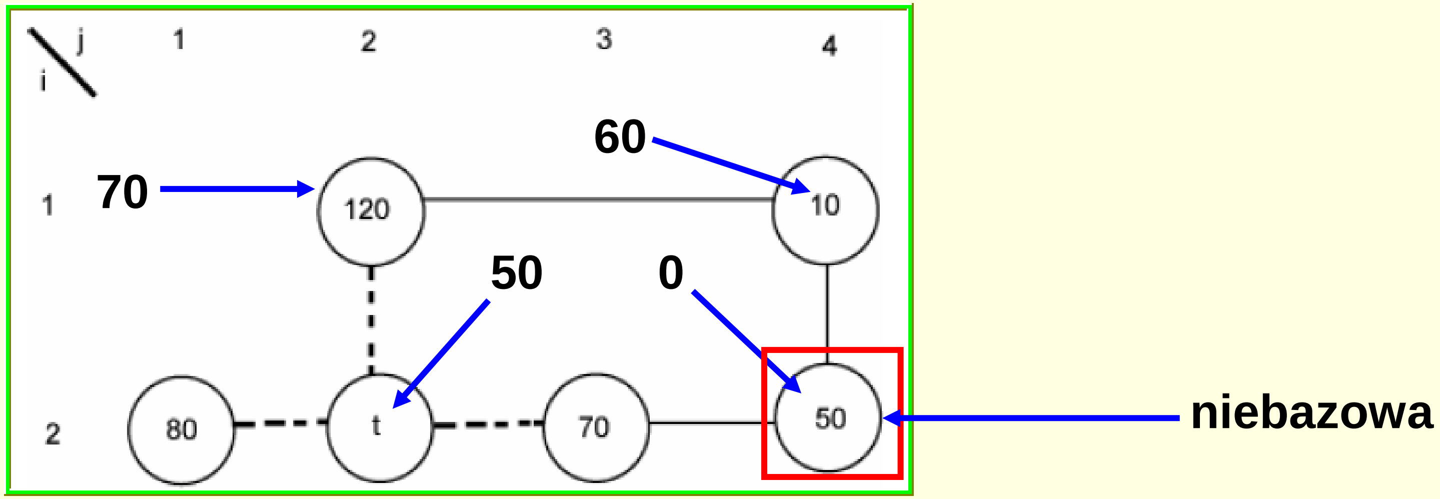


Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

<u>Treść kryterium wyjścia</u>: z bazy usuwamy tę zmienną ze zmiennych należących do zbioru indeksów G^{-}, dla której policzona nowa wartość (zgodnie ze wzorami redukcyjnymi) jest najmniejsza. Dla naszego przykładu usuwaną zmienną jest zmienna: $x_{2,4}$. Tak utworzone nowe rozwiązanie bazowe da wyznaczone już wcześniej rozwiązanie optymalne.

$$x_{2,2}^{(1)} = \min\left\{x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0}\right\} = \min\{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

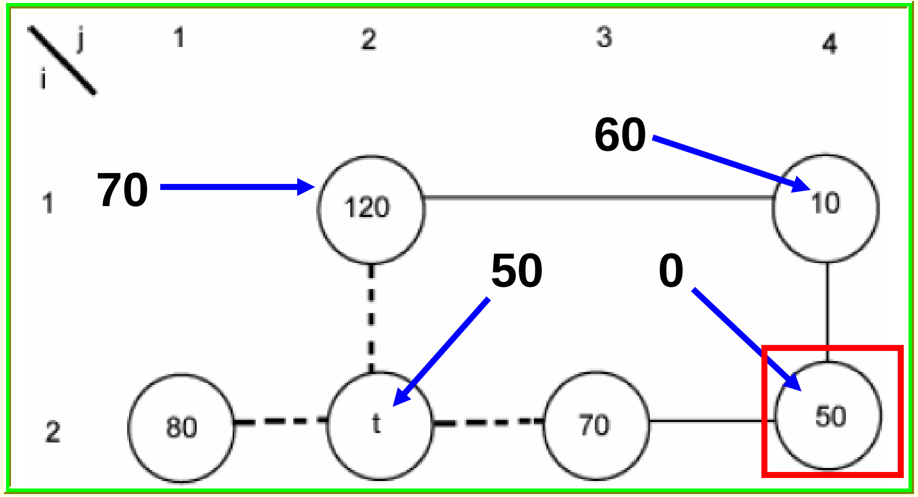
$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$



Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Interpretacja współczynnika różnic $r_{2,2} = -7$ (dla rozwiązania nieoptymalnego) prowadzi do wniosku, że nieoptymalne rozwiązanie aktualne można poprawić o wartość $(-7 \cdot 50 = -350)$ - tzn. zmniejszyć o 350 koszty transportu (tyle wynosi różnica f – celu rozwiązania bieżącego oraz optymalnego), dostarczając drugiemu odbiorcy nie 120 j. jego pełnego zapotrzebowania z magazynu 1-go, lecz w porcjach - 70 z 1-go i 50 z 2-go. Tym samym zamówienie 4-go odbiorcy mogło być zrealizowane (60 – jednostek) w całości z magazynu 1-go.

Uwaga:
Jeżeli w macierzy różnic rozwiązania optymalnego jest więcej zer niż zmiennych bazowych, to istnieje wiele rozwiązań optymalnych o tej samej wartości funkcji celu.



Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0