



ZAGADNIENIA TRANSPORTOWE

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

WYBRANE ZAGADNIENIA OPTYMALIZACJI LINIOWEJ W PROBLEMACH TRANSPORTOWYCH

1. Zagadnienie transportowe – zamknięte (ZZT)

Przedsiębiorstwo potrzebuje przetransportować produkt z m - punktów lokalizacji (magazynów, lokalizacji początkowych) do n - lokalizacji docelowych.

Zakłada się, że w każdej lokalizacji początkowej znajduje się $a_i, i = 1, \dots, m$ jednostek towaru (dostępna podaż towaru), zaś do każdej lokalizacji docelowej należy dostarczyć $b_j, j = 1, \dots, n$ jednostek tego towaru (popyt – zapotrzebowanie na produkt).

Zakłada się ponadto, że całkowita wielkość towaru dostępna w punktach początkowych równa jest wymaganej całkowitej wielkości towaru niezbędnej do

dostarczenia do punktów docelowych:
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Jeżeli jednostkowy koszt transportu (1 jednostki towaru) z i -tego punktu początkowego do j -tego punktu docelowego wynosi $c_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ należy odpowiedzieć na pytanie:

Ile jednostek towaru powinno być przetransportowanych pomiędzy każdym punktem początkowym, a każdym punktem docelowym jego lokalizacji, aby zminimalizować całkowity koszt transportu.

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zakładając $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ - wielkości produktu transportowane z i -tego punktu początkowego do j -tego punktu docelowego, powyższy problem decyzyjny można zapisać za pomocą następującego zadania optymalizacji liniowej:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(x_{ij}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{array} \right. \end{aligned}$$

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

3. Modyfikacje zagadnienia transportowego:

- Otwarte zagadnienie transportowe - OZT

Jeżeli zmodyfikujemy założenie o bilansie pomiędzy całkowitą podażą oraz całkowitym popytem, tzn. przyjmiemy założenie, że $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$, to zadanie

transportowe jest zadaniem otwartym (OZT) postaci:

$$\text{Min } F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

- Zagadnienie transportowo-produkcyjno-magazynowe (ZTP-M)

Jeżeli założymy, że istnieje nadwyżka podaży nad popytem: $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$, to

nadwyżka towaru: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, jaka pozostaje w magazynach punktów

początkowych i nie jest wysyłana do punktów docelowych musi być składowana w punktach początkowych.

Założmy, że wielkości magazynowanego towaru w punktach początkowych

opisują zmienne: $x_{i,n+1} \geq 0, i = 1, \dots, m$, $\left(\sum_{i=1}^m x_{i,n+1} = b_{n+1} \right)$, zaś jednostkowy koszt

jego składowania wynosi $h_i, i = 1, \dots, m$.

W analizowanym problemie decyzyjnym uwzględniamy dodatkowo jednostkowe koszty wytworzenia (wyprodukowania) przewożonych towarów w każdym punkcie początkowym.

Koszt ten opisują parametry: $p_i, i = 1, \dots, m$.

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zadanie optymalizacji liniowej dla tak sformułowanego problemu decyzyjnego jest postaci:

$$\text{Min } F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (p_i + c_{ij}) \cdot x_{i,j} + \sum_{i=1}^m h_i x_{i,n+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i=1, \dots, m) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1, \dots, n+1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n+1) \end{array} \right.$$

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

4. Zagadnienie pośrednika:

Pośrednik (sprzedawca) nabywa towar od m - dostawców, przewozi go oraz sprzedaje n - odbiorcom.

Dane są:

a_i - maksymalna ilość towaru jaką można kupić u i -tego dostawcy (jego podaż)

b_j - maksymalna ilość towaru jaką można sprzedać j -temu odbiorcy (jego popyt)

k_i - cena zakupu u i -tego dostawcy

p_j - cena sprzedaży j -temu odbiorcy

c_{ij} - jednostkowy koszt transportu na trasie od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy

Należy ustalić taki plan zakupów, transportu i sprzedaży, aby dochód pośrednika był maksymalny (dochód = przychód ze sprzedaży - koszty zakupu - koszty transportu)

$d_{ij} = p_j - k_i - c_{ij}$ - dochód jednostkowy z trasy zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} \cdot x_{ij}) \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

5. Zagadnienie transportowe z ograniczoną przepustowością tras:

Mamy m - dostawców pewnego towaru oraz n - jego odbiorców.

Znana jest:

a_i - podaż i -tego dostawcy

b_j - popyt j -tego odbiorcy

c_{ij} - jednostkowe koszty transportu na trasie $\langle i, j \rangle$ od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy

Zakładamy, że przepustowość niektórych lub wszystkich tras jest ograniczona (np. dostępną ładownością środków transportu).

Oznaczmy:

H - zbiór tras z ograniczoną przepustowością

h_{ij} - maksymalna przepustowość na trasie $\langle i, j \rangle$

Zakłada się również, że:
$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

Należy ustalić taki plan dostaw towarów od nadawców do odbiorców, aby łączny ich koszt był minimalny.

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} \cdot x_{ij}) \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \leq h_{ij} & \langle i, j \rangle \in H \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

6. Minimalizacja pustych przebiegów (dotyczy optymalnego krążenia środków transportu rozwożących towar):

Założmy, że istnieje n - miast pomiędzy którymi odbywa się wymiana towarowa.

Miasta te tworzą układ zamknięty, tzn. wymiana towarów odbywa się tylko pomiędzy nimi i każde z nich może być zarówno dostawca jak i odbiorcą towarów.

Do każdego miasta przywozi się i z każdego wywozi się określoną masę towarową nadającą się do przewozu określonym środkiem transportu (o określonej ładowności)

Znane są:

d_{ij} - odległości pomiędzy i -tym oraz j -tym miastem

a_{ij} - przewóz masy towarowej pomiędzy miastami - wyrażony liczbą pełnych środków transportu (samochodów, wagonów)

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Dla każdego miasta określa się:

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do wywiezienia masy towarowej (wywóz) równą: $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do przywiezienia masy towarowej (przywóz) równą: $p_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

Dla całego układu spełniona jest równość: $\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n p_i$.

Natomiast dla poszczególnych miast wywóz (w_i) wcale nie musi być równy przywózowi (p_i).

Miasta w których $w_i > p_i$ - są odbiorcami tzw. pustych przebiegów, a ich zapotrzebowanie na puste środki transportu wynosi: $b_i = w_i - p_i > 0$.

Miasta w których $w_i < p_i$ - są dostawcami pustych przebiegów, a ich podaż pustych środków transportu wynosi: $a_i = p_i - w_i > 0$.

Miasta w których $p_i = w_i$ eliminujemy z dalszych rozważań (bo nie występuje dla nich problem pustych przebiegów)

□ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Problem decyzyjny jest następujący:

Znaleźć taki plan przebiegów pustych środków transportu pomiędzy miastami, aby łączny pojazdokilometraż (samocho dokilometraż, wagonokilometraż) pustych przebiegów był minimalny.

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - liczba pustych środków transportu wysyłanych z miasta i do miasta j
 $i = 1, 2, \dots, k$ - indeks miast dostawców, dla których występuje problem pustych przebiegów

$j = 1, 2, \dots, l$ - indeks miast odbiorców, dla których występuje problem pustych przebiegów

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (d_{ij} \cdot x_{ij}) \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^l x_{ij} = a_i & (i = 1, \dots, k) \\ \sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, l) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l) \end{cases}$$

1. Praktyczny przykład problemu decyzyjnego – sformułowanego za pomocą zamkniętego zadania transportowego ZZT.

Cztery piekarnie zlokalizowane na terenie miasta są zaopatrywane w mąkę z dwóch magazynów znajdujących się na peryferiach miasta. Zapasy mąki w magazynach wynoszą odpowiednio: I magazyn – 130 t, II – magazyn – 200 t. Natomiast zapotrzebowanie piekarń jest równe odpowiednio: I piekarnia – 80 t, II – piekarnia – 120 t, III – piekarnia – 70 t, III – piekarnia – 60 t. Koszty dostawy mąki do piekarń zależą tylko od odległości dostaw i są podane w tabeli kosztów:

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Należy wyznaczyć, taki plan dostaw mąki z magazynów do piekarń, aby dostarczyć piekarniom wymagane ilości, przy minimalnych sumarycznych kosztach jej transportu.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

1. Algorytm wyznaczania rozwiązań ZZT.

Idea poszukiwania rozwiązań ZZT jest podobna do idei algorytmu „simpleks”.

Najpierw należy znaleźć jakiegokolwiek początkowe rozwiązanie bazowe (ponieważ rząd macierzy $\text{rz}(A) = n + m - 1$), to rozwiązanie bazowe niezdegenerowane posiada $n + m - 1$ dodatnich wartości w wektorze zmiennych decyzyjnych – zmienne bazowe, pozostałe wartości to zera – dla zmiennych niebazowych.

Następnie sprawdza się, czy rozwiązanie bazowe aktualne jest optymalne, czy też nie. Jeśli nie to znajdujemy kolejne rozwiązanie nie gorsze od poprzedniego i znów sprawdzamy jego optymalność. Powyższe postępowanie kończymy, gdy wreszcie uzyskamy rozwiązanie bazowe optymalne.

Algorytmicznie otrzymywanie rozwiązań ZZT można przedstawić następująco:

ETAP I (wyznaczenie dopuszczalnego początkowego rozwiązania bazowego).

W literaturze opisanych jest wiele metod konstrukcji początkowego rozwiązania bazowego, np.:

- Metoda *kąta północno – zachodniego* (N-W) – prosta ale mało efektywna (wymagane jest zazwyczaj przeprowadzenie dużej liczby iteracji, aby uzyskać z niego końcowe rozwiązanie optymalne).
- Metoda *minimalnego elementu* macierzy kosztów transportu – na ogół bardziej efektywna od poprzedniej.
- Metoda VAM (*aproksymacyjna*) – nieco bardziej złożona od poprzednich, ale daje rozwiązania początkowe bliskie rozwiązaniom optymalnym.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów:

Oznaczmy przez (r, k) – numer zmiennej wybieranej w danej $(p - \text{tej})$ iteracji za zmienną bazową: $x_{r,k}^{(p)} > 0$. Oznaczmy przez: I – zbiór indeksów dostawców, których zasoby w danym kroku nie zostały jeszcze rozdysponowane, zaś przez J – zbiór indeksów odbiorców, których zapotrzebowanie w danym kroku nie zostało jeszcze zaspokojone. Numer zmiennej wprowadzanej do bazy w każdej iteracji wyznaczamy zgodnie z formułą:

$$c_{r,k} = \min\{c_{i,j} : (i,j) \in I \times J\}$$

Następnie przypisujemy $(p - \text{tej})$ - zmiennej bazowej aktualną wielkość transportu od dostawcy $(r - \text{tego})$ do odbiorcy $(k - \text{tego})$ zgodnie ze wzorem:

$$x_{r,k}^{(p)} = \min\{a_r^{(p-1)}, b_k^{(p-1)}\}, p = 1, 2, \dots, m + n - 1;$$

$$a_r^{(p)} = a_r^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, b_k^{(p)} = b_k^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, p = 1, 2, \dots, m + n - 1;$$

$$a_i^{(p)} = a_i^{(p-1)}, b_j^{(p)} = b_j^{(p-1)}, \text{ dla } i \neq r, j \neq k, p = 1, \dots, m + n - 1;$$

$$a_i^{(0)} = a_i, b_j^{(0)} = b_j; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m;$$

Eliminujemy z dalszych rozważań ze zbioru indeksów dostawców „ I ” lub odbiorców „ J ” ten indeks, dla którego $a_r^{(p)} = 0$ (zapasy tego dostawcy zostały wyczerpane) lub $b_k^{(p)} = 0$ (zapotrzebowanie tego odbiorcy zostało zrealizowane).

Powtarzamy tę procedurę i na ogół po $(m + n - 1)$ krokach znajdujemy wartości wszystkich zmiennych bazowych dla rozwiązania początkowego.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Tablica przewozów (kolejne iteracje):

i \ j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1		$x_{1,2}^{(4)} = 70$		$x_{1,4}^{(1)} = 60$	130	70	70	70	0	0
2	$x_{2,1}^{(3)} = 80$	$x_{2,2}^{(5)} = 50$	$x_{2,3}^{(2)} = 70$		200	200	130	50	50	0
$b_j^{(0)}$	80	120	70	60	330					
$b_j^{(1)}$	80	120	70	0						
$b_j^{(2)}$	80	120	0	0						
$b_j^{(3)}$	0	120	0	0						
$b_j^{(4)}$	0	50	0	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0	0						

Iteracja $p=5$: $I = \{2\}$; $J = \{2\}$; 5 zmienna bazowa: $x_{2,2}^{(5)} = \min\{50, 50\} = 50$

modyfikujemy: $a_1^{(4)} = a_1^{(3)} - x_{1,2} = 70 - 70 = 0$; $b_2^{(4)} = b_2^{(3)} - x_{1,2} = 120 - 70 = 50$;

pozostałe: $a_i^{(4)} = a_i^{(3)}$; $b_j^{(4)} = b_j^{(3)}$. Skreślamy ze zbioru nadawców 1 – nadawcę.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tablica przewozów (ostateczna)

j \ i	1	2	3	4
1	0	70	0	60
2	80	50	70	0

Otrzymujemy zatem rozwiązanie bazowe początkowe postaci:

$$f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 70 \cdot 24 + 50 \cdot 30 + 70 \cdot 15 + 60 \cdot 13 = 6370$$

ETAP II (sprawdzenie optymalności rozwiązania bazowego).

Wyznaczamy tzw. *tablicę kosztów zastępczych* $\hat{c}_{i,j}$ w następujący sposób:

- Koszty zastępcze dla aktualnych przewozów rozwiązania bazowego ($x_{i,j} > 0$) przyjmujemy równe kosztom wyjściowym podanym w tabelcy: $c_{i,j}$.
- Znajdujemy parę takich wierszy lub kolumn dla których możemy wyznaczyć ich różnicę (w tej samej kolumnie lub wierszu są dwie zmienne bazowe).
- Znając ile wynosi taka różnica - wyznaczamy pozostałe elementy w macierzy kosztów zastępczych, których wartości jeszcze nie znamy, rozwiązując odpowiednie równania, tak aby zgadzała się wyznaczona różnica.

Po wyznaczeniu kosztów zastępczych wyznaczamy *tablicę różnic*: $r_{i,j} = c_{i,j} - \hat{c}_{i,j}$.

Uwaga: Dla zmiennych bazowych $r_{i,j} = 0$.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium optymalności rozwiązania bazowego:

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, jeżeli wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie.

Dla naszego przykładu (w przypadku otrzymanego rozwiązania początkowego metodą minimalnego elementu macierzy kosztów) mamy:

Macierz kosztów zastępczych (początkowa)

i \ j	1	2	3	4
1		24		13
2	17	30	15	

Różnica np. między drugim i pierwszym wierszem wynosi: 6, zatem pozostałe elementy tej macierzy wyznaczamy rozwiązując równania: $17 - \hat{c}_{1,1} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,1} = 11$, $15 - \hat{c}_{1,3} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,3} = 9$, $\hat{c}_{2,4} - 13 = 6 \Rightarrow \hat{c}_{2,4} = 19$.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych (pełna)

i \ j	1	2	3	4
1	11	24	9	13
2	17	30	15	19

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	14	0	19	0
2	0	0	0	7

Ponieważ wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie to otrzymane rozwiązanie początkowe jest optymalne.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

ETAP III (modyfikacja rozwiązania bazowego i poprawa wartości funkcji celu):

Z każdym zadaniem transportowym związany jest graf tego zadania odpowiadający aktualnemu rozwiązaniu bazowemu. Jeżeli rozwiązanie bazowe nie jest zdegenerowane, to taki graf jest grafem *spójnym* i *bezkonturowym*.

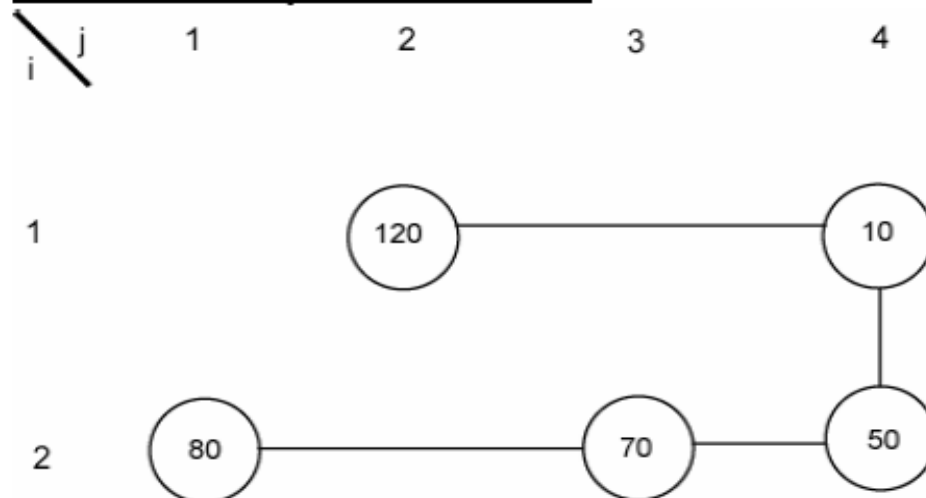
Np. dla naszego przykładu dla rozwiązania bazowego postaci:

Tablica przewozów

i \ j	1	2	3	4
1	0	120	0	10
2	80	0	70	50

Funkcja celu wynosi: $f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 120 \cdot 24 + 70 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 50 \cdot 26 = 6720$ (więcej niż dla rozwiązania optymalnego).

Graf tego rozwiązania jest postaci:



□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych:

j	1	2	3	4
i				
1	4	24	2	13
2	17	37	15	26

Macierz różnic

j	1	2	3	4
i				
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

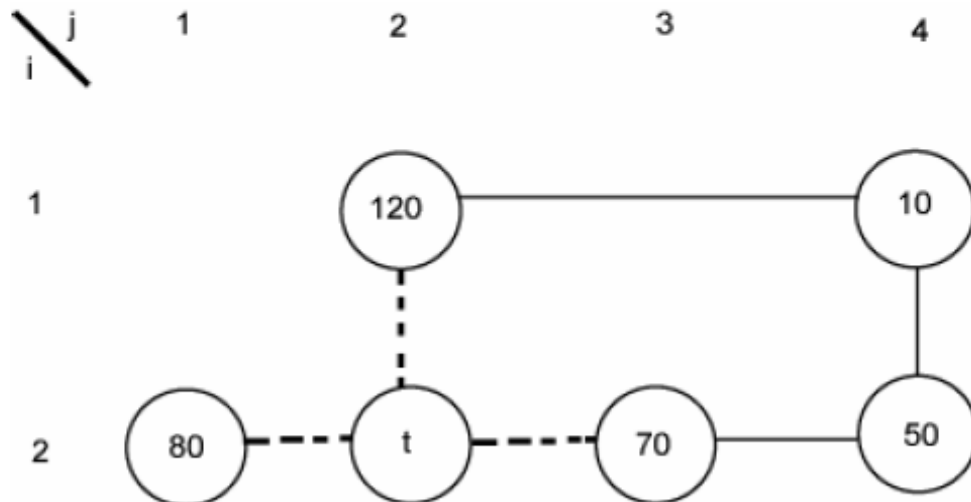
Ponieważ $\hat{c}_{2,2} = -7$, to rozwiązanie to nie jest oczywiście optymalne. Należy go zatem poprawić.

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wejścia do bazy:

Do bazy wprowadzamy tę zmienną niebazową, dla której element macierzy różnic jest najmniejszy (z ujemnych). W naszym przypadku zmienną $x_{2,2}$. Wprowadzając tę zmienną (przypisując jej wielkość transportu „ $t > 0$ ” jednostek) poprawiamy rozwiązanie bazowe. Po wprowadzeniu tej zmiennej otrzymalibyśmy dla zadania graf konturowy postaci:

Węzły narożne konturu określają numery zmiennych, których wartości się zmieniają, gdy wprowadzamy do bazy nową zmienną.



Należy ustalić, zatem którą zmienną z aktualnej bazy (spośród narożnych konturu) należy usunąć. Określa to kryterium wyjścia dla zadania transportowego.

Macierz różnic

j \ i	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wyjścia:

Niech $G = \{(k, l)\}$, gdzie: (k, l) - węzły narożne konturu. Zbiór ten ma parzystą liczbę wierzchołków (dla nas 4). Wierzchołki te cechujemy na przemian (+/-) poczynając od wierzchołka, który wprowadzamy do bazy (otrzymuje on cechę plus). Cechowanie dzieli ten zbiór na 2 rozłączne zbiory G^+ oraz G^- .

W naszym przykładzie: $G^+ = \{(2,2), (1,4)\}$; $G^- = \{(1,2), (2,4)\}$.

Wartość nowo wprowadzanej zmiennej bazowej w $(p - \text{tej})$ iteracji wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$x^{(p)}_{k,l} = \min_{(i,j) \in G^-} \{x_{i,j}^{(p-1)}\}$$

Nowe wartości zmiennych narożnych obliczamy zgodnie ze wzorami:

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} - x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla } (i, j) \in G^-;$$

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} + x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla } (i, j) \in G^+, (i, j) \neq (k, l);$$

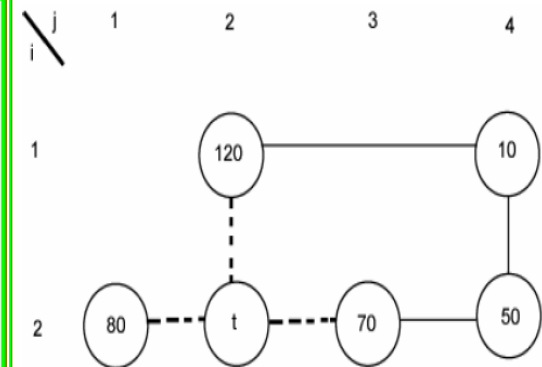
$$x_{i,j}^0 = x_{i,j};$$

Pozostałe zmienne nie będące narożne w grafie nie zmieniają wartości.

W naszym przykładzie:

$$x_{2,2}^{(1)} = \min \{x_{1,2}^0, x_{2,4}^0\} = \min \{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$

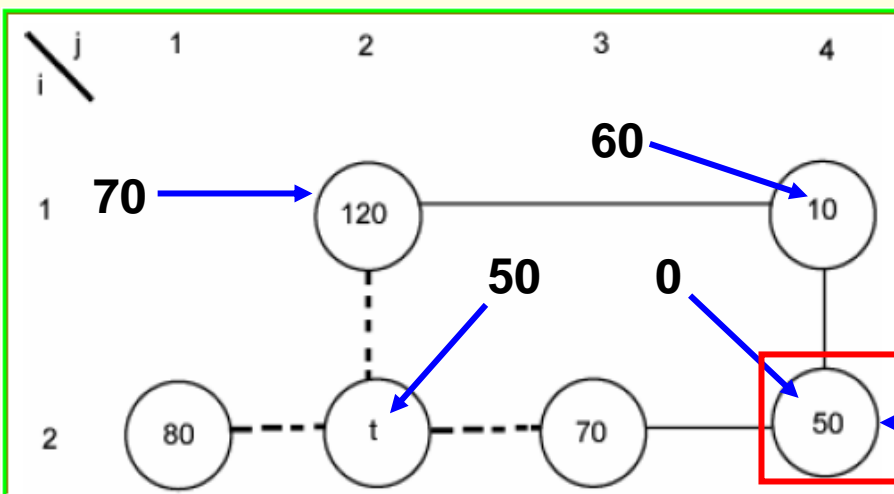


□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Treść kryterium wyjścia: z bazy usuwamy tę zmienną ze zmiennych należących do zbioru indeksów G^- , dla której policzona nowa wartość (zgodnie ze wzorami redukcyjnymi) jest najmniejsza. Dla naszego przykładu usuwaną zmienną jest zmienna: $x_{2,4}$. Tak utworzone nowe rozwiązanie bazowe da wyznaczone już wcześniej rozwiązanie optymalne.

$$x_{2,2}^{(1)} = \min \{x_{1,2}^{(0)}, x_{2,4}^{(0)}\} = \min \{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$



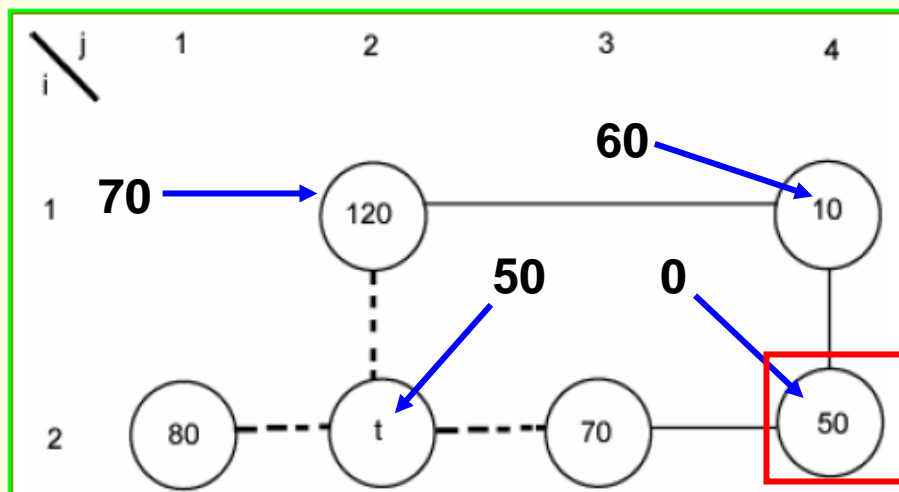
niebazowa

□ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Interpretacja współczynnika różnic $r_{2,2} = -7$ (dla rozwiązania nieoptymalnego) prowadzi do wniosku, że nieoptymalne rozwiązanie aktualne można poprawić o wartość $(-7 \cdot 50 = -350)$ - tzn. zmniejszyć o 350 koszty transportu (tyle wynosi różnica f – celu rozwiązania bieżącego oraz optymalnego), dostarczając drugiemu odbiorcy nie 120 j. jego pełnego zapotrzebowania z magazynu 1-go, lecz w porcjach - 70 z 1-go i 50 z 2-go. Tym samym zamówienie 4-go odbiorcy mogło być zrealizowane (60 – jednostek) w całości z magazynu 1-go.

Uwaga:

Jeżeli w macierzy różnic rozwiązania optymalnego jest więcej zer niż zmiennych bazowych, to istnieje wiele rozwiązań optymalnych o tej samej wartości funkcji celu.



Macierz różnic

		j			
		1	2	3	4
i	1	21	0	26	0
	2	0	-7	0	0



ZAGADNIENIA

OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

□ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Ogólny problem optymalizacji nieliniowej (programowaniem nieliniowym) nazywamy zadanie decyzyjne postaci:

$$(1) \quad \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \\ g^j(x_1, \dots, x_n) - c_j \leq 0 \text{ dla } (j=1, \dots, r); \\ g^j(x_1, \dots, x_n) - c_j = 0 \text{ dla } (j=r+1, \dots, m); \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

gdy funkcja celu $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, lub chociaż jeden z warunków ograniczających: $g^j(x) = g^j(x_1, \dots, x_n)$ jest **funkcją nieliniową**.

Jeżeli w zadaniu (1) warunki ograniczające nie występują, a funkcja celu jest postaci nieliniowej, to zadanie takie nosi nazwę optymalizacji bezwarunkowej (problemu bez ograniczeń).

Zakładamy, że funkcje: f, g^j - są funkcjami ciągłymi.

Niech $D \subset R^n$ będzie zbiorem wypukłym, funkcję o wartościach rzeczywistych nazywamy funkcją wypukłą w zbiorze D , jeżeli dla dowolnych $x^1, x^2 \in D$ oraz dowolnego $\alpha \in [0, 1]$ zachodzi nierówność:

$$f[\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2] \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2)$$

Jeżeli $x^1 \neq x^2$ i $\alpha \in (0, 1)$ oraz spełniona jest nierówność:

$$f[\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2] < \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2), \text{ to funkcję } f - \text{nazywamy ściśle wypukłą}$$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wklęsłą jeśli funkcja $-f(x)$ - jest wypukła (i odwrotnie).

Funkcja $f(x)$ jest funkcją ściśle wklęsłą jeśli funkcja $-f(x)$ - jest ściśle wypukła (i na odwrót).

□ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Założmy, że funkcja f – jest różniczkowalna w R^n , wektor $\nabla f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$ - nazywa się gradientem funkcji f w punkcie x_0 - wskazuje kierunek, w którym przyrost wartości funkcji jest największy.

Założmy, że funkcja f – jest dwukrotnie różniczkowalna w R^n , to macierz:

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \text{ - nazywa się Hesjanem funkcji}$$

Funkcja jest wypukła w otwartym (niezawierającym punktów brzegowych) zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$ - Hesjan jest nieujemnie określony.

Funkcja jest ściśle wypukła w otwartym (niezawierającym punktów brzegowych) zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$ - Hesjan jest dodatnio określony.

Macierz kwadratową $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$, nazywamy dodatnio określoną, gdy: $M_1 = a_{11} > 0$,

$$M_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, M_n = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} > 0$$

Macierz nazywamy ujemnie określoną, gdy: $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \dots$

□ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Problemy optymalizacji nieliniowej dzielimy ogólnie na:

- problemy programowania wypukłego
 - Minimalizacja funkcji celu wypukłej, lub maksymalizacja funkcji celu wklęsłej
 - zbiór warunków ograniczających jest zbiorem wypukłym

Niech funkcje: $f, g^j; j = 1, \dots, m_1, h^j; j = 1, \dots, m_2$ - są funkcjami wypukłymi, wtedy można udowodnić, że zbiory ograniczone warunkami: $g^j(x_1, \dots, x_n) - c_j \leq 0$ oraz $h^j(x_1, \dots, x_n) - c_j = 0$ są zbiorami wypukłymi. Ponieważ część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więc zadania programowania wypukłego przyjmują postać:

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min$$

lub

$$-f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max$$

Przy warunkach:

$$\begin{cases} g^j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ dla } (j = 1, \dots, m_1); \\ h^j(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ dla } (j = 1, \dots, m_2); \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

- problemy programowania niewypukłego
problemy decyzyjne nieliniowe, które niespełnianą warunków programowania wypukłego nazywamy zadaniami programowania niewypukłego

□ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Szczególnym przypadkiem zadań programowania wypukłego jest programowanie kwadratowe.

Zakłada on, że funkcja celu jest wypukłą funkcją kwadratową, zaś funkcje $g^j(x_1, \dots, x_n)$ z warunków ograniczających są funkcjami liniowymi (a więc tworzą obszar wypukły).

Zadanie programowania kwadratowego przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} cx + \frac{1}{2} x^T E x &\rightarrow \min \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

gdzie:

$x = [x_1, \dots, x_n]^T$ - wektor kolumnowy zmiennych decyzyjnych

$c = [c_1, \dots, c_n]$ - wektor wierszowy współczynników funkcji celu składnika liniowego

$b = [b_1, \dots, b_m]^T$ - wektor kolumnowy wyrazów wolnych

$A = [a_{i,j}]_{m \times n}$ - macierz współczynników warunków (po lewej stronie warunków),

$E = [e_{i,j}]_{n \times n}$ - macierz ujemnie określona – współczynników składnika kwadratowego (co gwarantuje wypukłość składnika kwadratowego funkcji celu)

□ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Dla zadań optymalizacji nieliniowej w postaci kanonicznej (warunki ograniczające w postaci równości) możemy w ogólnym przypadku zastosować metodę tzw. czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

W metodzie tej zamiast poszukiwać ekstremum warunkowego postaci:

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \\ (2) \quad & \begin{cases} g^j(x_1, \dots, x_n) - c_j = 0 & \text{dla } (j = 1, \dots, m); \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

poszukujemy ekstremum bezwarunkowego dla tzw. funkcji Lagrange'a utworzonej w oparciu o wyjściową funkcję celu $f(X)$ poprzez włączenie do tej funkcji warunków ograniczających z odpowiednimi (sztucznie wprowadzonymi) czynnikami nieoznaczonymi (zakładamy, że $m < n$).

Dla zadania programowania nieliniowego w postaci kanonicznej (2) funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(X; \lambda) = L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [c_j - g^j(x_1, \dots, x_n)]$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego zadania jest następujący: zerowanie się pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = c_j - g^j(x_1, \dots, x_n) = 0; & \text{dla } (j = 1, \dots, m); \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g^j}{\partial x_i} = 0; & \text{dla } (i = 1, 2, \dots, n); \end{cases}$$

□ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) w postaci kanonicznej jest następujący:

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [c_j - g^j(x_1, \dots, x_n)] \quad \text{- Funkcja Lagrange'a (} m < n \text{)}$$

Hesjan
obrzeżony

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \dots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \dots & g_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_1^m & g_2^m & \dots & g_n^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \dots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \dots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n^1 & g_n^2 & \dots & g_n^m & L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

gdzie: $g_i^j = \frac{\partial g^j}{\partial x_i}; L_{pq} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_q \partial x_p}$

$|\bar{H}_2|$

Dla **maksimum** funkcji **f** – warunkiem dostatecznym jest, aby $|\bar{H}_{m+1}|, |\bar{H}_{m+2}|, \dots, |\bar{H}_n| = |\bar{H}|$ **zmieniały znak** (dla $|\bar{H}_{m+1}|$ znak taki jak $(-1)^{m+1}$)

Dla **minimum** funkcji **f** – warunkiem dostatecznym jest, aby miały one **ten sam znak** (i to taki jak dla $(-1)^m$) 33

□ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 2

Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch rodzajów bocznic: własnej i dzierżawionej od PKP.

Koszty (w tys. zł) związane z postojem wagonów na bocznicach wyraża następująca funkcja kosztów:

$$f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2$$

gdzie:

t_1 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicę własnej,

t_2 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicę PKP.

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa mają w swym składzie 100 wagonów.

Dzienna zdolność przeładunkowa bocznicę własnej wynosi 10 wagonów, a bocznicę PKP 20 wagonów.

- Jak rozdzielić wagony pomiędzy bocznicę, aby koszt postojowy był możliwie najniższy ?
- Podać koszt postojowy przy optymalnym rozdzielaniu wagonów pomiędzy obie bocznicę.
Uwaga: zakładamy, że z wyładowanych wagonów formułuje się skład, który może odejść dopiero wtedy, gdy wszystkie wagony są opróżnione. Tym samym postojowe liczy się do momentu wyładunku ostatniego wagonu na każdej z bocznic.
- Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek wagonów na bocznicę własnej a ile na PKP ?

□ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Matematyczny model problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne: $t_1, t_2 \geq 0$

Funkcja celu: $f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2 \rightarrow \min$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10t_1 + 20t_2 = 100 \Leftrightarrow g(t_1, t_2) = t_1 + 2t_2 = 10 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja Lagrange'a:

$$F(t_1, t_2, \lambda) = f(t_1, t_2) + \lambda[10 - t_1 - 2t_2] \rightarrow \min$$

Pochodne cząstkowe z funkcji Lagrange'a względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - t_1 - 2t_2, \quad \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0,5t_1 + 3 - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial t_2} = t_2 + 4 - 2\lambda$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - t_1 - 2t_2 = 0 \\ 0,5t_1 + 3 - \lambda = 0 \\ t_2 + 4 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 4 \\ \lambda^* = 4 \end{cases}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki dostateczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1} (0,5t_1 + 3 - \lambda) = 0,5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_2} (t_2 + 4 - 2\lambda) = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} (0,5t_1 + 3 - \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_1} (t_2 + 4 - 2\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial t_2} = 2$$

Hesjan obrzeżony:

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dla zadania **na minimum** z $m = 1$ warunkami ograniczającymi wymagane jest, aby tylko jeden minor $|H_2| = |H|$ równy wyznacznikowi głównemu miał znak taki jak $(-1)^m = -1 < 0$.

Łatwo sprawdzić że wartość wyznacznika (obliczona np. stosując rozwinięcie Laplace'a względem 1 wiersza wynosi):

$$\begin{aligned} |H| = |H_2| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (0 - 2 \cdot 0,5) = -1 - 2 = -3 < 0 \end{aligned}$$