Optymalizacja Dyskretna
- metoda podziału i ograniczeń

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dla dyskretnych zadań decyzyjnych uniwersalną metodą ich rozwiązywania jest metoda ***podziału i ograniczeń***. Nie jest to ściśle ustalony algorytm postępowania jak np. algorytm „simpleks", lecz raczej pewne podejście do rozwiązywania określonej klasy (***dyskretnych***) zadań optymalizacyjnych. Podejście to zostanie zaprezentowane na następującym przykładzie:

Przykład:

Rozwiązać następujące zadanie programowania całkowitoliczbowego – liniowego (PCL):

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \geq 11 \\ 5x_1 + 11x_2 \leq 55 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ - całkowite} \end{cases}$$

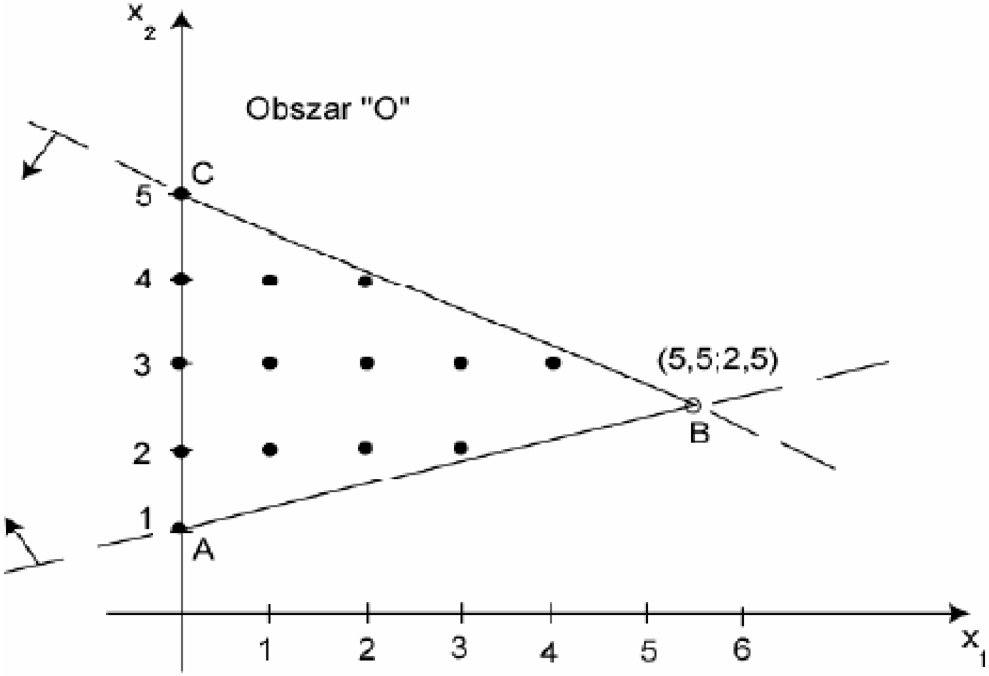
Jeżeli pominiemy warunek całkowitoliczbowości, to zadanie to jest zadaniem programowania liniowego (PL), które można rozwiązać (geometrycznie, algorytmem „simpleks").

Jeżeli zadanie (PL) nie ma rozwiązania optymalnego, to nie posiada go także zadanie PCL.

Jeżeli otrzymane rozwiązanie optymalne dla (PL) spełnia ponadto warunek całkowitoliczbowości, to jest to oczywiście poszukiwane rozwiązanie zadania PCL, jeśli nie, to stosuje się wtedy metodę ***podziału i ograniczeń***.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Ponieważ nasze zadanie posiada tylko dwie zmienne decyzyjne, to spróbujemy go rozwiązać metodą geometryczną.



$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2$

warstwica: $x_2 = -2x_1$

$f(A) = 2$, $f(C) = 10$

$\max = f(B) = 27$

Ponieważ nasze rozwiązanie maksymalne nie jest całkowitoliczbowe, to należy zastosować metodę podziału i ograniczeń.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Zdefiniujmy tzw. funkcję ograniczającą z góry *„ozn. w”* (*kres górny*) określoną na rodzinie 2^{O} wszystkich podzbiorów obszaru „O”, która spełnia warunki:

(1) $x \in O_1 \subset O \Rightarrow f(x) \le w(D_1)$ - kres górny zbioru nie może być mniejszy od maksymalnej wartości funkcji celu dla rozwiązań z tego zbioru.

(2) $O_2 \subset O_1 \subset O \Rightarrow w(O_2) \le w(O_1)$ - kres górny zbioru zawierającego jakiś swój podzbiór nie może być mniejszy od kresu górnego tego jego podzbioru.

(3) $O_1 = \{x\} \subset D \Rightarrow w(O_1) = f(x)$ - jeżeli zbiór jest jednoelementowy, to jego kres górny jest równy wartości funkcji celu dla tego elementu.

Uwaga: W definicji kresu dolnego nierówności w warunkach (1) i (2) zmieniają się na przeciwne.

Przykład:

Kresem górnym może być funkcja:

$w(O) = 15$, $O_1 \subset O = \{x^1, x^2\}, f(x^1) = 8, f(x^2) = 9$, $w(O_1) = 10$,

$O_2 \subset O = \{x^3\}, f(x^3) = 14, w(O_2) = 14$.

Nie może być to natomiast funkcja zdefiniowana następująco:

$w(O) = 15$, $O_1 \subset O = \{x^1, x^2\}, f(x^1) = 8, f(x^2) = 9$, $w(O_1) = 20$,

$O_2 \subset O = \{x^3\}, f(x^3) = 14, w(O_2) = 16$

(nie są spełnione warunki (2) i (3))

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dokonujemy podziału zbioru (obszaru) „O" na coraz mniejsze podzbiory. W wyniku „r" podziałów zbioru „O" uzyskujemy „2r" jego podzbiorów. Podziałów kolejnych podzbiorów dokonujemy dla tzw. ***podzbiorów perspektywicznych***.

Podzbiorem perspektywicznym O_p w „r - tym" kroku obliczeń (dla zadań na maksimum) jest taki zbiór, dla którego $w(O_p) = \max\{w(D_l) : D_l \in G^r\}$, gdzie G^r - rodzina podzbiorów ***aktywnych*** (które nie zostały jeszcze podzielone). Dla zadań na minimum w warunku tym pojawia się (minimum oraz kres dolny).

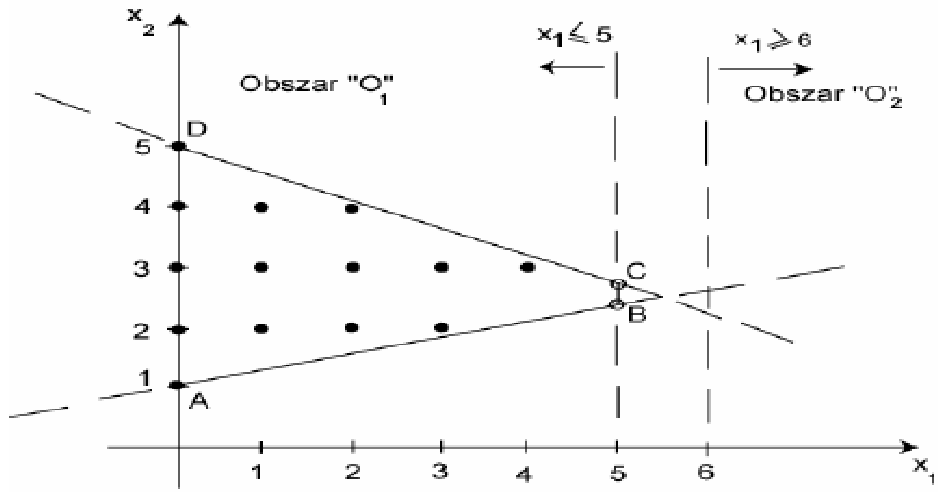
Podstawę podziału zbiorów aktywnych – perspektywicznych stanowi pierwsza zmienna w rozwiązaniu optymalnym (dla zbioru perspektywicznego) - x^p, która nie spełnia warunku całkowitoliczbowości. Jeżeli będzie to zmienna x_k^p - wtedy dzielimy go na dwa podzbiory:

(4)

$$O_{2r+1} = \{x : x \in O_p \wedge x_k \le N(x_k^p)\}, O_{2r+2} = \{x : x \in O_p \wedge x_k \ge N(x_k^p) + 1\}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dla naszego przykładu początkowym zbiorem aktywnym perspektywicznym jest zbiór „O". Kres górny tego zbioru wynosi: $w(O) = f(B) = 27$. Obie zmienne decyzyjne w stowarzyszonym rozwiązaniu optymalnym (PL) nie są całkowite, więc dokonujemy podziału „O" na dwa podzbiory: O_1, O_2 względem zmiennej x_1 zgodnie ze wzorem (4).

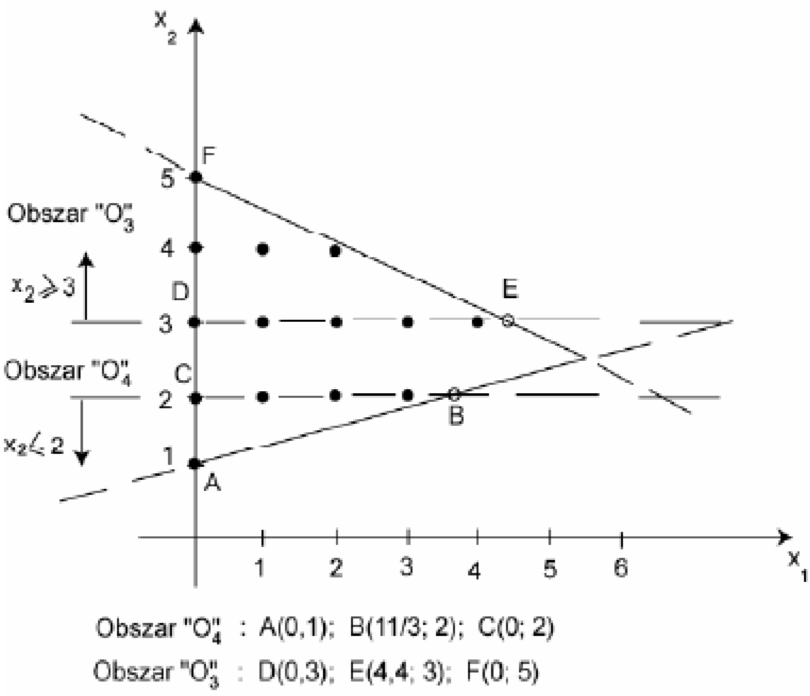


Obszar "O_1" : A(0,1); B(5; 26/11); C(5; 30/11); D(0,5)

Obszar O_2 - jest zbiorem pustym dlatego ***zamykamy go*** przypisując mu symboliczny kres górny: $w(O_2) = -\infty$. Obszar O_1 jest zatem obszarem perspektywicznym – aktywnym. Optymalna wartość funkcji celu dla stowarzyszonego zadania PL jest spełniona dla punktu „C" tego obszaru i wynosi: 280/11=25,45. Jako kres górny możemy przyjąć: $w(O_1) = 26$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Ponieważ druga współrzędna optymalnego rozwiązania (PL) nie jest całkowita, więc zgodnie z (4) dzielimy O_1 na dwa podzbiory aktywne: O_3, O_4 względem zmiennej x_2.

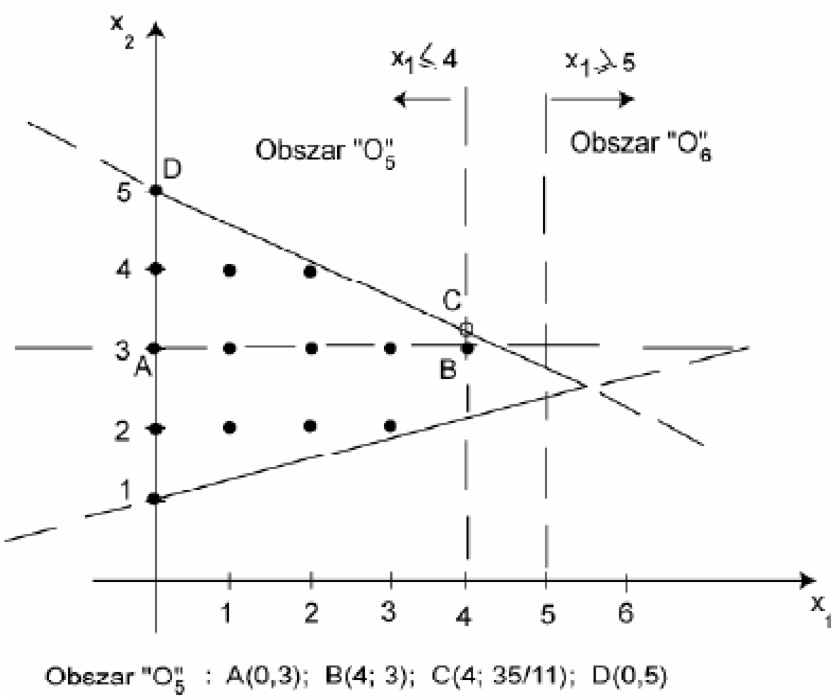


Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_3 jest spełniona dla punktu „E" tego obszaru oraz wynosi: 23,6. Jako kres górny możemy przyjąć: $w(O_3) = 24$.

Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_4 jest spełniona dla punktu „B" tego obszaru oraz wynosi: 56/3=18,67. Za kres górny możemy przyjąć: $w(O_4) = 19$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Podzbiorem perspektywicznym jest zatem zbiór O_3. Ponieważ pierwsza współrzędna optymalnego rozwiązania (PL) nie jest całkowita, więc zgodnie z (4) dzielimy O_3 na dwa podzbiory aktywne: O_5, O_6 względem zmiennej x_1.

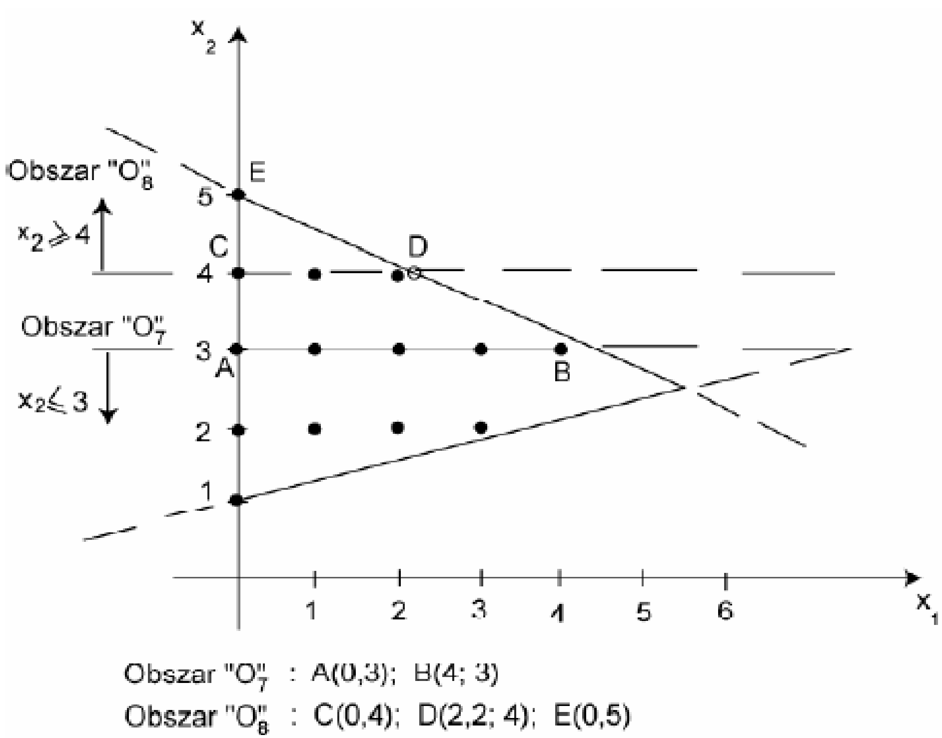


Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_5 jest spełniona dla punktu „C" tego obszaru oraz wynosi: 246/11=22,36.
Jako kres górny możemy przyjąć: $w(O_5) = 23$.

Obszar O_6 jest zbiorem pustym zatem zamykamy go przyjmując kres górny $w(O_6) = -\infty$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Zbiór O_5 jest perspektywiczny, więc znowu go dzielimy na dwa podzbiory O_7, O_8 względem zmiennej posiadającej niecałkowite rozwiązanie optymalne dla zadania stowarzyszonego (PL) w tym obszarze. Będzie to zmienna - x_2.



Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze O_7 jest spełniona dla punktu „B" tego obszaru oraz wynosi: 22.

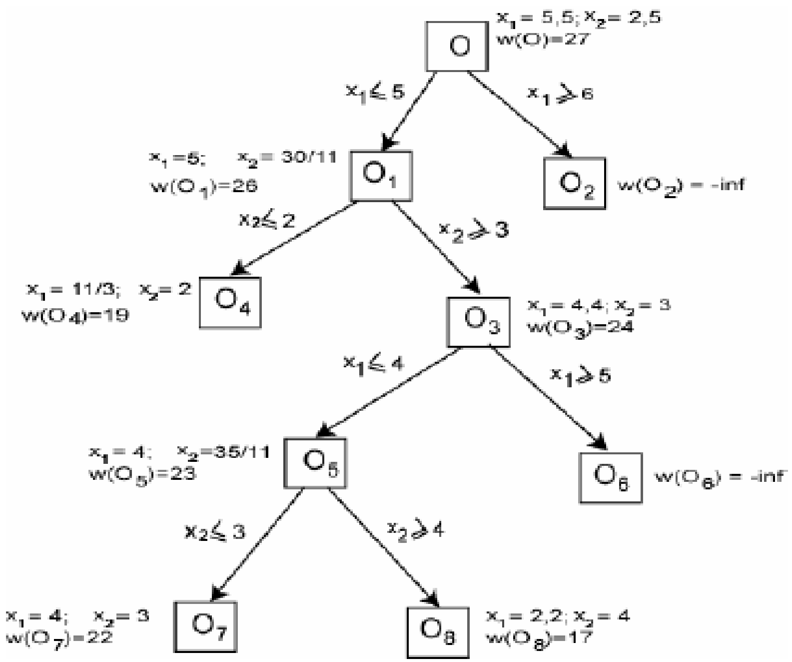
Ponieważ optymalne rozwiązanie PL dla obszaru O_7 jest całkowitoliczbowe, to: jest to również rozwiązanie optymalne wyjściowego zadania ***PCL***.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Podział zbioru „O" na coraz mniejsze podzbiory można przedstawić w postaci tzw. ***„drzewa podziału"***. Z każdym jego wierzchołkiem (o numerze „k - tym") jest związany:

- podzbiór O_k
- zadanie programowania liniowego PL^k (dla tego podzbioru)
- jego rozwiązanie optymalne: x_k^*
- kres górny (dolny) tego zbioru $w(O_k)$

Dla naszego zadania drzewo jest postaci:



ELEMENTY

TEORII GIER

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

ELEMENTY TEORII GIER

TEORIA GIER jest to matematyczna teoria rozwiązywania sytuacji konfliktowych bądź współpracy, w których wynik uzyskany przez jedną osobę (gracza, uczestnika gry) zależy także od decyzji podejmowanych przez innych uczestników gry. Teoria gier nie bada przyczyn ani genezy konfliktów – interesują ją tylko optymalne ich rozwiązania.

Jak sama nazwa wskazuje, teoria gier wzięła swój początek z analizy rozgrywek gier karcianych, szachów itp. Obecnie jej zastosowanie jest o wiele szersze i obejmuje wiele dziedzin, w tym nauki o zarządzaniu.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Podstawowe definicje i założenia

Pod nazwą **GRY** rozumieć będziemy pewien sformalizowany model sytuacji konfliktowej.

Słowo **GRACZ** oznacza pojedynczą osobę lub grupę osób tworzących koalicję (działających wspólnie, we wspólnym interesie).

Aby daną sytuację rozpatrywać z punktu widzenia teorii gier należy przyjąć pewne założenia odnośnie gry i stron konfliktu:

- istnieje co najmniej dwóch graczy,
- każdy z graczy posiada przynajmniej dwie **strategie** czyli drogi postępowania,
- w wyniku każdej gry każdy z graczy otrzymuje pewną wygraną (zwaną też **wypłatą**), której wysokość zależy od strategii zastosowanych przez wszystkich graczy. Wygraną (wypłatę) wyraża się dla wygody w liczbach.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

TYPY GIER

Gry można dzielić według wielu kryteriów, np. ze względu na:

- ilości graczy: gry dwuosobowe i wieloosobowe (w przypadku niektórych gier wieloosobowych może dochodzić do zawiązywania koalicji),
- kooperację między graczami: gry kooperatywne (w których gracze mogą porozumiewać się między sobą i zawierać koalicje) i niekooperatywne (w których jest to zabronione lub niemożliwe),
- charakter gry: gry o sumie zerowej (w których jeden z graczy otrzymuje dokładnie tyle ile drugi musi oddać) i gry o sumie niezerowej (możliwe jest np. że wszyscy gracze zyskują w wyniku rozgrywki),
- dostępną informację: gry z pełną informacją (gracz zna wszystkie strategie i cel swojego przeciwnika) i gry z informacją niekompletną (gracz nie wie jaki cel przyświeca przeciwnikowi),
- gry strategiczne i gry ekstensywne.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W grach strategicznych gracze znają nawzajem swoje strategie, czyli wiedzą, jak mogą zachować się inni gracze. Wyboru strategii dokonują jednak jednoczenie, a dokładniej czynią to nie wiedząc, którą ze swoich strategii wybrali przeciwnicy. Co więcej, ustalają oni w ten sposób swój plan postępowania raz na zawsze i nie mogą go zmienić w trakcie rozgrywki. Prostym przykładem takiej gry jest dziecięca zabawa w "kamień-nożyce-papier".

W grach ekstensywnych istnieje pewna kolejność posunięć – gracze wykonuj swoje ruchy (tj. dokonują wyboru strategii) na podstawie ruchów przeciwnika. Innymi słowy mamy tu do czynienia z ciągłym dopasowywaniem się graczy do zaistniałej sytuacji. Za przykład mogą posłużyć tu szachy.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO

Z grami o sumie zerowej mamy do czynienia wszędzie tam, gdzie interesy graczy są dokładnie przeciwstawne, czyli tam, gdzie wygrana (zysk) jednego gracza jest równy przegranej (stracie) drugiego. Gry te służą więc do modelowania sytuacji czystego konfliktu, w których nie ma mowy o współpracy między graczami, ze względu na wyraźną sprzeczność ich interesów.

Przykład

Dwie firmy (A i B) produkują pewien wyrób i konkurują ze sobą o rynek zbytu. Aby zwiększyć swą konkurencyjność, firmy podjęły pewne działania marketingowe. Obie firmy rozważają 3 możliwości (strategie): A_1 (B_1) – zastosować lepsze opakowanie produktu, A_2 (B_2) – zwiększyć nakłady na reklamę, A_3 (B_3) – nieznacznie obniżyć cenę. Oszacowane efekty tych działań w postaci procentowego zwiększenia udziału w rynku sprzedaży produktu dla firmy A umieszczone są w tabeli.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Wybrać optymalną strategię dla każdej z firm zakładając, że każda z nich podejmując decyzję nie zna wyboru konkurenta.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	2
A_2	2	8	0
A_3	6	-4	-2

Gry dwuosobowe najłatwiej jest przedstawić w postaci **macierzy wypłat**. Tak przedstawioną grę nazywamy **grą w postaci normalnej**. Macierz wypłat zawiera wartości wypłat dla wszystkich możliwych kombinacji strategii obu graczy. W przypadku gier o sumie zerowej stosuje się zapis uproszczony – wystarczy macierz wypłat gracza A o elementach a_{ij} ($i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$; n – liczba strategii gracza A, m – liczba strategii gracza B).

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Poszukiwanie rozwiązania gry najlepiej przeprowadzić w 3 krokach:

1. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.
2. Usunięcie strategii zdominowanych.
3. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.

Strategie czyste:

- gracza A: A_1, A_2, A_3,
- gracza B: B_1, B_2, B_3.

Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.

Ogólny sposób poszukiwania rozwiązania w zbiorze strategii czystych (punktu siodłowego) jest następujący:

- wypisać minima z każdego wiersza i wybrać największe z nich:

$$v_A = \max_i\{\min_j\{a_{ij}\}\} \qquad \text{(wartość dolna gry)}$$

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

- wypisać maksima z każdej kolumny i wybrać najmniejsze z nich:

$$v_B = \min_j \{\max_i \{a_{ij}\}\} \qquad \text{(wartość górna gry)}$$

Jeżeli obie liczby są równe ($v_A=v_B$), to gra posiada rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (punkt siodłowy). Gracze powinni stosować te strategie, które odpowiadają wyznaczonemu wierszowi i kolumnie. Jeżeli wybiorą inne strategie, narażą się na niepotrzebne straty.

W przykładzie istnieje punkt siodłowy (rozwiązanie w zbiorze strategii czystych). Gracz A powinien stosować strategię A_1, gracz B – B_3. Wartość gry wyniesie wtedy: $v=v_A=v_B=2$.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3	min a_{ij}
A_1	4	6	2	2
A_2	2	8	0	0
A_3	6	-4	-2	-4
max a_{ij}	6	8	2	

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Poszukiwanie strategii zdominowanych.

Strategii zdominowanych (nieefektywnych, nieracjonalnych) poszukujemy, aby uprościć grę (zmniejszyć macierz wypłat). Strategię S_p nazywamy zdominowaną przez strategię S_r, jeżeli:

- dla gracza A: $\forall j : a_{pj} \le a_{rj}$,
- dla gracza B: $\forall i : a_{ip} \ge a_{ir}$.

Procedurę znajdowania i usuwania strategii zdominowanych przedstawiono dla przykładowej macierzy wypłat.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	2
A_2	2	8	0
A_3	6	-4	-2

Strategie gracza A nie są zdominowane (na razie).
B_1 jest zdominowana przez B_3 (usuwamy B_1).

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

a_{ij}	B_2	B_3
A_1	6	2
A_2	8	0
A_3	-4	-2

A_3 jest zdominowana przez np. A_1 (usuwamy A_3).

a_{ij}	B_2	B_3
A_1	6	2
A_2	8	0

B_2 jest zdominowana przez B_3 (usuwamy B_2).

a_{ij}	B_3
A_1	2
A_2	0

A_2 jest zdominowana przez A_1 (usuwamy A_2).

a_{ij}	B_3
A_1	2

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Udało się macierz wypłat zredukować do jednego wiersza i jednej kolumny, czyli gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (A_1, B_3). Wartość gry wynosi 2.

Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.

Strategią mieszaną dla danego gracza będziemy nazywać liniową kombinację wypukłą jego strategii czystych.

Stosowane są na ogół w dwóch rodzajach sytuacji:

- w przypadku wielokrotnego (niezależnego od siebie) rozgrywania tej samej gry,
- gdy obszar zastosowania decyzji daje się podzielić na wystarczająco wiele obszarów częściowych.

Optymalnym rozwiązaniem gry będzie strategia mieszana, gdy gra nie ma punktu siodłowego.

Przyjmijmy **NOWĄ** macierz wypłat w analizowanym przykładzie.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	6
A_2	3	1	4
A_3	2	3	3

Gra nie ma rozwiązania w zbiorach strategii czystych (v_A=2, v_B=3). Usuwamy strategie zdominowane (A_3 jest zdominowana przez A_1, B_3 jest zdominowana przez B_1).

a_{ij}	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	3	1

Szukając optymalnych strategii mieszanych można wykorzystać metody i techniki programowania liniowego.

Oznaczenia:

p_i – częstość stosowania przez gracza A strategii A_i, i=1,2,

q_j – częstość stosowania przez gracza B strategii B_j, j=1,2.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza A (częstości p_i) można przedstawić następująco:

$$
\begin{aligned}
& v \to \max \\
& 2p_1 + 3p_2 \geq v, \\
& 4p_1 + 1p_2 \geq v, \qquad\qquad (1) \\
& p_1 + p_2 = 1, \\
& p_1, p_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Jeżeli dokonamy podstawienia: $x_i = \dfrac{p_i}{v}$ (przy zał. v>0), to (1) można zapisać następująco:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{v} = x_1 + x_2 \to \min \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 1, \qquad\qquad (2) \\
& 4x_1 + 1x_2 \geq 1, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Rozwiązanie (2): $x_1=0,2$, $x_2=0,2$, $v=2,5$.
Stąd łatwo wyznaczyć: $p_1=0,5$, $p_2=0,5$.
Czyli gracz A powinien stosować strategie A_1 i A_2 z częstością 0,5 oraz nie stosować strategii A_3 (zdominowana). Minimalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy 2,5.

Podobnie postępujemy dla gracza B. Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza B (częstości q_j) można przedstawić następująco:

$$
\begin{aligned}
& v \to \min \\
& 2q_1 + 4q_2 \le v, \\
& 3q_1 + 1q_2 \le v, \qquad\qquad (3) \\
& q_1 + q_2 = 1, \\
& q_1, q_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Jeżeli dokonamy podstawienia: $y_j = \dfrac{q_j}{v}$ (przy zał. v>0), to (3) można zapisać następująco:

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$$\frac{1}{v} = y_1 + y_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} &2y_1 + 4y_2 \le 1, \\ &3y_1 + 1y_2 \le 1, \\ &y_1, y_2 \ge 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Rozwiązanie (4): y_1=0,3, y_2=0,1, v=2,5.
Stąd łatwo wyznaczyć: q_1=0,75, q_2=0,25.
Czyli gracz B powinien stosować strategie B_1 z częstością 0,75 i strategię B_2 z częstością 0,25 oraz nie stosować strategii B_3 (zdominowana). Maksymalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy również 2,5.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

GRY Z NATURĄ

Gry z naturą rozgrywane są przy założeniu pasywnej postawy drugiego z graczy, któremu wynik gry jest obojętny.

Przykład

Inwestor ma podjąć decyzję D_i (i = 1, 2, 3, 4), jaki typ zakładu usługowego ma uruchomić. Dla każdego typu zakładu oszacowano przewidywany zysk a_{ij}, jaki osiągnie się w wyniku eksploatacji zakładu przy różnych stanach S_j (j = 1, 2, 3) przyszłego popytu (pesymistycznym – S_1, przeciętnym – S_2, optymistycznym – S_3). Dane umieszczone są w poniższej tabeli.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3
D_1	-20	15	50
D_2	-10	25	40
D_3	-5	10	20
D_4	5	5	25

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Decydent może kierować się np. 4 poniższymi kryteriami podejmowania decyzji w warunkach niepewności: Walda (maksyminowe), Hurwicza, Bayesa i Savage'a.

1. Kryterium Walda (maksyminowe)

Zgodnie z tym kryterium należy wybrać taki wariant działalności, który przy najmniej korzystnym stanie natury pozwala osiągnąć najlepszy wynik. Jest to reguła asekurancka, reguła gracza ostrożnego, ale inteligentnego.

$$a_{kl} = \max_i \{\min_j \{a_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\min\{a_{ij}\}$
D_1	-20	15	50	-20
D_2	-10	25	40	-10
D_3	-5	10	20	-5
D_4	5	5	25	5

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Walda powinien podjąć decyzję D_4.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

2. Kryterium Hurwicza

Jest to kryterium kompromisowe między skrajnym pesymizmem a skrajnym optymizmem. Wprowadza się w nim tzw. **współczynnik ostrożności** $\gamma \, (0 \le \gamma \le 1)$, który określa, w jakim stopniu podejmujący decyzję jest pesymistą.

$$a_k = \max_i \{\gamma \min_j \{a_{ij}\} + (1-\gamma) \max_j \{a_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Hurwicza przy współczynniku ostrożności 0,4 powinien podjąć decyzję D_1.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\min\{a_{ij}\}$	$\max\{a_{ij}\}$	a_k
D_1	-20	15	50	-20	50	22
D_2	-10	25	40	-10	40	20
D_3	-5	10	20	-5	20	10
D_4	5	5	25	5	25	17

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

3. Kryterium Bayesa

W tym kryterium przyjmuje się, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne (możemy więc mówić o neutralnym stanowisku w kwestii przyszłych warunków działalności) i wyznacza się wartość średnią wyników dla każdej decyzji. Optymalną jest ta decyzja, dla której średni wynik jest maksymalny.

$$\overline{a}_k = \max_i \{\overline{a}_i\} = \max_i \{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Bayesa powinien podjąć decyzję D_2.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\overline{a}_i$
D_1	-20	15	50	15
D_2	-10	25	40	18,3
D_3	-5	10	20	8,3
D_4	5	5	25	11,7

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

4. Kryterium Savage'a

W tym kryterium nie ocenia się wyników podjętych decyzji, lecz skutki (straty) wynikające z niepodjęcia decyzji, która przy danym stanie natury byłaby najlepsza. Wyznaczenie decyzji optymalnej odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym tworzymy macierz „żalu" (względnych, relatywnych strat), w której znajdują się różnice b_{ij} między maksymalnym do osiągnięcia wynikiem w warunkach S_j a wynikiem uzyskanym w razie podjęcia decyzji D_i.

$$b_{ij} = \max_{i}\{a_{ij}\} - a_{ij}$$

a_{ij}	S_1	S_2	S_3
D_1	-20	15	50
D_2	-10	25	40
D_3	-5	10	20
D_4	5	5	25
max a_{ij}	5	25	50

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W etapie drugim, w tak określonej macierzy względnych strat poszukuje się elementu maksymalnego w każdym wierszu, a następnie wiersza, w którym wartość ta jest najmniejsza.

$$b_{kl} = \min_i\{\max_j\{b_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

b_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\max\{b_{ij}\}$
D_1	25	10	0	25
D_2	15	0	10	15
D_3	10	15	30	30
D_4	0	20	25	25

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Savage'a powinien podjąć decyzję D_2.