

# **ELEMENTY TEORII GIER c.-d.**

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	2	4	6
$A_2$	3	1	4
$A_3$	2	3	3

Gra nie ma rozwiązania w zbiorach strategii czystych ( $v_A=2$ ,  $v_B=3$ ).  
Usuwanie strategii zdominowane ( $A_3$  jest zdominowana przez  $A_1$ ,  $B_3$  jest zdominowana przez  $B_1$ ).

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$
$A_1$	2	4
$A_2$	3	1

Szukając optymalnych strategii mieszanych można wykorzystać metody i techniki programowania liniowego.

### Oznaczenia:

$p_i$  – częstość stosowania przez gracza A strategii  $A_i$ ,  $i=1,2$ ,

$q_j$  – częstość stosowania przez gracza B strategii  $B_j$ ,  $j=1,2$ .

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza A (częstości  $p_i$ ) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} v &\rightarrow \max \\ 2p_1 + 3p_2 &\geq v, \\ 4p_1 + 1p_2 &\geq v, \\ p_1 + p_2 &= 1, \\ p_1, p_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Jeżeli dokonamy podstawienia:  $x_i = \frac{p_i}{v}$  (przy zał.  $v > 0$ ), to (1) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} &= x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 1, \\ 4x_1 + 1x_2 &\geq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Rozwiązanie (2):  $x_1=0,2$ ,  $x_2=0,2$ ,  $v=2,5$ .

Stąd łatwo wyznaczyć:  $p_1=0,5$ ,  $p_2=0,5$ .

Czyli gracz A powinien stosować strategie  $A_1$  i  $A_2$  z częstością 0,5 oraz nie stosować strategii  $A_3$  (zdominowana). Minimalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy 2,5.

Podobnie postępujemy dla gracza B. Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza B (częstości  $q_j$ ) można przedstawić następująco:

$$v \rightarrow \min$$

$$2q_1 + 4q_2 \leq v,$$

$$3q_1 + 1q_2 \leq v, \quad (3)$$

$$q_1 + q_2 = 1,$$

$$q_1, q_2 \geq 0.$$

Jeżeli dokonamy podstawienia:  $y_j = \frac{q_j}{v}$  (przy zał.  $v > 0$ ), to (3) można zapisać następująco:

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} &= y_1 + y_2 \rightarrow \max \\ 2y_1 + 4y_2 &\leq 1, \\ 3y_1 + 1y_2 &\leq 1, \\ y_1, y_2 &\geq 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Rozwiązanie (4):  $y_1=0,3$ ,  $y_2=0,1$ ,  $v=2,5$ .

Stąd łatwo wyznaczyć:  $q_1=0,75$ ,  $q_2=0,25$ .

Czyli gracz B powinien stosować strategię  $B_1$  z częstością 0,75 i strategię  $B_2$  z częstością 0,25 oraz nie stosować strategii  $B_3$  (zdominowana). Maksymalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy również 2,5.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## GRY Z NATURĄ

Gry z naturą rozgrywane są przy założeniu pasywnej postawy drugiego z graczy, któremu wynik gry jest obojętny.

### Przykład

Inwestor ma podjąć decyzję  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), jaki typ zakładu usługowego ma uruchomić. Dla każdego typu zakładu oszacowano przewidywany zysk  $a_{ij}$ , jaki osiągnie się w wyniku eksploatacji zakładu przy różnych stanach  $S_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) przyszłego popytu (pesymistycznym –  $S_1$ , przeciętnym –  $S_2$ , optymistycznym –  $S_3$ ). Dane umieszczone są w poniższej tabeli.

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$D_1$	-20	15	50
$D_2$	-10	25	40
$D_3$	-5	10	20
$D_4$	5	5	25

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Decydent może kierować się np. 4 poniższymi kryteriami podejmowania decyzji w warunkach niepewności: Walda (maksyminowe), Hurwicza, Bayesa i Savage'a.

## 1. Kryterium Walda (maksyminowe)

Zgodnie z tym kryterium należy wybrać taki wariant działalności, który przy najmniej korzystnym stanie natury pozwala osiągnąć najlepszy wynik. Jest to reguła asekurancka, reguła gracza ostrożnego, ale inteligentnego.

$$a_{kl} = \max_i \{ \min_j \{ a_{ij} \} \} \rightarrow D_k$$

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\min\{a_{ij}\}$
$D_1$	-20	15	50	-20
$D_2$	-10	25	40	-10
$D_3$	-5	10	20	-5
$D_4$	5	5	25	5

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Walda powinien podjąć decyzję  $D_4$ .

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## 2. Kryterium Hurwicza

Jest to kryterium kompromisowe między skrajnym pesymizmem a skrajnym optymizmem. Wprowadza się w nim tzw. **współczynnik ostrożności**  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ), który określa, w jakim stopniu podejmujący decyzję jest pesymistą.

$$a_k = \max_i \{ \gamma \min_j \{ a_{ij} \} + (1 - \gamma) \max_j \{ a_{ij} \} \} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Hurwicza przy współczynniku ostrożności 0,4 powinien podjąć decyzję  $D_1$ .

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\min\{a_{ij}\}$	$\max\{a_{ij}\}$	$a_k$
$D_1$	-20	15	50	-20	50	22
$D_2$	-10	25	40	-10	40	20
$D_3$	-5	10	20	-5	20	10
$D_4$	5	5	25	5	25	17



# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## 3. Kryterium Bayesa

W tym kryterium przyjmuje się, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne (możemy więc mówić o neutralnym stanowisku w kwestii przyszłych warunków działalności) i wyznacza się wartość średnią wyników dla każdej decyzji. Optymalną jest ta decyzja, dla której średni wynik jest maksymalny.

$$\bar{a}_k = \max_i \{\bar{a}_i\} = \max_i \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij} \right\} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Bayesa powinien podjąć decyzję  $D_2$ .

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\bar{a}_i$
$D_1$	-20	15	50	15
$D_2$	-10	25	40	18,3
$D_3$	-5	10	20	8,3
$D_4$	5	5	25	11,7

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## 4. Kryterium Savage'a

W tym kryterium nie ocenia się wyników podjętych decyzji, lecz skutki (straty) wynikające z niepodjęcia decyzji, która przy danym stanie natury byłaby najlepsza. Wyznaczenie decyzji optymalnej odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym tworzymy macierz „żalu” (względnych, relatywnych strat), w której znajdują się różnice  $b_{ij}$  między maksymalnym do osiągnięcia wynikiem w warunkach  $S_j$  a wynikiem uzyskanym w razie podjęcia decyzji  $D_i$ .

$$b_{ij} = \max_i \{a_{ij}\} - a_{ij}$$

$a_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$D_1$	-20	15	50
$D_2$	-10	25	40
$D_3$	-5	10	20
$D_4$	5	5	25
$\max a_{ij}$	5	25	50

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W etapie drugim, w tak określonej macierzy względnych strat poszukuje się elementu maksymalnego w każdym wierszu, a następnie wiersza, w którym wartość ta jest najmniejsza.

$$b_{kl} = \min_i \{ \max_j \{ b_{ij} \} \} \rightarrow D_k$$

$b_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\max\{b_{ij}\}$
$D_1$	25	10	0	25
$D_2$	15	0	10	15
$D_3$	10	15	30	30
$D_4$	0	20	25	25

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Savage'a powinien podjąć decyzję  $D_2$ .

# **ANALIZA SIECIOWA PRZEDSIĘWZIĘĆ METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ ALGORYTM – CPM**

# □ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Współczesne metody zarządzania wymagają posługiwania się nowoczesnymi narzędziami pracy. Jednym z głównych problemów w procesie zarządzania jest ocena działalności gospodarczej planowania oraz kontroli wykonania przedsięwzięcia (głównie z punktu widzenia optymalnych efektów ekonomicznych).

Do metod tych, które łączą się nierozdzielnie z prowadzeniem działalności gospodarczej i odgrywają coraz większą rolę w zarządzaniu produkcją, należą metody planowania sieciowego takie jak: **planowanie sieciowe, analiza oraz synteza uogólnionych sieci decyzyjnych itp.**

Deterministyczne metody sieciowe są powszechnie stosowane w organizacji, planowaniu i kierowaniu różnego rodzaju przedsięwzięciami (uruchamianie nowej produkcji, kierowanie inwestycjami, remonty maszyn i urządzeń).

Aby zrozumieć współczesne metody ilościowe wspomagające procesy decyzyjne w planowaniu i organizacji przedsięwzięć konieczna jest znajomość podstawowych zasad budowy tzw. **sieciowego modelu struktury przedsięwzięcia.**

# □ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Aby zrozumieć współczesne metody ilościowe wspomagające procesy decyzyjne w planowaniu i organizacji przedsięwzięć konieczna jest znajomość podstawowych zasad budowy tzw. **sieciowego modelu struktury przedsięwzięcia**.

Jest to szczególnie istotne dla wieloczynnościowych przedsięwzięć posiadających nietypową strukturę i przebieg, czyli dla tzw. procesów nieregularnych. Procesami takimi są między innymi:

- Procesy technicznego przygotowania produkcji,
- Przedsięwzięcia badawczo rozwojowe,
- Modernizacja zakładów przemysłowych,
- Duże przedsięwzięcia inwestycyjne,
- Niektóre przedsięwzięcia organizacyjne,
- Wyprodukowanie złożonego wyrobu na zamówienie (produkcja jednostkowa) itp.

# □ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

## Sieciowy model przedsięwzięcia:

Proces realizacji przedsięwzięcia możemy modelować za pomocą tzw. **sieci czynności**

**Sieć czynności** - jest to graf spójny acykliczny, który posiada jeden wierzchołek początkowy i jeden wierzchołek końcowy. Łuki tego grafu (sieci) przedstawiają czynności, wierzchołki zaś zdarzenia.

Sieć ta przedstawia strukturę kolejności realizacji poszczególnych czynności danego przedsięwzięcia. Funkcje określone na zbiorze łuków lub wierzchołków grafu reprezentują informacje o charakterze techniczno – ekonomicznym związane z realizacją tego procesu (przedsięwzięcia) - np. **czas trwania czynności**.

Każde przedsięwzięcie bez względu na jego charakter, rodzaj czy złożoność, ma wspólne elementy, którymi są:

- **czynność** – część przedsięwzięcia, której realizacja jest związana z upływem czasu oraz ze zużywaniem zasobów (działalność biurowa, wykonanie fundamentów, praca ludzka itp.)

Oznaczymy przez **U** – zbiór czynności danego przedsięwzięcia. Są one przedstawiane jako łuki w grafie sieci przedsięwzięcia, ze strzałką skierowaną zgodnie z postępowaniem prac w czasie.

- **zdarzenie** – jest to czas (moment), w którym kończy się lub rozpoczyna co najmniej jedna czynność. Stanowi ono początek lub koniec pewnego etapu realizacji danego przedsięwzięcia. (zakończenie budowy fundamentu, rozpoczęcie procesu reklamy produktu). Ze zdarzeniem zawsze związany jest pewien termin.

Oznaczymy przez **V** – zbiór wszystkich stanów (zdarzeń) w realizacji przedsięwzięcia. Są one przedstawiane na rysunku jako węzły (wierzchołki) grafu przedsięwzięcia za pomocą koła lub innej prostej figury geometrycznej.



# □ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- **zależność czasowa** – rodzaj czynności służącej do pokazania zależności między zdarzeniami. Umożliwia ona między innymi jednoczesny zapis czynności wykonywanych równolegle (jest to wtedy tzw. czynność fikcyjna), może również określać wzajemne wyprzedzenie lub opóźnienie pewnych zdarzeń. Zależność czasowa jest przedstawiana w sieciowym modelu za pomocą strzałki przerywanej.

Graficzne symbole trzech elementów (**czynności, zdarzenia, zależności czasowej**) wyróżnionych w dowolnym przedsięwzięciu umożliwiają sporządzenie graficznego obrazu wszystkich technologicznych i organizacyjnych powiązań wewnątrz realizowanego przedsięwzięcia. Obraz ten, precyzując jednocześnie kolejność czynności, tworzy **sieć czynności** – jest to pierwszy i bardzo ważny etap analizy sieci czynności.

Na zbiorze **U** - łuków oraz na zbiorze **V** – węzłów grafu  $G = \langle V, U \rangle$  charakteryzującego przedsięwzięcie określone są funkcje:  $f_1, f_2, \dots, f_m$  (deterministyczne lub losowe). Funkcje te to zazwyczaj charakterystyki techniczno – ekonomiczne badanego przedsięwzięcia (np. czas trwania czynności, koszty wykonania czynności, zapotrzebowanie na określone środki itp.)

Graf  $G = \langle V, U, f_1, \dots, f_m \rangle$  w którym uwzględniono charakterystyki techniczno – ekonomiczne przedsięwzięcia nazywa się **skierowanym grafem obciążonym przedsięwzięcia** lub **modelem sieciowym** (lub krótko **siecią**).



# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

## Konstrukcja sieci czynności:

Do wykreślenia sieci czynności dla dowolnego projektu niezbędne są informacje dotyczące czynności wchodzących w skład przedsięwzięcia oraz ustalenie kolejności ich występowania.

W trakcie wykreślania sieci czynności można wyróżnić 4 etapy jej konstruowania:

- ustalenie listy czynności;
- ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia;
- określenie kolejności wykonywania czynności;
- numerowanie wierzchołków;

Ponadto powinny być przestrzegane następujące zasady:

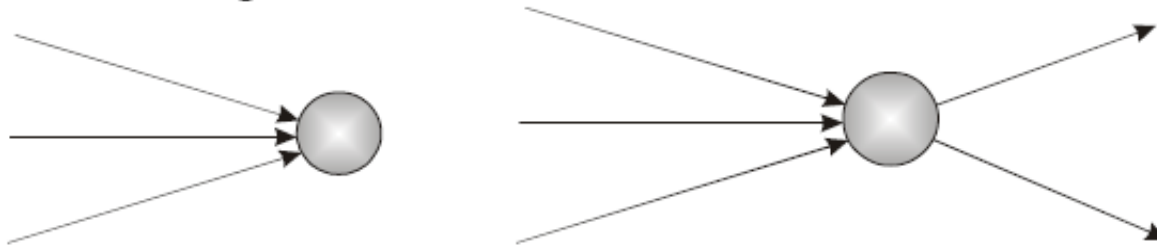
- zdarzenie początkowe nie ma żadnych czynności poprzedzających;
- zdarzenie końcowe nie ma żadnych czynności następujących;
- dwa kolejne zdarzenia mogą być połączone tylko jedną czynnością;
- początkiem każdej czynności jest zawsze pewne **i** – **te** zdarzenie, zwane zdarzeniem poprzedzającym;
- końcem każdej czynności jest zawsze pewne **j** – **te** zdarzenie, zwane zdarzeniem następującym;



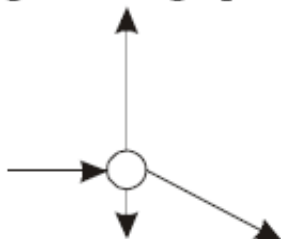
- wszystkie zdarzenia w sieci (z wyjątkiem początkowego i końcowego) powinny być początkiem i końcem co najmniej jednej czynności;

# □ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- zdarzeniem zrealizowanym nazywamy każde zdarzenie w chwili, gdy czynność lub czynności, dla których jest ono zdarzeniem następującym, zostały wykonane;
- czynność lub czynności mogą się rozpoczynać tylko od zdarzenia zrealizowanego;



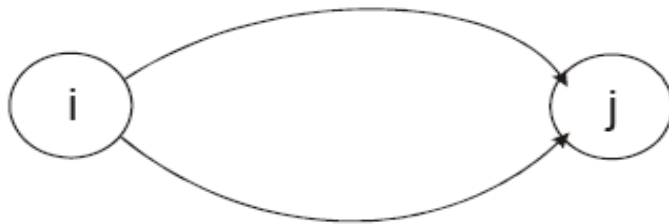
- długość i kierunek strzałki przedstawiającej czynność lub zależność czasowa nie odwzorowują ich czasu trwania, lecz są dyktowane wyłącznie wygodą graficznego przedstawienia sieci czynności



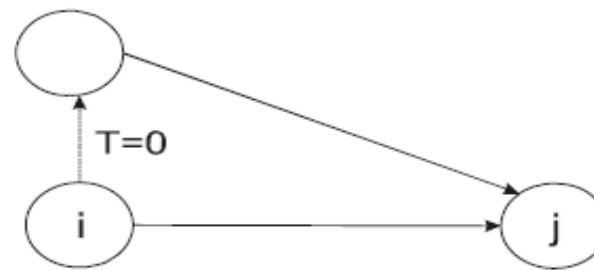
# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- dwa zdarzenia nie mogą być bezpośrednio połączone przez dwie lub więcej czynności. Jeżeli kilka czynności ma być wykonane równocześnie, to rozdziela się początki lub końce czynności formalnie na co najmniej dwa zdarzenia, wykorzystując zależność czasową o czasie trwania  $T=0$  (tworząc tzw. czynności fikcyjne)

nie tak



lecz tak



- dla identyfikacji zdarzeń, czynności i zależności czasowych, każde zdarzenie oznaczone jest numerem. Numeracja jest w zasadzie dowolna, dwa różne zdarzenia nie mogą być jednak oznaczone tym samym numerem;
- każda czynność oraz zależność czasowa jest identyfikowana za pomocą dwóch numerów: numeru zdarzenia poprzedzającego – **i** oraz numeru zdarzenia następującego – **j**. Przy oznaczeniu tak zdarzeń, czynność oznaczamy przez  $(i, j)$ ;



# □ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Opisane zasady i etapy postępowania zilustrujemy na przykładzie budowy sieci czynności przedstawiającej – wprowadzanie nowego produktu na rynek. Przedsięwzięcie takie składa się z czynności dotyczących sfery projektowania produkcji, jak również działań związanych z badaniem rynku.

**Etap 1** – ustalenie listy czynności tego przedsięwzięcia.

<b>Nazwa czynności:</b>
A – badanie popytu na rynku
B – nabycie surowców na prototypy
C – wyprodukowanie prototypów i ocena ich jakości
D – nabycie surowców do produkcji
E – wybór opakowań
F – analiza kosztów produkcji
G – proces produkcji wyrobu
H – wysyłka do sklepów
I – reklama i zbieranie zamówień
J – nabycie opakowań
K – pakowanie wyrobu gotowego
L – analiza ekonomicznych parametrów decyzji po podjęciu procesu produkcji



**Etap 2** – ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia.

Zdarzeniem początkowym jest – **podjęcie decyzji o produkcji na rynek nowego wyrobu.**

Zdarzeniem końcowym jest – **wyrób jest oferowany w sklepie do sprzedaży.**

# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

**Etap 3** – określenie kolejności wykonywania czynności. Na tym etapie należy dla każdej czynności określić: czynności poprzedzające, następujące oraz ewentualne czynności równoległe – które mogą być wykonywane jednocześnie z czynnością rozpatrywaną.

Powiązania między czynnościami w naszym przykładzie są następujące:

Czynności	Czynności bezpośrednio:		
	poprzedzające	następujące	równoległe
A	-	C	B
B	-	C	A
C	A, B	D, E	
D	C	J	
E	C	F, I	
F	E	L	
G	L	K	
H	I, K	-	
I	E	H	
J	D	K	
K	J, G	H	
L	F	G	

# □ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

**Etap 4** – numerowanie wierzchołków. Przy numerowaniu sieci (zdarzeń) należy uwzględnić, że następują one w określonej kolejności oraz to, że zdarzenie będące początkiem czynności powinno mieć numer mniejszy niż zdarzenie, które jest jej końcem.

**Uwaga:** Uporządkowanie wierzchołków zgodnie z tą zasadą można uzyskać stosując algorytm uporządkowania dolnego (warstwowego) dla grafu tworzonej sieci czynności. Wtedy konieczne jest niejednokrotnie przenumerowanie wierzchołków takiego grafu (nadając kolejne liczby naturalne kolejnym wierzchołkom z kolejnych warstw – począwszy od 1 dla wierzchołka wejścia a skończywszy na **n** dla wierzchołka wyjścia).

Na rysunku przedstawiono graf skierowany analizowanego przykładowego przedsięwzięcia związanego z wprowadzaniem nowego produktu na rynek.

