Programowanie liniowe - algorytm Simpleks

Przykład 1. (lista zadań zad. 11 a)

Znaleźć rozwiązanie optymalne następujących zadań programowania liniowego stosując algorytm metody Simpleks

$$F(x_1, x_2, x_3) = 5 * x_1 + 2 * x_2 + 1 * x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2 * x_1 - 1 * x_2 + 1 * x_3 & \geq & 2\ (w1) \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 + 1 * x_3 & = & 5\ (w2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & & (w3) \end{cases}$$

- **Postać kanoniczna zadania (równoważna)**

Wprowadzamy zmienną swobodną ($x_4 \geq 0$) do warunku (w1) aby sprowadzić go do równości (w funkcji celu pojawia się ta zmienna ze współczynnikiem 0).

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5 * x_1 + 2 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2 * x_1 - 1 * x_2 + 1 * x_3 - 1 * x_4 & = & 2\ (w1) \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 & = & 5\ (w2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 & & (w3) \end{cases}$$

- **Postać kanoniczna bazowa zadania (równoważna) ze zmiennymi sztucznymi**

Wprowadzamy zmienne sztuczne żeby otrzymać pierwszą postać bazową z wektorami jednostkowymi. Są to zmienne $s_1 \geq 0$ (wprowadzamy do w1) oraz $s_2 \geq 0$ (wprowadzamy do w2). W funkcji celi zmienne sztuczne są brane ze współczynnikami ($-M, M > 0, M \to \infty$).

Aby zadanie pierwotne miało rozwiązanie optymalne wszystkie zmienne sztuczne w rozwiązaniu optymalnym dla zadania rozszerzonego powinny przyjmować wartość zero ($s_1^* = 0, s_2^* = 0$).

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2) = 5 * x_1 + 2 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 - M * s_1 - M * s_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2 * x_1 - 1 * x_2 + 1 * x_3 - 1 * x_4 + 1 * s_1 + 0 * s_2 & = & 2\ (w1) \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 + 0 * s_1 + 1 * s_2 & = & 5\ (w2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 & & (w3) \end{cases}$$

- **Pierwsze rozwiązanie bazowe algorytmu Simpleks**

Macierz współczynników dla lewych stron warunków ograniczających dla rozważanego równoważnego zadania rozszerzonego o zmienne swobodne i sztuczne jest postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Bazę tworzą dwie ostatnie kolumny tej macierzy $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ odpowiadające zmiennym sztucznym s_1 i s_2 - są to zatem zmienne bazowe dla początkowego rozwiązania bazowego $Z_B = (s_1, s_2)$, pozostałe to kolumny niebazowe $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ odpowiadające zmiennym niebazowym $Z_N = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Tablica Simpleksowa (iteracja 1):

Baza	c_j	5	2	1	0	$-M$	$-M$	$b = t_{i,0}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
x_B	c_b	$t_{i,j, i=1,\ldots,2; j=1,\ldots,6}$						
s_1	-M	2	-1	1	-1	1	0	2
s_2	-M	1	1	1	0	0	1	5
$z_j = \sum_i (c_{bi} * t_{ij})$		$-3 * M$	0	$-2 * M$	M	$-M$	$-M$	F(x)=
$t_{0,j; j=1,\ldots,6} = c_j - z_j =$		**$3 * M + 5$ (Max)**	2	$2 * M + 1$	$-M$	0	0	$-2M - 5M =$ $= -7 * M$ $(-\infty)$

Rozwiązanie bazowe (iteracja pierwsza):

zmienne niebazowe zerujemy: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

zmienne bazowe $x_B = B^{-1} * b = b$, czyli $s_1 = 2, s_2 = 5$,

$F = 5 * 0 + 2 * 0 + 1 * 0 + 0 * 0 - 2 * M - 5 * M = -7 * M \ (-\infty)$.

Kryterium simpleksowe optymalności:

Aby aktualne rozwiązanie bazowe było optymalne (dla zadania na max) wszystkie współczynniki $t_{0,j} \leq 0, j \in Z_N$ (dla zadania na min $\geq$).

Ponieważ dla zmiennych niebazowych: x_1, x_2, x_3 współczynniki te są dodatnie zatem aktualne rozwiązanie bazowe nie jest oczywiście optymalne.

Poprawa rozwiązania:

Kryterium wejścia do bazy:

Do bazy wprowadzamy taką zmienną ze zmiennych niebazowych, dla której dodatni współczynnik $t_{0,j}$ jest największy (maksymalny). Wprowadzamy zatem zmienną x_1. Pierwsza kolumna (k=1) staje się tzw. kolumną centralną tablicy simpleksowej $t_{i=1,2; k=1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kryterium wyjścia z bazy:

Wyznaczamy ilorazy: $\left\{ \frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}, t_{i,k} > 0 \right\}$ i usuwamy z bazy taką zmienną bazową aktualną dla której ten iloraz jest **minimalny**.

$t_{i,0} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Zatem $min \left\{ \frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}, t_{i,k} > 0 \right\} = min \left\{ \frac{2}{2} = 1, \frac{5}{1} = 5 \right\} = 1$ dla i=1, dlatego usuwamy pierwszą zmienną z aktualnego rozwiązania bazowego, czyli zmienną s_1.

Wiersz $r = 1$ staje się tzw. wierszem centralnym tablicy simpleksowej:

$$t_{r=1,j} = [2 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 2]$$

Natomiast element $t_{r=1,k=1} = 2$ jest elementem centralnym tablicy simpleksowej.

Przekształcenie tablicy simpleksowej - nowe (poprawione) rozwiązanie bazowe (sąsiednie).

Przekształcenie wiersza centralnego:

$$t'_{r,j} = \frac{t_{r,j}}{t_{r,k}}$$

$$t'_{r=1,j} = \left[1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad | \quad 1\right]$$

Przekształcenie pozostałych wierszy tablicy simpleksowej (dla naszego zadania) wiersza drugiego.

$$t'_{i\neq r,j} = t_{i,j} - t_{i,k} * t'_{r,j}$$

$$t'_{2,j} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 5] - 1 * \left[1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad | \quad 1\right] =$$
$$= \left[0 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad | \quad 4\right]$$

Powstaje nowa tablica simpleksowa i tym samym nowe lepsze rozwiązanie bazowe.

Tablica Simpleksowa (iteracja 2)

Baza x_B	c_j / c_b	5	2	1	0	$-M$	$-M$	$b = t_{i,0}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
		$t_{i,j,i=1,\dots,2;j=1,\dots,6}$						
x_1	5	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
s_2	$-M$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	4
$z_j = \sum_i (c_{bi} * t_{ij})$		5	$-\frac{3}{2}M - \frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}M + \frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}M - \frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}M + \frac{5}{2}$	$-M$	F(x)=
$t_{0,j;j=1,\dots,6} = c_j - z_j =$		0	$\frac{3}{2}M + \frac{9}{2}$ **(max)**	$\frac{1}{2}M - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}M + \frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}M - \frac{5}{2}$	0	$= 5 - 4 * M$ $(-\infty)$

Rozwiązanie bazowe (iteracja druga):

zmienne niebazowe zerujemy: $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, s_1 = 0$.

zmienne bazowe $x_B = B^{-1} * b = b$, czyli $x_1 = 1, s_2 = 4$,

$F = 5 * 1 + 2 * 0 + 1 * 0 + 0 * 0 - 0 * M - 4 * M = -4 * M + 5\ (-\infty)$.

Ponieważ dla zmiennych niebazowych: x_2, x_3, x_4 współczynniki z_j są dodatnie zatem aktualne rozwiązanie bazowe oczywiście dalej nie jest optymalne.

Zgodnie z simpleksowym kryterium wejścia do bazy wprowadzamy zmienną x_2. Druga kolumna (k=2) staje się tzw. kolumną centralną tablicy simpleksowej $t_{i=1,2;k=2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Zgodnie z simpleksowym kryterium wyjścia z bazy: $t_{i,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. $min\left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}, t_{i,k} > 0\right\} = min\left\{\frac{4*2}{3} = \frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3}$, dlatego usuwamy drugą zmienną bazową, czyli zmienną s_2.

Wiersz $r = 2$ staje się tzw. wierszem centralnym tablicy simpleksowej:

$$t_{r=2,j} = \left[0 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad | \quad 4\right]$$

Element $t_{r=2,k=2} = \frac{3}{2}$ jest elementem centralnym tablicy simpleksowej.

Przekształcenie wiersza centralnego:

$$t'_{r=2,j} = \left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad | \quad \frac{8}{3}\right]$$

Przekształcenie pozostałego (i=1) pierwszego wiersza tablicy simpleksowej:

$$t'_{1,j} = \left[1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad | \quad 1\right] + \frac{1}{2} * \left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad | \quad \frac{8}{3}\right] = \\ = \left[1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad | \quad \frac{7}{3}\right]$$

Powstaje nowa tablica simpleksowa i tym samym nowe kolejne poprawione rozwiązanie bazowe.

Tablica Simpleksowa (iteracja 3)

Baza x_B	c_j	5	2	1	0	$-M$	$-M$	$b = t_{i,0}$
	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
		$t_{i,j,i=1,\dots,2;j=1,\dots,6}$						
x_1	5	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_2	2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
$z_j = \sum_i (c_{bi} * t_{ij})$		5	2	4	-1	1	3	F(x)=
$t_{0,j;j=1,\dots,6} = c_j - z_j$=		0	0	$-\frac{4}{3}$	1	$-M-1$	$-M-3$	$= 5 * \frac{7}{3} + 2 * \frac{8}{3} = = \frac{51}{3} = 17$

Rozwiązanie bazowe (iteracja trzecia):

zmienne niebazowe zerujemy: $x_3 = 0, x_4 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$.

zmienne bazowe przyjmą wartości: $x_B = B^{-1} * b = b$, czyli $x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = \frac{8}{3}$,

$F = 5 * \frac{7}{3} + 2 * \frac{8}{3} + 1 * 0 + 0 * 0 - 0 * M - 0 * M = 5 * \frac{7}{3} + 2 * \frac{8}{3} = \frac{51}{3} = 17$.

Ponieważ dla zmiennej niebazowej: x_4 współczynnik z_j jest dodatni zatem aktualne rozwiązanie bazowe dalej nie jest optymalne.

Zgodnie z simpleksowym kryterium wejścia do bazy wprowadzamy zmienną x_4. Czwarta kolumna (k=4) staje się tzw. kolumną centralną tablicy simpleksowej $t_{i=1,2;k=4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Zgodnie z simpleksowym kryterium wyjścia z bazy:

$t_{i,0} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$. $min\left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}, t_{i,k} > 0\right\} = min\left\{\frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}}\right\} = 8$, dlatego usuwamy drugą aktualną zmienną bazową, czyli zmienną x_2.

Wiersz $r = 2$ staje się tzw. wierszem centralnym tablicy simpleksowej:

$$t_{r=2,j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Element $t_{r=2,k=4} = \frac{1}{3}$ jest elementem centralnym tablicy simpleksowej.

Przekształcenie wiersza centralnego:

$$t'_{r=2,j} = [0 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad | \quad 8]$$

Przekształcenie pozostałego (i=1) pierwszego wiersza tablicy simpleksowej:

$$t'_{1,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{7}{3} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} * [0 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad | \quad 8] =$$
$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 5]$$

Powstaje nowa tablica simpleksowa i tym samym nowe kolejne poprawione rozwiązanie bazowe.

Tablica Simpleksowa (iteracja 4)

Baza x_B	c_j	5	2	1	0	$-M$	$-M$	$b = t_{i,0}$
	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
		$t_{i,j,i=1,\ldots,2;j=1,\ldots,6}$						
x_1	5	1	1	1	0	0	1	5
x_4	0	0	3	1	1	-1	2	8
$z_j = \sum_i (c_{bi} * t_{ij})$		5	5	5	0	0	5	F(x)=
$t_{0,j;j=1,\ldots,6} = c_j - z_j =$		0	-3	-4	0	$-M$	$-M-5$	$= 5*5+0*8 =$ $= 25$ **(max)**

Rozwiązanie bazowe (iteracja czwarta - ostatnia):

zmienne niebazowe zerujemy: $x_2^* = 0, x_3^* = 0, s_1^* = 0, s_2^* = 0$.

zmienne bazowe przyjmą wartości: $x_B = B^{-1} * b = b$, czyli $x_1^* = 5, x_4^* = 8$,

$F^* = 5*5 + 2*0 + 1*0 + 0*8 - 0*M - 0*M = 25$.

Ponieważ dla wszystkich zmiennych niebazowych współczynniki $z_j \leq 0$, zatem aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne.

Przykład 2.

Przedsiębiorstwo transportowe dysponuje ciężarówkami o ładowności 5[t]. Klient zlecił przedsiębiorstwu przewóz co najmniej 8 ładunków w opakowaniach po 3[t] oraz 10 ładunków w opakowaniach po 2[t]. Wiadomo ponadto że firma dysponuje tylko maksymalnie 10 środkami transportu. W jaki sposób należy załadować towar na ciężarówki aby zrealizować zamówienie przy istniejących ograniczeniach ? Jako kryterium decyzyjne przyjąć liczbę środków transportu wykorzystanych do zrealizowania zamówienia. Ile wynosi łączna niewykorzystana ich ładowność ? Rozwiązać zadanie stosując algorytm metody Simpleks.

Matematyczny model problemu decyzyjnego:

Możliwości załadunku:

Sposoby załadunku	I	II
Opakowania (palety) 3 [t]	1	0
Opakowania (palety) 2 [t]	1	2
Niewykorzystana ładowność [t]	0	1

Model matematyczny problemu decyzyjnego

Zmienne decyzyjne:

$x_1 \geq 0$ - liczba samochodów załadowanych sposobem I wysyłanych do odbiorców

$x_2 \geq 0$ - liczba samochodów załadowanych sposobem II wysyłanych do odbiorców

Funkcja celu:

$$F(x_1, x_2) = 1 * x_1 + 1 * x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 1 * x_1 + 0 * x_2 & \geq & 8 \ (w1) \\ 1 * x_1 + 2 * x_2 & \geq & 10 \ (w2) \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 & \leq & 10 \ (w3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & (w4) \end{cases}$$

- **Postać kanoniczna zadania (równoważna)**

Wprowadzamy zmienne swobodne: ($x_3 \geq 0$) do warunku (w1), ($x_4 \geq 0$) do warunku (w2) oraz ($x_5 \geq 0$) do warunku (w3) aby sprowadzić je do równości (w funkcji celu pojawiają się one ze współczynnikami 0).

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 + 0 * x_5 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 1 * x_1 + 0 * x_2 - 1 * x_3 + 0 * x_4 + 0 * x_5 & = & 8 \ (w1) \\ 1 * x_1 + 2 * x_2 + 0 * x_3 - 1 * x_4 + 0 * x_5 & = & 10 \ (w2) \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 + 1 * x_5 & = & 10 \ (w3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 & & (w4) \end{cases}$$

- **Postać kanoniczna bazowa zadania (równoważna) ze zmiennymi sztucznymi**

Wprowadzamy zmienne sztuczne, aby otrzymać pierwszą postać bazową z wektorami jednostkowymi. Są to zmienne $s_1 \geq 0$ (wprowadzamy do w1) oraz $s_2 \geq 0$ (wprowadzamy do w2). W funkcji celi zmienne sztuczne są brane ze współczynnikami ($M, M > 0, M \to \infty$).

Aby zadanie pierwotne miało rozwiązanie optymalne wszystkie zmienne sztuczne w rozwiązaniu optymalnym dla zadania rozszerzonego powinny przyjmować wartość zero ($s_1^* = 0, s_2^* = 0$).

$$F(x_1, x_2, x_{3,} x_4, x_5, s_1, s_2) = 1 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 + 0 * x_5 + M * s_1 + M * s_2 \to min$$

$$\begin{cases} 1 * x_1 + 0 * x_2 - 1 * x_3 + 0 * x_4 + 0 * x_5 + 1 * s_1 + 0 * s_2 & = & 8\ (w1) \\ 1 * x_1 + 2 * x_2 + 0 * x_3 - 1 * x_4 + 0 * x_5 + 0 * s_1 + 1 * s_2 & = & 10\ (w2) \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 + 1 * x_5 + 0 * s_1 + 0 * s_2 & = & 10\ (w3) \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0 & & (w4) \end{cases}$$

- **Pierwsze rozwiązanie bazowe algorytmu Simpleks**

Macierz współczynników dla lewych stron warunków ograniczających dla rozważanego równoważnego zadania rozszerzonego o zmienne swobodne i sztuczne jest postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Bazę tworzą trzy ostatnie kolumny tej macierzy $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ odpowiadające zmiennym sztucznym s_1 i s_2 oraz zmiennej swobodnej x_5 - są to zatem zmienne bazowe dla początkowego rozwiązania bazowego $Z_B = (s_1, s_2, x_5)$, pozostałe to kolumny niebazowe $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ odpowiadające zmiennym niebazowym $Z_N = (x_1, x_{2,} x_3, x_4)$

Tablica Simpleksowa (iteracja p=1):

Baza x_B	c_j	1	1	0	0	0	M	M	$b = t_{i,0}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	
	c_b		$t_{i,j,i=1,\ldots,3;j=1,\ldots,7}$						
s_1	M	1	0	-1	0	0	1	0	8
s_2	M	1	2	0	-1	0	0	1	10
x_5	0	1	1	0	0	1	0	0	10
$z_j = \sum_i (c_{bi} * t_{ij})$		$2 * M$	$2 * M$	$-M$	$-M$	0	M	M	F(x)=
$t_{0,j;j=1,\ldots,7} = c_j - z_j$=		$-2 * M + 1$ **(min)**	$-2 * M + 1$ **(min)**	M	M	0	0	0	$8 * M + 10 * M$ $+0 * 10 =$ $=18 * M\ (+\infty)$

Rozwiązanie bazowe (iteracja p=1):

zmienne niebazowe zerujemy: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

zmienne bazowe $x_B = B^{-1} * b = b$, czyli $s_1 = 8, s_2 = 10, x_5 = 10$,

$F = 1*0 + 1*0 + 0*0 + 0*0 + 0*10 + 8*M + 10*M = 18*M\ (+\infty)$.

Kryterium simpleksowe optymalności:

Aby aktualne rozwiązanie bazowe było optymalne (dla zadania na min) wszystkie współczynniki $t_{0,j} \geq 0, j \in Z_N$.

Ponieważ dla zmiennych niebazowych: x_1, x_2 współczynniki te są ujemne zatem aktualne rozwiązanie bazowe nie jest optymalne.

Poprawa rozwiązania:

Kryterium wejścia do bazy:

Do bazy wprowadzamy taką zmienną ze zmiennych niebazowych, dla której ujemny współczynnik $t_{0,j}$ jest najmniejszy (minimalny). Wprowadzamy zatem zmienną albo x_1 albo x_2. Niech to będzie zmienna pierwsza. Pierwsza kolumna (k=1) staje się tzw. kolumną centralną tablicy simpleksowej $t_{i=1,2,3;k=1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kryterium wyjścia z bazy:

Wyznaczamy ilorazy: $\left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}, t_{i,k} > 0\right\}$ i usuwamy z bazy taką zmienną bazową aktualną dla której ten iloraz jest **minimalny**.

$t_{i,0} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$. Zatem $min\left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}, t_{i,k} > 0\right\} = min\left\{\frac{8}{1} = 8, \frac{10}{1} = 10, \frac{10}{1} = 10\right\} = 8$ dla i=1 mamy minimum, dlatego usuwamy pierwszą zmienną z aktualnego rozwiązania bazowego, czyli zmienną s_1.

Wiersz $r = 1$ staje się tzw. wierszem centralnym tablicy simpleksowej:

$$t_{r=1,j} = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 8]$$

Natomiast element $t_{r=1,k=1} = 1$ jest elementem centralnym tablicy simpleksowej.

Przekształcenie tablicy simpleksowej - nowe (poprawione) rozwiązanie bazowe (sąsiednie).

Przekształcenie wiersza centralnego:

$$t'_{r,j} = \frac{t_{r,j}}{t_{r,k}}$$

$$t'_{r=1,j} = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 8]$$

Przekształcenie pozostałych wierszy tablicy simpleksowej (dla naszego zadania) wiersza drugiego oraz trzeciego.

$$t'_{i\neq r,j} = t_{i,j} - t_{i,k} * t'_{r,j}$$

$$t'_{2,j} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 10] - 1 * [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 8] =$$
$$= [0 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad 2]$$

$$t'_{3,j} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 10] - 1 * [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 8] =$$
$$= [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad | \quad 2]$$

Powstaje nowa tablica simpleksowa dla nowego poprawionego rozwiązania bazowego.

Tablica Simpleksowa (iteracja p=2)

Baza x_B	c_j	1	1	0	0	0	M	M	$b = t_{i,0}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	
	c_b	$t_{i,j,i=1,\dots,3;j=1,\dots,7}$							
x_1	1	1	0	-1	0	0	1	0	8
s_2	M	0	2	1	-1	0	-1	1	2
x_5	0	0	1	1	0	1	-1	0	2
$z_j = \sum_i (c_{bi} * t_{ij})$		1	$2 * M$	$M - 1$	$-M$	0	$-M + 1$	M	F(x)=
$t_{0,j;j=1,\dots,7} = c_j - z_j$=		0	$\mathbf{-2 * M + 1}$ **(min)**	$-M + 1$	M	0	$2 * M - 1$	0	$= 1 * 8 + 2 * M + 0 * 2 = 2 * M + 8$ (+∞)

Rozwiązanie bazowe (iteracja p=2):

zmienne niebazowe zerujemy: $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, s_1 = 0$.

zmienne bazowe $x_B = B^{-1} * b = b$, czyli $x_1 = 8, x_5 = 2, s_2 = 2$,

$F = 1 * 8 + 1 * 0 + 0 * 0 + 0 * 0 + 0 * 2 + M * 0 + M * 2 = 2 * M + 8\ (+\infty)$.

Ponieważ dla zmiennych niebazowych: x_2, x_3 współczynniki z_j są ujemne zatem aktualne rozwiązanie bazowe dalej nie jest optymalne.

Zgodnie z simpleksowym kryterium wejścia do bazy wprowadzamy zmienną x_2. Druga kolumna (k=2) staje się tzw. kolumną centralną tablicy simpleksowej $t_{i=1,2,3;k=2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Zgodnie z simpleksowym kryterium wyjścia z bazy: $t_{i,0} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. $min\left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}, t_{i,k} > 0\right\} = min\left\{\frac{2}{2} = 1, \frac{2}{1} = 2\right\} = 1$, dlatego usuwamy drugą aktualną zmienną bazową, czyli zmienną s_2.

Wiersz $r = 2$ staje się tzw. wierszem centralnym tablicy simpleksowej:

$$t_{r=2,j} = [0 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad 2]$$

Element $t_{r=2,k=2} = 2$ jest elementem centralnym tablicy simpleksowej.

Przekształcenie wiersza centralnego:

$$t'_{r=2,j} = \left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad | \quad 1\right]$$

Przekształcenie pozostałych (i=1, i=3) pierwszego i trzeciego wiersza tablicy simpleksowej:

$$t'_{1,j} = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 8] - 0 * \left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad | \quad 1\right] = \\ = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 8]$$

$$t'_{3,j} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad | \quad 2] - 1 * \left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad | \quad 1\right] = \\ = \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad | \quad 1\right]$$

Powstaje nowa tablica simpleksowa i tym samym nowe kolejne poprawione rozwiązanie bazowe.

Tablica Simpleksowa (iteracja p=3)

Baza x_B	c_j	1	1	0	0	0	M	M	$b = t_{i,0}$
	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	
		$t_{i,j,i=1,\dots,2,3;j=1,\dots,7}$							
x_1	1	1	0	-1	0	0	1	0	8
x_2	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$z_j = \sum_i (c_{bi} * t_{ij})$		1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	F(x)=
$t_{0,j;j=1,\dots,7} = c_j - z_j =$		0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$M - \frac{1}{2}$	$M - \frac{1}{2}$	$= 1 * 8 + 1 * 1 + 0 * 1 =$ $=$ **9 (min)**

Rozwiązanie bazowe (iteracja p=3 - ostatnia):

zmienne niebazowe zerujemy: $x_3^* = 0, x_4^* = 0, s_1^* = 0, s_2^* = 0$.

zmienne bazowe przyjmą wartości: $x_B = B^{-1} * b = b$, czyli $x_1^* = 8, x_2^* = 1, x_5^* = 1$,

$F^* = 1 * 8 + 1 * 1 + 0 * 0 + 0 * 0 + 0 * 1 + M * 0 + M * 0 = 9\ (min)$.

Ponieważ dla wszystkich zmiennych niebazowych współczynniki $z_j \geq 0$, zatem aktualne trzecie rozwiązanie bazowe jest tym samym optymalne.