Ćw. 4 - lista zadań (nieliniowe problemy optymalizacyjne)

Zad. 1. Pewne przedsiębiorstwo logistyczne zamierza zakupić dwa nowe typy środków transportu do przewozu towarów. Na podstawie danych empirycznych z lat ubiegłych oszacowano funkcję użyteczności dla planowanych zakupów środków transportu (określającą np. spodziewane oszczędności firmy). Oszacowana funkcja użyteczności jest postaci: $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_2 + x_1$, gdzie: x_1 – liczba zakupionych ciężarówek 1 typu, zaś x_2 – liczba zakupionych ciężarówek 2 typu.
Określić optymalne wielkości zakupów ciężarówek, wiedząc że przedsiębiorstwo dysponuje budżetem 90 tys. €, zaś cena jednostkowa samochodów poszczególnych typów wynosi odpowiednio: 10 i 20 tys. €.
Rozwiązać zadanie metodą Lagrange'a. Podać optymalną użyteczność zakupionych środków transportu.

Zad. 2. Firma UPS zamierza rozszerzyć swoja działalność w 3 nowych krajach. Firma zamierza zatrudnić w nowych tworzonych oddziałach łącznie 11 tys. pracowników. Oszacowano funkcję kosztów zatrudnienia nowych pracowników postaci: $U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_1 + 12$, gdzie: x_i (i=1,2,3) – planowane zatrudnienie w oddziałach i-tego kraju.
Określić optymalne dla firmy wielkości zatrudnienia w poszczególnych oddziałach.
Rozwiązać zadanie metodą Lagrange'a. Podać optymalne koszty zatrudnienia.

Zad. 3. Określić optymalne współrzędne (X,Y) dla lokalizacji centralnego magazynu zaopatrującego w towar trzy hurtownie na podstawie danych podanych w tabeli.
Lokalizacje poszczególnych hurtowni (x_i, y_i) $(i = 1,2,3)$**:**

Numer hurtowni	Lokalizacja x_i [km]	Lokalizacja y_i [km]	Wielkość zapotrzebowania z_i [w jednostkach towaru]
1	10	5	10
2	3	4	20
3	4	1	10

Zakładamy, że koszty dostaw z magazynu do każdej hurtowni są proporcjonalne do wielkości zapotrzebowania oraz do kwadratu ich odległości: $K_i(X,Y) = z_i \cdot d_i^2 = z_i \cdot \left[(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2\right] \geq 0$. Jako kryterium decyzyjne przyjąć łączne koszty dostaw z magazynu do wszystkich hurtowni. Ile wynoszą te koszty ?

Zad. 4. Hurtownia zamierza zakupić dwa nowe typy wózków widłowych. Oszacowano funkcję użyteczności dla planowanych zakupów nowych podnośników widłowych postaci: $U(x_1, x_2) = \frac{1}{3}\ln(x_1) + \frac{2}{3}\ln(x_2)$, gdzie: x_1 – liczba zakupionych wózków 1 typu, zaś x_2 – liczba zakupionych wózków 2 typu.
Określić optymalne wielkości zakupu wózków, wiedząc że przedsiębiorstwo dysponuje budżetem 120 tys. zł, zaś ceny jednostkowe zakupu poszczególnych typów wózków wynoszą odpowiednio: 20 i 10 tys. zł.
Rozwiązać zadanie metodą Lagrange'a. Podać optymalną użyteczność zakupionych wózków.

Zad. 5. Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch bocznic do wyładunku towarów. Koszty (w tyś zł) związane z postojem wagonów na bocznicach wyraża następująca funkcja:

$$K(t_1, t_2) = 0.5t_1^2 + t_1 + 0.25t_2^2 + t_2, \quad K(t_1, t_2) > 0$$

gdzie: $t_1 > 0$ - czas trwania wyładunku na bocznicy 1,

$t_2 > 0$ - czas trwania wyładunku na bocznicy 2.

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa mają w swym składzie 24 wagonów. Dzienne zdolności przeładunkowe obu bocznic wynoszą: 4 i 3 wagony.
Jak należy rozdzielić wagony między obie bocznice, aby koszt związany z postojem był możliwie najniższy ?
Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek na obu bocznicach ?
Podać koszt postojowego przy optymalnym rozłożeniu wagonów między obie bocznice.

Zad. 6. Rozdzielić dzienną liczbę 40 przesyłek pomiędzy dwie firmy kurierskie, tak aby łączne dzienne koszty realizacji dostaw (w zł) były minimalne.

Koszty dostaw opisuje funkcja: $K(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$, gdzie: x_1 – liczba przesyłek dostarczanych przez pierwszą firmę, x_2 – liczba przesyłek dostarczana przez firmę drugą. Podać dzienne koszty dostaw. Rozwiązać zadanie metodą czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

Zad. 7. Dzienne zyski firmy spedycyjnej opisuje funkcja: $Z(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 - 3(x_2 - 4)^2 + 100$, gdzie: x_1 – liczba kursów w ciągu dnia środkami transportu pierwszego typu, x_2 – liczba kursów środkami transportu drugiego typu. Wiadomo ponadto, że koszty jednego kursu poszczególnymi środkami transportu wynoszą odpowiednio: 45 i 30 zł za kurs. Wyznaczyć optymalną dzienną liczbę kursów oboma środkami transportu, tak aby łączne zyski firmy były maksymalne, przy dziennych kosztach realizacji dostaw wynoszących 600 zł.
Podać optymalne dzienne zyski firmy spedycyjnej. Rozwiązać zadanie metodą czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

Zad. 8. Z elektrociepłowni energia przesyłana jest do dwóch zużywających ja zakładów produkcyjnych. Funkcja kosztów przesyłania energii do tych zakładów w zależności od wielkości przesyłania ($x_1 > 0$ - do zakładu I, $x_2 > 0$ - do zakładu II) dana jest wzorem:

$$K(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 81, \qquad K(x_1, x_2) > 0 .$$

Rozdzielić dzienną produkcję wynoszącą 16MWh pomiędzy te dwa zakłady tak, aby zminimalizować koszty przesyłania energii. Podać wysokość tych kosztów.

Zad. 9. Dwie cukrownie prowadzą kampanię cukrowniczą, której zdaniem jest przerobienie łącznie 29 760 ton buraków. Dzienny przerób pierwszej cukrowni wynosi 120, a drugiej 180 ton buraków. Wiadomo, że w trakcie kampanii cukrowniczej powstają straty cukru zależne od czasu składowania buraków, które można opisać następującą funkcją:

$$S(t_1, t_2) = 0.6t_1^2 + 12t_1 + 0.3t_2^2 + 9t_2, \qquad S(t_1, t_2) > 0$$

gdzie: $t_1 > 0$ - czas trwania kampanii w cukrowni I,
$t_2 > 0$ - czas trwania kampanii w cukrowni II.

Jak długo powinna trwać kampania cukrownicza w każdej z cukrowni, aby straty cukru były minimalne ?
W jaki sposób optymalnie rozdzielić owe 29 760 ton buraków między cukrownie ?

Zad. 10. Wielkość produkcji w pewnym zakładzie przemysłowym opisuje funkcja produkcji Cobba-Douglasa: $P(K, L) = 100 \cdot K^{0.3} \cdot L^{0.6} > 0$, gdzie: P – wielkość produkcji (w tyś szt.), K>0 – czynnik produkcji związany z nakładami kapitałowymi (w zadaniu środki trwałe - w tyś zł), L>0 – czynnik produkcji związany z nakładami pracy i potencjałem ludzkim (w zadaniu ilość przepracowanych roboczogodzin przez pracowników – w tyś roboczogodzin).
Wiadomo ponadto, że koszt jednej roboczogodziny wynosi 2 zł, zaś koszt jednostkowy stosowania środków trwałych 4 zł. Wyznaczyć takie wartości K i L aby uzyskać maksymalną wielkość produkcji przy sumarycznym koszcie całkowitym produkcji 600 tyś zł. Jak duża będzie to produkcja ?

Zad. 11. Wyznaczyć optymalne nakłady czynników produkcji $x_1, x_2 > 0$ dla wytworzenia zadanej wielkości produkcji $P_0 = 120$, przy możliwie najniższych kosztach całkowitych produkcji. Proces produkcji opisuje funkcja: $P(x_1, x_2) = 2x_1^{0.5}x_2^{0.5} > 0$, a koszty produkcji funkcja $K(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 + 10 > 0$.