BADANIA OPERACYJNE

Prowadzący:
dr Tomasz Pisula
Zakład Metod Ilościowych
e-mail: tpisula@prz.edu.pl

❑ Treści kształcenia (wykłady – 15, laboratoria - 9):

- Istota i geneza badań operacyjnych. Przedmiot i metodologia badań operacyjnych **– 1 godz.**
- Zadania programowania liniowego (wybrane liniowe problemy decyzyjne, dualizm w programowaniu liniowym, algorytm Simplex, zagadnienia transportowe) **– 2 godz., (2 godz.)**
- Programowanie nieliniowe w kontekście zadań programowania liniowego **– 1 godz., (1 godz.)**
- Zadania programowania dynamicznego (algorytm Bellmana) **– 1 godz.**
- Przykładowe problemy optymalizacji dyskretnej, metoda podziału i ograniczeń, zagadnienie komiwojażera **– 2 godz., (2 godz.)**

❑ Treści kształcenia (wykłady i ćwiczenia):

- ❑ Elementarne pojęcia teorii grafów - problemy decyzyjne w ujęciu sieciowym – 3 godz. (1 godz.)
  - programowanie sieciowe z kryterium czasu: metoda ścieżki krytycznej CPM,
  - planowanie przedsięwzięć z kryterium kosztowym,
  - planowanie w warunkach niepewności - algorytm PERT,
  - maksymalny przepływ w sieci (algorytm Forda-Fulkersona),
- ❑ Elementy programowania wielokryterialnego - 1 godz.
- ❑ Elementy teorii gier – 1 godz.
- ❑ Wybrane zagadnienia projektowania i zarzadzania systemami masowej obsługi (systemami kolejkowymi) - 1 godz.
- ❑ Praktyczne zaliczenie laboratorium – 2 godz.
- ❑ Pisemne zaliczenie wykładów – 2 godz.

❑ Efekty kształcenia - umiejętności

1. Zdobycie wiedzy:
   - o sposobach modelowania matematycznego zagadnień decyzyjnych;
   - o różnych metodach poszukiwania rozwiązań optymalnych zadań decyzyjnych.
2. Zdobycie umiejętności:
   - budowania modeli matematycznych zagadnień decyzyjnych;
   - rozwiązywania problemów decyzyjnych z wykorzystaniem właściwych technik i metod badań operacyjnych;
   - wykorzystania oprogramowania komputerowego (np. arkusza kalkulacyjnego „Excel” plus dodatek „Solver”) do rozwiązywania różnorodnych problemów decyzyjnych dotyczących problematyki zarządzania.

❑ Warunki zaliczenia przedmiotu:

1. **Zaliczenie pisemne wykładów:**
- **zaliczenie testowe (test jednokrotnego wyboru) sprawdzający opanowanie treści kształcenia omawianych na wykładach.**

2. **Praktyczne zaliczenie laboratoriów:**
- **sprawdzenie praktycznych umiejętności modelowania i rozwiązywania wybranych problemów decyzyjnych w zarządzaniu z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego „Excel" oraz modułu „Solver".**

3. **Ocena końcowa jest średnią ocen z zaliczenia testowego wykładów (z wagą 0,4) oraz zaliczenia praktycznego laboratoriów (z wagą 0,6). Obie składowe oceny muszą być pozytywne.**

❑ Literatura podstawowa wykorzystywana podczas zajęć wykładowych:

1. *Gajda J., Badania operacyjne: przykłady zastosowań, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2015.*

2. *Sikora W. (red.), Badania Operacyjne, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2008.*

3. *Trzaskalik T., Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2008.*

❑ Literatura podstawowa wykorzystywana podczas zajęć laboratoryjnych:

1. *Kukuła (red.), Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.*

❑ Literatura Uzupełniająca:

1. *Filipowicz B., Badania operacyjne. Wybrane metody obliczeniowe i algorytmy, Wydawnictwo Poldex, Kraków 1999.*
2. *Gruszczyński M., Kuszewski T., Podgórska M., Ekonometria i badania operacyjne, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2017.*
3. *Ignasiak E. (red.), Badania Operacyjne, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2001.*
4. *Kozubski J. J., Wprowadzenie do badań operacyjnych, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1999.*
5. *Siudak D., Badania operacyjne z wykorzystaniem WinQSB, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2014.*
6. *Siudak M., Badania operacyjne, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996.*
7. *Sysło M. M., Deo N., Kowalik J. S., Algorytmy optymalizacji dyskretnej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.*
8. *Wojeński J., Urich R., Badania operacyjne w praktyce menadżera, Oficyna Wydawnicza Warszawskiej Szkoły Zarządzania, Warszawa 2004.*

❑ Istota Badań Operacyjnych

Badania Operacyjne – Operational Research – Operations Research

Definicja badań operacyjnych (czym są badania operacyjne)

- **Definicja podawana przez Amerykańskie Towarzystwo Badań Operacyjnych (Operations Research Society of America ORSA) w 1990 r.**
  (1) Badania operacyjne to naukowe podejście do procesów podejmowania decyzji
  (2) Badania operacyjne koncentrują się wokół zagadnień naukowego decydowania jak najlepiej projektować i obsługiwać różnorakie systemy (np. systemy produkcyjne, transportowe, logistyczne, gromadzenia i magazynowania zasobów), zazwyczaj w warunkach wymagających wykorzystania (przydziału, alokacji) ograniczonych zasobów.

- **Brytyjskie Towarzystwo Badań Operacyjnych (British Operational Research Society) w 1962 r. definiuje badania operacyjne jako:**
  - Wykorzystanie formalnych modeli matematycznych do badania złożonych problemów decyzyjnych powstających w procesach zarządzania dużymi systemami ludzkimi, maszynowymi, materiałowymi, pieniężnymi w przemyśle, biznesie, zarządzaniu państwem oraz obronności.

PROGRAMOWANIE LINIOWE

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

1. Wyjaśnienie podstawowych pojęć:

- **Sytuacja decyzyjna:**

  - Okoliczności rozwiązywania problemu – okoliczności w jakich podejmowana jest decyzja

- **Decydent (osoba lub ciało kolegialne):**

  - podejmuje decyzję – przejmuje odpowiedzialność

  - ustala priorytety działania i hierarchę celów działania – kolejność rozwiązywania problemów (hierarchia działania, ważność stawianych celów)

  - definiuje dostępność zasobów – formułuje ograniczenia: finansowe, techniczne, personalne, surowcowe, itp.

  - nie posiada jednoznacznej odpowiedzi na pojawiające się pytania

- **Problem decyzyjny:**

  – brak racjonalnej i jednoznacznej decyzji (brak prostego i jednoznacznego wyłonienia rozwiązania problemu, uwzględniając okoliczności podejmowania decyzji)

  - trudność w wyborze optymalnej decyzji – jednej z wielu możliwych decyzji

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

- **Przykładowe problemy decyzyjne w logistyce:**

  - określenie efektywności wykorzystania transportu (problem oceny wydajności transportu)

  - ustalenie racjonalnej liczby środków transportu (problem ustalenia wielkości taboru)

  - określenie zdolności obsługowych zaplecza technicznego (problem alokacji posiadanych zasobów)

  - wyznaczenie planu przewozów (problem transportowy)

  - lokalizacja centrów logistycznych / punktów przeładunkowych (problem budowy sieci logistycznej)

  - harmonogramowanie pracy kierowców (problem przydziału pracowników do zadań)

  - wybór najlepszego dostawcy usług logistycznych (problem rankingowania rozwiązań/ wariantów)

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

- **Decyzja (wariant, rozwiązanie)**

  - skutek podjęcia działania (określone rozwiązanie)

  Przykład:

  dysponujesz 80 mln € - która decyzja jest najlepsza ?

Decyzje do podjęcia	**D1**	**D2**	**D3**
Nakłady inwestycyjne (mln €)	60	80	50
Spodziewane zyski (mln €)	6	4	2,5

  - rodzaj decyzji:

  - dopuszczalna (spełniająca założenia realności i wykonalności w danych warunkach
  - optymalna (najlepsza spośród decyzji dopuszczalnych)

- **Kryterium oceny różnych decyzji:**

  - miernik „doskonałości" (jakości) rozwiązania dopuszczalnego, tzw. funkcja celu (dla poszukiwań)

  - liczba kryteriów (jednokryterialne i wielokryterialne problemy decyzyjne)

Model matematyczny problemów decyzyjnych

- **Identyfikacja problemu decyzyjnego:**

  - dokładne zidentyfikowanie aktualnego stanu
    - rozpoznanie realizowanych działań
    - wskazanie obszaru występowania trudności

  - werbalny opis sytuacji (zaistniałego problemu)

- **Model matematyczny problemu:**

  - zapis problemu decyzyjnego w postaci matematycznej - ma na celu sprowadzenie problemu wyboru najlepszej (optymalnej) decyzji do rozwiązania pewnego jednoznacznie określonego zadania matematycznego.

  PARAMETRY:
    - wielkości znane
    - zdefiniowane a'priori
    - niezmienne podczas procesu podejmowania decyzji (rozwiązywania problemu)

  ZMIENNE DECYZYJNE:
    - wielkości nieznane
    - wielkości do ustalenia w trakcie procesu podejmowania decyzji (rozwiązywania problemu)

  - wyrażony w postaci równań i nierówności

  FUNKCJA CELU:
  - wyrażona za pomocą zmiennych decyzyjnych
  - określa kryterium wyboru rozwiązania dopuszczalnego

  OGRANICZENIA:
  - wyrażone za pomocą zmiennych decyzyjnych
  - określają dostępność (posiadanych zasobów)

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

Algorytm konstrukcji modelu matematycznego problemu decyzyjnego:

- zidentyfikować zmienne decyzyjne
  - czego poszukujemy ?
  - jakie wielkości mają być wyznaczone ?
- zidentyfikować parametry zadania
  - jakie wielkości są znane (stałe) ?
- jasno zdefiniować cel swoich poszukiwań (funkcję celu)
  - jaki cel chce osiągnąć decydent ?
- określić wszystkie ograniczenia podjęcia decyzji (warunki ograniczające)
  - co stanowi ograniczenie dla podejmowanych decyzji ?
  - co charakteryzuje się ograniczoną dostępnością ?

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

Rozwiązanie problemu - wybór najlepszej decyzji:

- problem o charakterze jednokryterialnym

(DECYZJA OPTYMALANA)

- ustalenie takiej decyzji dopuszczalnej, przy której funkcja celu osiąga wartość najkorzystniejszą (optymalną)

  minimalną
  np.: koszty eksploatacji taboru

  np.: czas przejazdu

  np.: zużycie energii elektrycznej

  maksymalną

  np.: zysk

  np.: udział w rynku,

  np.: efektywność wykorzystania taboru

❑ Model matematyczny problemów decyzyjnych

Niech:

D – oznacza zbiór dopuszczalnych decyzji,

x – dowolną decyzję,

f – funkcję celu,

to zadanie decyzyjne opisujące problem wyboru najlepszej decyzji można zapisać następująco:

Znajdź taką decyzję dopuszczalną $x^* \in D$, że

$f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in D\}$, gdy maksymalizujemy funkcję celu

$f(x^*) = \min\{f(x) \mid x \in D\}$, gdy minimalizujemy funkcję celu

Ogólna postać zadania programowania matematycznego jest zatem postaci:

$f(x_1, \ldots, x_n) \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x \in D \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x_1, \ldots, x_n) \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i ; i = 1, \ldots, m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie problemu - wybór najlepszej decyzji:

- problem o charakterze wielokryterialnym

(DECYZJA KOMPROMISOWA)

- poszukiwanie decyzji dopuszczalnej, przy której uzyskiwany jest kompromis wszystkich kryteriów (celów)

❑ Zadania programowania liniowego – postacie zadań programowania liniowego

3. Postacie zadań programowania liniowego:

Ogólna postać ZPL:

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - wektor zmiennych decyzyjnych

$c = (c_1, \dots, c_n)$ - wektor współczynników funkcji celu

$$Max(Min)\ F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_i;\ (i = 1, \dots, m) \\ x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

$b = (b_1, \dots, b_m)$ - wektor ograniczeń warunków ograniczających (występujących po prawej stronie równań i nierówności)

$A = \left[a_{i,j} \right]_{m \times n}$ - macierz współczynników warunków ograniczających (występujących po lewej stronie równań i nierówności)

❑ Zadania programowania liniowego – postacie zadań programowania liniowego

Postać standardowa ZPL:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad Min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i; \ (i = 1,\dots,m) \\ x_j \ge 0; \ (j = 1,\dots,n) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i; \ (i = 1,\dots,m) \\ x_j \ge 0; \ (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$

Postać kanoniczna ZPL:

$$Max(Min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i; \ (i = 1,\dots,m) \\ x_j \ge 0; \ (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$

w zapisie macierzowym:

$$Max(Min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = (c, x)$$

$$\begin{cases} A \cdot x^T = b^T \\ x^T \ge 0 \end{cases}$$

❑ Zadania programowania liniowego – postacie zadań programowania liniowego

Każdą postać ZPL możemy sprowadzić do postaci kanonicznej poprzez wprowadzenie zmiennych swobodnych.

Dla warunków postaci $\leq$, jeżeli i-ty warunek jest taką nierównością, wprowadzamy zmienną swobodną: $x_{n+i} \geq 0$; $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ ze współczynnikiem (+1)

np. $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ zamieniamy na warunek $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

Dla warunków postaci $\geq$, jeżeli i-ty warunek jest taką nierównością, wprowadzamy zmienną swobodną: $x_{n+i} \geq 0$; $x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i$ ze współczynnikiem (-1)

np. $7x_1 - x_2 \geq 2$ zamieniamy na warunek $7x_1 - x_2 - x_4 = 2$

Uwaga: Do funkcji celu zmienne swobodne wchodzą ze współczynnikami równymi zero, w przykładzie $c_3 = 0, c_4 = 0$.

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

4. Dualność w programowaniu liniowym:

Z każdym zadaniem PL sprzężone jest pewne inne zadanie PL, zwane **zadaniem dualnym** ZD PL.

Dla zadania pierwotnego (ZP) na maksimum w postaci standardowej:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i; \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \geq 0; \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Zadaniem dualnym ZD PL będzie zadanie:

$$Min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq c_j; \ (j = 1, \ldots, n) \\ y_i \geq 0; \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Z relacji zachodzących pomiędzy zadaniem ZP (pierwotnym) i ZD (zadaniem dualnym) wynika, że:

- w zadaniu dualnym jest tyle zmiennych, ile warunków w zadaniu pierwotnym (każdemu warunkowi odpowiada jedna zmienna)
- w zadaniu dualnym jest tyle warunków, ile zmiennych w zadaniu pierwotnym
- wagi funkcji celu zadania pierwotnego są wyrazami wolnymi (prawymi ograniczeniami warunków) w zadaniu dualnym
- wyrazy wolne zadania pierwotnego są wagami funkcji celu w zadaniu dualnym
- macierz współczynników zadania dualnego jest transpozycją macierzy współczynników zadania pierwotnego
- jeżeli zadanie pierwotne jest ma maksimum, to zadanie dualne jest na minimum (i odwrotnie)

Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Stosuje się także następujące dodatkowe reguły tworzenia zadania dualnego:

- jeżeli z ZP i-ty warunek jest równością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym nie ma ograniczeń (przyjmuje dowolne wartości)
- jeżeli z ZP i-ty warunek jest typową nierównością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym jest nieujemna
- jeżeli z ZP i-ty warunek jest nietypową nierównością, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym jest niedodatnia ($y_i \leq 0$)
- jeżeli w ZP na zmienną x_j nie nałożono ograniczeń, to j-ty warunek w ZD jest równością
- jeżeli w ZP zmienna $x_j \geq 0$ (jest nieujemna), to j-ty warunek w ZD jest typową nierównością
- jeżeli w ZP zmienna $x_j \leq 0$ (jest niedodatnia), to j-ty warunek w ZD jest nietypową nierównością

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

5. Twierdzenia o Dualności:

Twierdzenie 1 (o istnieniu)

Jeżeli ZP i ZD mają rozwiązania dopuszczalne, to oba mają rozwiązania optymalne. Jeżeli natomiast chociaż jedno z nich nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to obydwa nie mają rozwiązań dopuszczalnych.

Twierdzenie 2

Jeżeli $x_1,\dots,x_n$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania pierwotnego, a $y_1,\dots,y_m$ rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego, to pomiędzy wartościami funkcji celu zachodzi nierówność:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Dla rozwiązań dopuszczalnych wartość funkcji celu ZP nie może być większa od wartości funkcji celu ZD

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Twierdzenie 3 (o optymalności)

Jeżeli istnieją dwa takie rozwiązania dopuszczalne $x_1^*, \ldots, x_n^*$ (ZP) i $y_1^*, \ldots, y_m^*$ (ZD), że

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*,$$

to obydwa rozwiązania są rozwiązaniami optymalnymi.

Twierdzenie 4 (o równowadze)

Jeżeli $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania pierwotnego oraz $y_1, \ldots, y_m$ rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego, to aby te rozwiązania były rozwiązaniami optymalnymi wystarcza, że spełniane będą następujące warunki:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i > c_j \Rightarrow x_j = 0$

(3) $y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

(4) $x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Zadania programowania liniowego – idea metody simpleks

6. Algorytm metody Simpleks:

Metoda simpleks jest podstawową metodą znajdowania optymalnych rozwiązań zadań programowania liniowego. Jest to metoda ogólna, pozwalająca rozwiązać każde zadanie PL.

Polega ona na sekwencyjnym (ściśle określonym - ukierunkowanym przeglądzie tzw. rozwiązań bazowych)

Rozwiązanie bazowe jest związane z postacią kanoniczną zadania PL.

$$Max(Min)\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

gdzie:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ - wektor zmiennych decyzyjnych (w zapisie kolumnowym),

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ - wektor prawych ograniczeń w warunkach

$c = [c_1 \quad ,\dots, \quad c_n]$ - wektor współczynników funkcji celu (w zapisie wierszowym)

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ - macierz współczynników warunków ograniczających po prawej stronie równości

Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Niech B oznacza **bazę**, czyli macierz kwadratową m-tego stopnia składającą się z m - liniowo niezależnych kolumn macierzy A ($\det(B) \neq 0$).

Jej kolumny nazywa się kolumnami bazowymi, zaś pozostałe kolumny macierzy A nie bazowymi. Zmienne związane z kolumnami bazowymi nazywamy zmiennymi bazowymi, zaś pozostałe nie bazowymi.

Oznaczmy przez Z_B - zbiór zmiennych bazowych, zaś przez Z_N - zbiór zmiennych nie bazowych.

Z każdą bazą **B** układu równań $Ax = b$ jest związane rozwiązanie bazowe. Jeżeli układ Ax=b jest niesprzeczny oraz n>m, to układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań, ale skończoną liczbę rozwiązań bazowych. Dla m – równań z n – niewiadomymi ma co najwyżej $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Wektor zmiennych decyzyjnych oraz macierz współczynników można przedstawić teraz przy zadanej bazie B następująco: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B, N)$

Wówczas układ równań $Ax = b$ zapiszemy w postaci: $B \cdot x_B + N \cdot x_N = b$

Mnożąc lewostronnie przez macierz B^{-1}, otrzymujemy postać bazową: $I \cdot x_B + W \cdot x_N = b^*$

gdzie: $I = B^{-1} \cdot B$, $W = B^{-1} \cdot N$, $b^* = B^{-1} \cdot b$

Z postaci bazowej łatwo wyznaczyć rozwiązanie bazowe: $x_N = 0, x_B = b^* = B^{-1} \cdot b$.

Jeżeli dla danej bazy B: $x_B = b^* = B^{-1} \cdot b \geq 0$, to rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem dopuszczalnym.

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Idea metody simpleks:

Zastosowanie podejścia pełnego przeglądu zbioru rozwiązań bazowych jest nieefektywne ze względu na liczbę tych rozwiązań oraz ze względu na wielkość układu równań jaki należy przekształcać.

Jeżeli n=20 i m=10, to rozwiązań bazowych może być: $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184756$

W metodzie simpleks stosujemy przegląd ukierunkowany zbioru rozwiązań bazowych. Przechodzimy od jednego rozwiązania bazowego dopuszczalnego do drugiego, o którym wiemy, że jest nie gorsze od poprzedniego (pomijając niedopuszczalne i te gorsze od aktualnie rozpatrywanego).

Przegląd ukierunkowany sprowadza się do realizacji następujących kroków (jeżeli zadanie ma rozwiązanie optymalne)

Krok A: Wyznaczyć rozwiązanie wejściowe – dopuszczalne i bazowe

Krok B: Sprawdzić, czy aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne. Jeżeli tak, to koniec obliczeń, jeżeli nie, to przejście do kroku C

Krok C: Przejść do sąsiedniego rozwiązania bazowego, o którym wiadomo, że jest nie gorsze od poprzedniego i powrót do kroku B.

Dwie bazy nazywamy sąsiednimi jeżeli różnią się tylko jedną kolumną macierzy **A**. Podobnie dwa rozwiązania bazowe nazywamy sąsiednimi, jeżeli różnią się tylko jedną zmienną bazową.

W sensie rachunkowym przechodzenie od jednego rozwiązania bazowego do drugiego sąsiedniego polega na przekształcaniu układu równań: $I \cdot x_B + W \cdot x_N = b^*$ od jednej postaci bazowej do drugiej. Najlepiej, gdy początkowa postać kanoniczna jest także postacią bazową.

❑ Zadania programowania liniowego – dualność w programowaniu liniowym

Początkowe rozwiązanie bazowe:

Punktem wyjścia metody simpleks jest uzyskanie początkowego rozwiązania bazowego. W tym celu należy przekształcić je do postaci bazowej z nieujemnym wektorem wyrazów wolnych **b**. Przyjmując, że zmienne bazowe są związane z wektorami jednostkowymi uzyskamy bardzo łatwo początkowe rozwiązanie bazowe: $x_B = b^* = B^{-1} \cdot b = I^{-1} \cdot b = b, \;\; x_N = 0$.

Jeżeli i-te prawe ograniczenie jest ujemne, to można przemnożyć obustronnie to równanie (warunek) przez (-1).

Gdy macierz współczynników postaci kanonicznej nie zawiera macierzy jednostkowej, którą można uznać jako bazę, to możemy:

(1) tak przekształcić układ równań (stosując reguły eliminacji Gaussa), aby zawierał on macierz jednostkową

(2) albo sztucznie utworzyć taką macierz, uzupełniając macierz współczynników **A** o odpowiednią liczbę brakujących wektorów jednostkowych – co często jest praktyczniejsze – jest to tzw. metoda sztucznej bazy (rozszerzamy wtedy listę zmiennych decyzyjnych o tzw. zmienne sztuczne).

Uwaga:

- Waga przy zmiennej sztucznej w funkcji celu jest taka, że nieopłacalne jest pozostawienie jej w rozwiązaniu optymalnym (duża liczba dodatnia dla minimum lub ujemna i duża co do modułu dla zadania na maksimum)

- Optymalne rozwiązanie zadania ze zmiennymi sztucznymi (pomocniczego) wyznacza optymalne rozwiązanie zadania początkowego, jeśli tylko wszystkie zmienne sztuczne są w rozwiązaniu optymalnym zerowe.

- jeżeli choć jedna zmienna sztuczna jest dodatnia, to początkowe rozwiązanie jest sprzeczne.

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Zadanie ZPL (przykład)

Przedsiębiorstwo transportowe dysponuje 10 ciężarówkami o ładowności 10[t]. Klient zlecił przedsiębiorstwu przewóz 66 ton ładunków w opakowaniach po 3[t] oraz 20 ton ładunków w opakowaniach po 2[t].

W jaki sposób należy załadować towar na ciężarówki, aby zrealizować zamówienie klienta, minimalizując łączną niewykorzystaną ładowność ciężarówek niezbędnych do przewozu towarów ?

Sposoby załadunku	(1)	(2)	(3)	(4)
ładunek – opakowania 3[t]	3	2	1	0
ładunek – opakowania 2[t]	0	2	3	5
Niewykorzystana ładowność [t]	1	0	1	0

Model matematyczny – problemu decyzyjnego:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=1\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4\rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4\le 10 \\ 3\cdot(3\cdot x_1+2\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4)=66 \\ 2\cdot(0\cdot x_1+2\cdot x_2+3\cdot x_3+5\cdot x_4)=20 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4\le 10 \\ 9\cdot x_1+6\cdot x_2+3\cdot x_3+0\cdot x_4=66 \\ 0\cdot x_1+4\cdot x_2+6\cdot x_3+10\cdot x_4=20 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0 \end{cases}$$

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Postać kanoniczna:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 9\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 66 \\ 0\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 + 10\cdot x_4 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Postać kanoniczna – bazowa, po wprowadzeniu zmiennych sztucznych:

Wprowadzamy 2 zmienne sztuczne (dla których oczekujemy wartości zerowej) $x_6 = 0$ oraz $x_7 = 0$ ze współczynnikami $c_6 = M$ oraz $c_7 = M$, $M > 0$ $(M \to \infty)$ - dla zadania na minimum.

Gdyby zadanie ZPL było na maksimum, to $c_6 = -M, c_7 = -M$.

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + M\cdot x_6 + M\cdot x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 1\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_7 = 10 \\ 9\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 1\cdot x_6 + 0\cdot x_7 = 66 \\ 0\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 + 10\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 1\cdot x_7 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Algorytm metody Simpleks:

Krok A – znaleźć początkowe rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Krok B – sprawdzić optymalność aktualnego rozwiązania bazowego

- Jeżeli aktualne bazowe jest optymalne, to **koniec obliczeń**
- Jeżeli nie to przejść do **kroku C**

Krok C – Wyznaczyć sąsiednie nie gorsze od poprzedniego rozwiązanie bazowe

Powrót do - **Kroku B**

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Krok A

Pierwsze – początkowe rozwiązanie bazowe:

Macierz współczynników w warunkach ograniczających:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pierwsza baza: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zmienne bazowe: $x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$, Zmienne niebazowe: $x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Pierwsze rozwiązanie bazowe:

$$x_N = 0,\ x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = b^* = b = \begin{bmatrix} 10 \\ 66 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Krok B

Sprawdzenie optymalności aktualnego rozwiązania bazowego:

Sprawdzanie optymalności aktualnego rozwiązania bazowego oraz tworzenie kolejnych rozwiązań bazowych dopuszczalnych wygodnie jest zilustrować tzw. Tablicą simpleksową.

Pierwsza tablica simpleksowa: $T^{(1)} = \left[t_{ij}\right]_{i=0,\dots,m;\, j=0,\dots,n}$

c_j		1	0	1	0	0	M	M	Kolumna tablicy simpleksowej dla wyrazów wolnych (zerowa) $b_i^* = t_{i,0}$
$c_B = c_j, j \in Z_B$	Zmienne Bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
		Elementy tablicy simpleksowej $t_{i,j}, i \in 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$							
0	x_5	1	1	1	1	1	0	0	10
M	x_6	9	6	3	0	0	1	0	66
M	x_7	0	4	6	10	0	0	1	20
$z_j = \sum_{i \in Z_B} c_i \cdot t_{i,j}$		$z_1 = 0 \cdot 1 + M \cdot 9 + M \cdot 0 = 9M$	$10M$	$9M$	$10M$	0	M	M	$F(x) =$
Wiersz (zerowy) tablicy simpleksowej **kryterium optymalności** $t_{0,j} = c_j - z_j, j = 1,\dots,n$		$-9M+1$	$-10M$	$-9M+1$	$-10M$	0	0	0	$x_0 = 0 \cdot 10 + M \cdot 66 + M \cdot 20 = 86M$

Simpleksowe kryterium optymalności:

1. Dla zadania z funkcją celu postaci **maksimum**:

dla każdego $j \in Z_N$, $t_{0,j} \le 0$

2. Dla zadania z funkcją celu postaci **minimum**:

dla każdego $j \in Z_N$, $t_{0,j} \ge 0$

Dla naszego zadania wszystkie współczynniki optymalności są ujemne, więc początkowe rozwiązanie bazowe nie jest optymalne.

Należy zatem przejść do **kroku (C)** - ustalić którą zmienną z aktualnych niebazowych należy do bazy wprowadzić, aby poprawić aktualne rozwiązanie, a którą z aktualnej bazy usunąć.

O tym mówi tzw. simpleksowe **kryterium wejścia** do bazy i **kryterium wyjścia** z bazy.

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Poprawa aktualnego rozwiązania bazowego – wyznaczenie sąsiedniego rozwiązania bazowego dopuszczalnego, które jest nie gorsze od aktualnego

Kryterium wejścia:

Do bazy należy wprowadzić, taką zmienną z niebazowych, dla której:

1. Dla zadania na **maksimum** zachodzi warunek: $t_{0,k} = \max\{t_{0,j}, j \in Z_N\}$
2. Dla zadania **na minimum** zachodzi warunek: $t_{0,k} = \min\{t_{0,j}, j \in Z_N\}$

Dla naszego zadania należy wprowadzić albo zmienną x_2 albo x_4 (wprowadzamy x_2, gdyż jest to zmienna właściwa, a nie bilansująca zmienna swobodna jak x_4).

$$t_{0,2} = t_{0,4} = \min\{-9M+1, -10M, -9M+1, -10M\} = -10M$$

$k = 2$ - kolumna 2 staje się tzw. kolumną centralną tablicy simpleksowej

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Kryterium wyjścia:

Z aktualnej bazy należy usunąć tę zmienną, dla której:

$$\frac{t_{r,0}}{t_{r,k}} = \min\left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}; t_{i,k} > 0\right\}$$

Dla naszego zadania $\min\left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,k}}; t_{i,k} > 0\right\} = \min\left\{\frac{10}{1}, \frac{66}{6}, \frac{20}{4}\right\} = 5$, dla $r = 3$, a więc dla trzeciej aktualnie zmiennej bazowej: x_7, którą z bazy należy usunąć

$t_{r,k} = t_{3,2}$ - staje się tzw. elementem centralnym (ważnym dla dalszych przekształceń tablicy simpleksowej) przy wyznaczaniu nowego poprawionego rozwiązania bazowego.

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Przekształcenia tablicy simpleksowej w celu uzyskania nowego - lepszego rozwiązania bazowego.

$T'_{i,j} = \left[t'_{i,j}\right]_{i=1,\dots,m;j=0,\dots,n}$ - jest nową tablicą simpleksową

- $t'_{r,j} = \dfrac{t_{r,j}}{t_{r,k}}; j = 0,\dots,n$ - dla wiersza odpowiadającego wierszowi centralnemu, czyli dla zmiennej wyprowadzanej z aktualnej bazy
- $t'_{i,j} = t_{i,j} - t_{i,k} \cdot t'_{r,j}; i \neq r; j = 0,\dots,n$ - dla wierszy pozostałych

Dla naszego zadania: element centralny $t_{3,2} = 4$

$$t'_{3,j} = \left[\begin{matrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & | \, 5 \end{matrix}\right]$$

$$t'_{1,j} = \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & | \, 10 \end{matrix}\right] - 1 \cdot \left[\begin{matrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & | \, 5 \end{matrix}\right] =$$

$$= \left[\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -1 & | \, 5 \end{matrix}\right]$$

$$t'_{2,j} = \left[\begin{matrix} 9 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & | \, 66 \end{matrix}\right] - 6 \cdot \left[\begin{matrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & | \, 5 \end{matrix}\right] =$$

$$= \left[\begin{matrix} 9 & 0 & -6 & -15 & 0 & 1 & -6 & | \, 36 \end{matrix}\right]$$

Druga tablica simpleksowa: $T^{(2)}$

c_j		1	0	1	0	0	M	M	
$c_B = c_j, j \in Z_B$	Zmienne Bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$b_i^* = t_{i,0}$
		Elementy tablicy simpleksowej $t_{i,j}, i \in 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$							
0	x_5	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	-1	5
M	x_6	9	0	-6	-15	0	1	-6	36
0	x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	5
$z_j = \sum_{i \in Z_B} c_i \cdot t_{i,j}$		$9M$	0	$-6M$	$-15M$	0	M	$-6M$	$F(x) =$
$t_{0,j} = c_j - z_j$		$-9M+1$	0	$6M+1$	$15M$	0	0	$7M$	$x_0 = 36M$

Drugie rozwiązanie bazowe:

$$x_N = 0,\ x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix} = b^* = b = \begin{bmatrix} 5 \\ 36 \\ 5 \end{bmatrix} \quad f(x) = 0 \cdot 5 + M \cdot 36 + M \cdot 5 = 41M$$

Kryterium optymalności: istnieje jeszcze jeden współczynnik $t_{0,1}$, dla zmiennej niebazowej x_1, który jest ujemny, zatem aktualne rozwiązanie dalej nie jest optymalne.

Zastosowanie kryterium wejścia:

Tę zmienną: x_1 - należy zatem wprowadzić do bazy – zgodnie z kryterium wejścia

Zastosowanie kryterium wyjścia:

$$\frac{t_{r,0}}{t_{r,1}} = \min\left\{\frac{5}{1}, \frac{36}{9}\right\} = 4$$ - z bazy usuwamy r=2 drugą zmienną bazową: x_6

❑ Zadania programowania liniowego – algorytm metody simpleks

Nowe – trzecie rozwiązanie bazowe

dla naszego zadania - element centralny: $t_{2,1} = 9$

$$t'_{2,j} = \left[1 \quad 0 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{9} \quad -\frac{2}{3} \quad | \, 4\right]$$

$$t'_{1,j} = \left[1 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad | \, 5\right] - 1 \cdot \left[1 \quad 0 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{9} \quad -\frac{2}{3} \quad | \, 4\right] =$$

$$= \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad 1 \quad -\frac{1}{9} \quad -\frac{1}{3} \quad | \, 1\right]$$

$$t'_{3,j} = \left[1 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \, 5\right] - 0 \cdot \left[1 \quad 0 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{9} \quad -\frac{2}{3} \quad | \, 4\right] =$$

$$= \left[1 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \, 5\right]$$

Trzecia tablica simpleksowa: $T^{(3)}$

c_j		1	0	1	0	0	M	M	$b_i^* = t_{i,0}$
$c_B = c_j, j \in Z_B$	Zmienne Bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
		Elementy tablicy simpleksowej $t_{i,j}, i \in 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$							
0	x_5	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	1
1	x_1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$	4
0	x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	5
$z_j = \sum_{i \in Z_B} c_i \cdot t_{i,j}$		1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$F(x) =$
$t_{0,j} = c_j - z_j$		0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$M - \frac{1}{9}$	$M + \frac{2}{3}$	$x_0 = 4$

Trzecie rozwiązanie bazowe:

$$x_N = 0,\ x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = b^* = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad f(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 4$$

Sprawdzenie kryterium optymalności:

wszystkie współczynniki $t_{0,j}, j \in Z_N$, dla zmiennych niebazowych, zatem aktualne rozwiązanie jest **optymalne**.

Należy zatem wysłać 4 samochody załadowane sposobem pierwszym oraz 5 załadowanych sposobem drugim, aby zrealizować zamówienie klienta, przy minimalnej niewykorzystanej ładowności środków transportu wynoszącej 4 [tony].