ZAGADNIENIA

OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Ogólny problemem optymalizacji nieliniowej (programowaniem nieliniowym) nazywamy zadanie decyzyjne postaci:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max(\min)$$

$$(1)\quad \begin{cases} g^j(x_1,\ldots,x_n) - c_j \le 0 \ \text{ dla } \ (j=1,\ldots,r); \\ g^j(x_1,\ldots,x_n) - c_j = 0 \ \text{ dla } \ (j=r+1,\ldots,m); \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0. \end{cases}$$

gdy funkcja celu $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$, lub chociaż jeden z warunków ograniczających: $g^j(x) = g^j(x_1,\ldots,x_n)$ jest **funkcją nieliniową**.

Jeżeli w zadaniu (1) warunki ograniczające nie występują, a funkcja celu jest postaci nieliniowej, to zadanie takie nosi nazwę optymalizacji bezwarunkowej (problemu bez ograniczeń).

Zakładamy, że funkcje: f, g^j - są funkcjami ciągłymi.

Niech $D \subset R^n$ będzie zbiorem wypukłym, funkcję o wartościach rzeczywistych nazywamy funkcją wypukłą w zbiorze D, jeżeli dla dowolnych $x^1, x^2 \in D$ oraz dowolnego $\alpha \in [0,1]$ zachodzi nierówność:

$$f\left[\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right] \le \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2)$$

Jeżeli $x^1 \ne x^2$ i $\alpha \in (0,1)$ oraz spełniona jest nierówność:

$f\left[\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right] < \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2)$, to funkcję f – nazywamy ściśle wypukłą

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wklęsłą jeśli funkcja $-f(x)$ - jest wypukła (i odwrotnie).

Funkcja $f(x)$ jest funkcją ściśle wklęsłą jeśli funkcja $-f(x)$ - jest ściśle wypukła (i na odwrót).

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Załóżmy, że funkcja f – jest różniczkowalna w R^n, wektor $\nabla f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$ - nazywa się gradientem funkcji f w punkcie x_0 - wskazuje kierunek, w którym przyrost wartości funkcji jest największy.

Załóżmy, że funkcja f – jest dwukrotnie różniczkowalna w R^n, to macierz:

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$ - nazywa się Hesjanem funkcji

Funkcja jest wypukła w otwartym (niezawierającym punktów brzegowych) zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$ - Hesjan jest nieujemnie określony.

Funkcja jest ściśle wypukła w otwartym (niezawierającym punktów brzegowych) zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$ - Hesjan jest dodatnio określony.

Macierz kwadratową $A = \left[a_{i,j}\right]_{n \times n}$, nazywamy dodatnio określoną, gdy: $M_1 = a_{11} > 0$,

$$M_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \ldots, M_n = \det\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{12} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} > 0$$

Macierz nazywamy ujemnie określoną, gdy: $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \ldots$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Problemy optymalizacji nieliniowej dzielimy ogólnie na:

- problemy programowania wypukłego
  - Minimalizacja funkcji celu wypukłej, lub maksymalizacja funkcji celu wklęsłej
  - zbiór warunków ograniczających jest zbiorem wypukłym

  Niech funkcje: $f, g^j; j=1,..,m_1, h^j; j=1,...,m_2$ - są funkcjami wypukłymi, wtedy można udowodnić, że zbiory ograniczone warunkami: $g^j(x_1,...,x_n)-c_j \le 0$ oraz $h^j(x_1,...,x_n)-c_j=0$ są zbiorami wypukłymi. Ponieważ część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więc zadania programowania wypukłego przyjmują postać:

  $$f(x_1,...,x_n) \to \min$$

  lub

  $$-f(x_1,...,x_n) \to \max$$

  Przy warunkach:

  $$\begin{cases} g^j(x_1,...,x_n) \le 0 \ \text{ dla } \ (j=1,...,m_1); \\ h^j(x_1,...,x_n)=0 \ \text{ dla } \ (j=1,...,m_2); \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ... x_n \ge 0. \end{cases}$$

- problemy programowania niewypukłego

  problemy decyzyjne nieliniowe, które niespełnianą warunków programowania wypukłego nazywamy zadaniami programowania niewypukłego

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Szczególnym przypadkiem zadań programowania wypukłego jest programowanie kwadratowe.

Zakłada on, że funkcja celu jest wypukłą funkcją kwadratową, zaś funkcje $g^j(x_1,...,x_n)$ z warunków ograniczających są funkcjami liniowymi (a więc tworzą obszar wypukły).

Zadanie programowania kwadratowego przyjmuje postać:

$$cx + \frac{1}{2}x^T E x \to \min$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

gdzie:

$x = [x_1,...,x_n]^T$ - wektor kolumnowy zmiennych decyzyjnych

$c = [c_1,...,c_n]$ - wektor wierszowy współczynników funkcji celu składnika liniowego

$b = [b_1,...,b_m]^T$ - wektor kolumnowy wyrazów wolnych

$A = [a_{i,j}]_{n \times m}$ - macierz współczynników warunków (po lewej stronie warunków),

$E = [e_{i,j}]_{n \times n}$ - macierz ujemnie określona – współczynników składnika kwadratowego (co gwarantuje wypukłość składnika kwadratowego funkcji celu)

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Dla zadań optymalizacji nieliniowej w postaci kanonicznej (warunki ograniczające w postaci równości) możemy w ogólnym przypadku zastosować metodę tzw. czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

W metodzie tej zamiast poszukiwać ekstremum warunkowego postaci:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max(\min)$$

$$(2)\quad \begin{cases} g^j(x_1,\ldots,x_n) - c_j = 0 \quad \text{dla} \quad (j = 1,\ldots,m); \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0. \end{cases}$$

poszukujemy ekstremum bezwarunkowego dla tzw. funkcji Lagrange'a utworzonej w oparciu o wyjściową funkcje celu f(X) poprzez włączenie do tej funkcji warunków ograniczających z odpowiednimi (sztucznie wprowadzonymi) czynnikami nieoznaczonymi (zakładamy, że $m<n$).

Dla zadania programowania nieliniowego w postaci kanonicznej (2) funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(X;\lambda) = L(x_1,\ldots,x_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n)\right]$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego zadania jest następujący: zerowanie się pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a:

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n) = 0; \quad \text{dla} \quad (j = 1,\ldots,m); \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i} = 0; \quad \text{dla} \quad (i = 1,2,\ldots,n); \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) w postaci kanonicznej jest następujący:

$$L = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n) \right]$$ **- Funkcja Lagrange'a (m<n)**

Hesjan obrzeżony

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^m & g_2^m & \cdots & g_n^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^m & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

gdzie: $g_i^j = \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i}; L_{pq} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_q \partial x_p}$

$|\overline{H}_2|$

Dla maksimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby $|\overline{H}_{m+1}|, |\overline{H}_{m+2}|, \ldots, |\overline{H}_n| = |\overline{H}|$ **zmieniały znak (dla** $|\overline{H}_{m+1}|$ **znak taki jak** $(-1)^{m+1}$ **)**

Dla minimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby miały one ten sam znak (i to taki jak dla $(-1)^m$ **)**

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 2

Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch rodzajów bocznic: własnej i dzierżawionej od PKP.

Koszty (w tys. zł) związane z postojem wagonów na bocznicach wyraża następująca funkcja kosztów:

$$f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2$$

gdzie:

t_1 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy własnej,

t_2 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy PKP.

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa maja w swym składzie 100 wagonów.

Dzienna zdolność przeładunkowa bocznicy własnej wynosi 10 wagonów, a bocznicy PKP 20 wagonów.

– Jak rozdzielić wagony pomiędzy bocznice, aby koszt postojowego był możliwie najniższy ?
– Podać koszt postojowego przy optymalnym rozdzieleniu wagonów pomiędzy obie bocznice.
  Uwaga: zakładamy, że z wyładowanych wagonów formułuje się skład, który może odejść dopiero wtedy, gdy wszystkie wagony są opróżnione. Tym samym postojowe liczy się do momentu wyładunku ostatniego wagonu na każdej z bocznic.
– Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek wagonów na bocznicy własnej a ile na PKP ?

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Matematyczny model problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne: $t_1, t_2 \geq 0$

Funkcja celu: $f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2 \rightarrow \min$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10t_1 + 20t_2 = 100 \Leftrightarrow g(t_1, t_2) = t_1 + 2t_2 = 10 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja Lagrange'a:

$$F(t_1, t_2, \lambda) = f(t_1, t_2) + \lambda\left[10 - t_1 - 2t_2\right] \rightarrow \min$$

Pochodne cząstkowe z funkcji Lagrange'a względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - t_1 - 2t_2, \quad \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0,5t_1 + 3 - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial t_2} = t_2 + 4 - 2\lambda$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - t_1 - 2t_2 = 0 \\ 0,5t_1 + 3 - \lambda = 0 \\ t_2 + 4 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 4 \\ \lambda_1^* = 4 \end{cases}$$

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki dostateczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}(0{,}5t_1 + 3 - \lambda) = 0{,}5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(0{,}5t_1 + 3 - \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_1}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial t_2} = 2$$

Hesjan obrzeżony:

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0{,}5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dla zadania **na minimum** z $m = 1$ warunkami ograniczającymi wymagane jest, aby tylko jeden minor $|H_2| = |H|$ równy wyznacznikowi głównemu miał znak taki jak $(-1)^m = -1 < 0$.

Łatwo sprawdzić że wartość wyznacznika (obliczona np. stosując rozwinięcie Laplace'a względem 1 wiersza wynosi):

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0{,}5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (0 - 2 \cdot 0{,}5) = -1 - 2 = -3 < 0$$

LINIOWE MODELE OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Istnieje bardzo wiele sytuacji decyzyjnych, których nie możemy opisać używając tylko wyłącznie zmiennych ciągłych.

Wynika to z nieciągłości pewnych rozważanych procesów ekonomicznych:

- pracownika można przydzielić tylko do jednego z kilku dostępnych stanowisk pracy;
- projekt inwestycyjny będzie przyjmowany do realizacji lub nie;
- zakład produkcyjny będzie lokalizowany w jednym z możliwych punktów lokalizacji lub też nie;

We wszystkich przytoczonych sytuacjach decyzyjnych wymagamy, aby wszystkie (lub choć jedna zmienna decyzyjna), spośród tych które mamy wyznaczyć przyjmowały wartości tzw. ***dyskretne*** (np. ze zbioru liczb całkowitych: $x \in Z$, lub ze zbioru liczb binarnych: $x \in \{0,1\}$).

Zagadnienia decyzyjne, w których przynajmniej jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości dyskretne nazywamy – ***dyskretnym zagadnieniem decyzyjnym***, a ich matematyczne modele – ***dyskretnym zadaniem decyzyjnym*** (DZD).

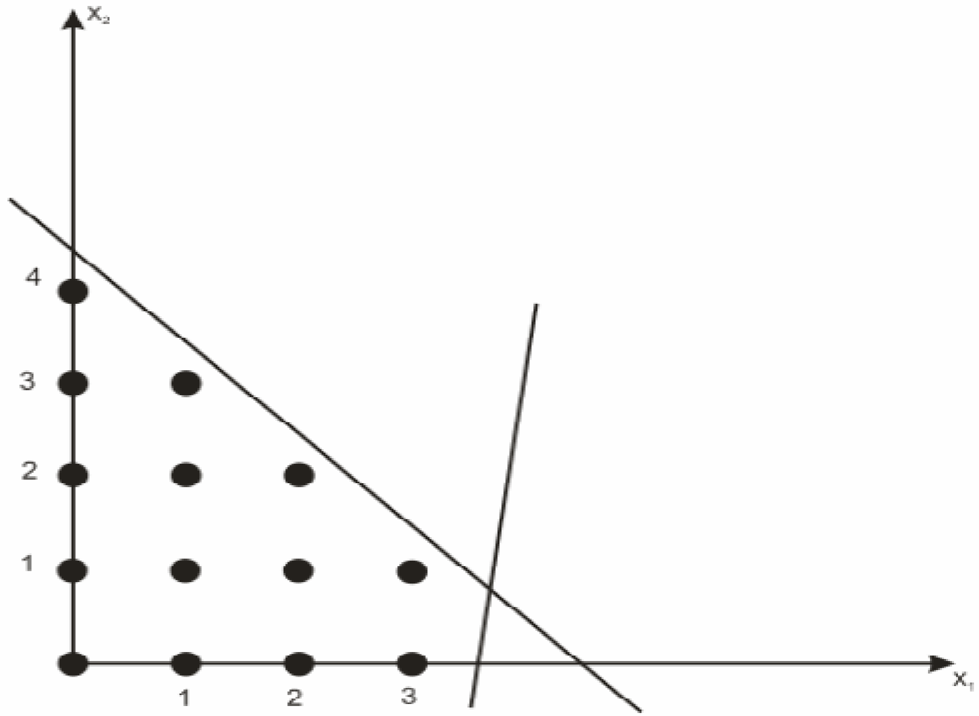
❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Interesować nas będą obecnie tylko takie dyskretne problemy decyzyjne, w których zarówno funkcja celu jak i warunki ograniczające są postaci liniowej – ***zadania programowania dyskretnego - liniowego*** (PDL). Wśród tego typu zadań wyróżnia się trzy podstawowe grupy:

- zadania ***programowania całkowitoliczbowego - liniowego*** (PCL)
- zadania ***programowania binarnego – liniowego*** (PBL)
- zadania ***programowania mieszanego – liniowego*** (PML)

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych „*D*" zadania programowania dyskretnego – liniowego jest zawsze zbiorem niespójnym (np. dla zadania programowania całkowitoliczbowego z dwoma zmiennymi - będzie to zbiór punktów o współrzędnych całkowitych znajdujących się w pewnym wieloboku). Nieciągłość zmiennych decyzyjnych powoduje, że zadania tego typu są trudniejsze do rozwiązania, niż zwykłe zadania programowania liniowego.



❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

- **Zagadnienie optymalnego przydziału**

Istnieje możliwość obsadzenia „n" – stanowisk roboczych (i = 1,2,...,n) przez „n" – osób (pracowników) (j = 1,2,...,n). Znane są efekty pracy j – tego robotnika na i – tym stanowisku pracy (macierz efektów pracy - $W_{i,j} = [w_{i,j}]_{i,j=1,2,...,n}$).

Efekty te mogą być oceniane pozytywnie (wydajność pracy, wartość produkcji w przeliczeniu na jednostkę czasu) lub negatywnie (liczba braków, czas wykonania pracy, koszty związane z pracą).

Należy dokonać takiego przydziału pracowników do poszczególnych stanowisk pracy, tak aby zminimalizować negatywne lub zmaksymalizować pozytywne efekty pracy dla całego zespołu (zakładu pracy).

Zakłada się ponadto, że każde stanowisko pracy może być obsadzone tylko przez jednego pracownika, a tym samym każdy pracownik może pracować tylko na jednym stanowisku.

Oznaczenia:

Oznaczmy przez $X_{i,j} = [x_{i,j}]_{i,j} = 1,2,...,n$ - macierz zmiennych decyzyjnych, która jest postaci:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{gdy j - ty pracownik jest przydzielony do i - tego stanowiska} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Model matematyczny:

Problem ten można przedstawić za pomocą następującego liniowego zadania programowania binarnego (PBL):

(funkcja celu)

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \cdot x_{i,j} \to \max(\min)$$

(warunki ograniczające)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

(każde stanowisko jest obsadzone tylko przez 1 pracownika)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$$

(każdy pracownik jest przydzielony tylko do 1 stanowiska)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{i, j=1,2,...,n.}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne (tym samym optymalne) to macierze postaci (dla n=5):

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie jest tylko jedna jedynka).

Zadanie optymalnego przydziału, mimo że jest klasycznym problemem **programowania dyskretnego**, to może być rozwiązane metodami programowania liniowego – **algorytmem simpleks** (co jest bardzo pracochłonne). Istnieje jednak stosunkowo prosty i skuteczny algorytm postępowania – **algorytm węgierski** (oparty na twierdzeniu węgierskiego matematyka - **Denesa Königa**), który można zastosować do rozwiązywania zadań optymalnego przydziału.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Przykład: W pewnym magazynie pracuje 3 pracowników magazynowych: P1, P2, P3, którzy mogą wykonywać 4 rodzaje zadań: Z1, Z2, Z3, Z4, z różną wydajnością. W tabeli poniżej podana jest wydajność pracowników przy wykonywaniu poszczególnych zadań:

Pracownicy	Wydajność pracowników (szt./godz.) przy wykonywaniu zadań magazynowych			
	Z1	Z2	Z3	Z4
P1	15	4	5	2
P2	3	6	3	10
P3	12	4	6	3

Zakładając specjalizację w ciągu dnia pracowników przy wykonywaniu tylko jednego zadania, przydzielić zadania poszczególnym pracownikom, tak aby zmaksymalizować łączną wydajność ich pracy.

Ponieważ w problemie optymalnego przydziału zakłada się, że liczba stanowisk pracy jest taka sama jak liczba pracowników, to w naszym przykładzie musimy wprowadzić czwartego fikcyjnego pracownika. Oczywiście wydajność jego pracy dla poszczególnych zadań będzie równa 0.

Macierz wydajności pracy (współczynników funkcji celu) jest więc postaci:

$$W = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \\ 12 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Matematyczny model zadania:

$$F(x_{i,j}) = 15x_{1,1} + 4x_{1,2} + 5x_{1,3} + 2x_{1,4} + 3x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3} + 10x_{2,4} + \\ + 12x_{3,1} + 4x_{3,2} + 6x_{3,3} + 3x_{3,4} \to \max$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} & = & 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & = & 1 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} & = & 1 \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} & = & 1 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} & = & 1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} & = & 1 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} & = & 1 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_{i,j} = 0 \;\text{ lub }\; x_{i,j} = 1; \\ i, j = 1,\ldots,4; \end{array}$$

Rozwiążemy zadanie korzystając z wersji algorytmu węgierskiego, która zakłada, że funkcja celu jest postaci - minimum. Dlatego w rozwiązaniu będziemy minimalizować funkcję przeciwną do funkcji celu: $-F(x_{i,j})$, dla której macierz współczynników jest postaci:

$$W = \begin{bmatrix} -15 & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & -10 \\ -12 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 1: Przekształcenie macierzy: **W** – tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie znalazło się co najmniej jedno zero;

$$W = \begin{bmatrix} \boxed{-15} & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & \boxed{-10} \\ \boxed{-12} & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element najmniejszy

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & \boxed{13} \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-2 - (-15) = 13

Krok 2: Skreślenie w przekształconej macierzy współczynników funkcji celu wierszy oraz kolumn zawierających zero możliwie najmniejszą liczbą linii;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

trzy linie – zatem przechodzimy do kroku 4

Jeżeli najmniejsza liczba linii konieczna do pokrycia wszystkich zer jest równa wymiarowi macierzy (**czyli - n**), to rozwiązanie, które otrzymamy na podstawie tak przekształconej macierzy współczynników będzie optymalne – przechodzimy do **kroku 3**. Jeżeli jest ona mniejsza niż wymiar macierzy – **W**, to przechodzimy do **kroku 4**.

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 3: Ustalić tak rozwiązanie optymalne, aby w macierzy $\left[x^*_{i,j}\right]$ jedynki znalazły się tylko na tych miejscach, gdzie są zera w przekształconej macierzy – **W** (musimy dbać także, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie była tylko jedna jedynka).

Krok 4: Gdy liczba linii pokrywających zera jest mniejsza od wymiaru macierzy współczynników, to w bieżącej (przekształconej) macierzy współczynników należy znaleźć element najmniejszy oraz:

- odjąć go od elementów nieskreślonych;
- dodać go do elementów podwójnie skreślonych;
- elementy skreślone jedną linią (raz) pozostawiamy bez zmian;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & \boxed{6} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element minimalny

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 7 \\ 13 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elementy odjęte

elementy dodane

Powrót do **kroku 2** i powtórzenie procedury, aż do uzyskania rozwiązania optymalnego.

$$W = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 5 & 4 & 7 \\ 13 & 4 & 7 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & \boxed{0} & 3 \\ 6 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cztery linie
zatem rozwiązanie optymalne
(krok 3)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(x_{i,j}) = 15 + 10 + 6 = \\ = 31 \text{ [szt./godz.]}$$