❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

ZAGADNIENIA TRANSPORTOWE

Zagadnienie transportowe (ZT) - jest szczególnym przypadkiem liniowego problemu decyzyjnego. Zadanie transportowe posiada bardzo wiele praktycznych zastosowań, cechuje się również tym, że posiada prawie kompletną teorię obejmująca: własności tego typu zadań oraz metody ich rozwiązywania. W teorii tej wykorzystuje się nie tylko elementy ***teorii programowania liniowego***, ale także elementy ***teorii grafów***, w szczególności zagadnienia związane z ***sieciami transportowymi***.

Zadanie transportowe sformułowane zostało po raz pierwszy przez Kantorowicza (1934) i było jednym z pierwszych rozwiązanych problemów programowania liniowego. Zostało ono później zmodyfikowane i opublikowane przez Hitchcoca (1941), który podał także pewną wersję algorytmu jego rozwiązania. Zadanie sformułowane przez Hitchcoca nosi nazwę klasycznego zadania transportowego.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

1. Matematyczny model zagadnienia transportowego

Od „n" – dostawców: $A_1,\ldots,A_n$ należy dokonać przewozu ładunków do „m" – odbiorców: $B_1,\ldots,B_m$. Wiadomo, że każdy z dostawców dysponuje odpowiednio: $a_1,\ldots,a_n$ jednostkami towaru (***podaż***), natomiast każdy z odbiorców wymaga dostaw w wysokości odpowiednio: $b_1,\ldots,b_m$ jednostek towaru (***popyt***).

Zakłada się, że każdy dostawca może zaopatrywać dowolnego odbiorcę oraz każdy odbiorca może otrzymać towar od dowolnego nadawcy. Suma dostaw od każdego nadawcy do „j-tego" odbiorcy równa się jego zapotrzebowaniu (popytowi), zaś suma dostaw wysłanych od „i-tego" dostawcy do wszystkich odbiorców nie przekracza wielkości jaką dysponuje (podaż).

Zakłada się również, że znane są jednostkowe koszty transportu o każdego dostawcy do odbiorcy: $C = \lfloor c_{i,j} \rfloor_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m}$ (macierz kosztów transportu). Sumaryczny koszt transportu jest sumą kosztów transportu na poszczególnych trasach i na każdej z tras jest on proporcjonalny do wielkości dostaw.

Jeżeli wielkości $x_{i,j} \geq 0$ oznaczają wielkość dostaw (od „i" – tego dostawcy do „j" – tego odbiorcy), to matematyczny model zagadnienia transportowego można przedstawić w postaci:

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Należy określić (zaprogramować) macierz $X = \lfloor x_{i,j} \rfloor_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m}$ - wielkości przewozów, aby:

(1)

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j}x_{i,j} \rightarrow \min \quad \text{(funkcja celu)}$$

przy warunkach ograniczających:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j;\, j = 1,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \le a_i;\, i = 1,\dots,n \\ x_{i,j} \ge 0 \end{cases}$$

Zadanie sformułowane za pomocą (1) nazywane jest ***klasycznym zadaniem transportowym***. Można zauważyć, że będzie ono posiadać rozwiązanie, gdy między sumaryczną podażą a popytem spełniony jest warunek:

(2)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

- Jeżeli w warunku (2) jest równość (równowaga między sumaryczną podażą a popytem), to zadanie (1) nazywamy ***zamkniętym zadaniem transportowym*** (ZZT) i posiada postać:

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j}x_{i,j} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j ;\ j = 1,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = a_i ;\ i = 1,\dots,n \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

- Jeżeli natomiast w warunku (2) jest ostra nierówność, to zadanie (1) nazywamy ***otwartym zadaniem transportowym*** (OZT) i posiada postać:

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j}x_{i,j} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j ;\ j = 1,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq a_i ;\ i = 1,\dots,n \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Niektóre warianty zagadnień transportowych sprowadzalne do zamkniętego zagadnienia transportowego.

- Otwarte zagadnienie transportowe – OZT:
  Algorytm transportowy zakłada, że zadanie jest zbilansowane (zamknięte). Każde otwarte zadanie transportowe (OZT) można sprowadzić do (ZZT) wprowadzając dodatkowego: m+1 – fikcyjnego odbiorcę (w praktyce jest to najczęściej magazyn znajdujący się u każdego z dostawców, w którym będą magazynowane nadwyżki podaży: $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$. W zadaniu tym koszty magazynowania można pominąć.

  Macierz kosztów dla tego zadania:

i \ j	1	2	…	m	m+1 (magazyn)	a_i
1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	…	$c_{1,m}$	0	a_1
2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	…	$c_{2,m}$	0	a_2
…	…	…	…	…	…	…
n	$c_{n,1}$	$c_{n,2}$	…	$c_{n,m}$	0	a_n
b_j	b_1	b_2	…	b_m	b_{m+1}	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m+1} b_j$

Model matematyczny zadania:

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m+1} c_{i,j} x_{i,j} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j ; j = 1,\dots,m+1 \\ \sum_{j=1}^{m+1} x_{i,j} = a_i ; i = 1,\dots,n \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

- Zadanie transportowo – magazynowe (ZT – M):
  Jeżeli w otwartym zadaniu transportowym – OZT uwzględnimy także koszty magazynowania, to zadanie to staje się zadaniem transportowo-magazynowym.
  Oznaczmy: h_i - jednostkowe koszty magazynowania w magazynach nadawców; $x_{i,m+1}; i=1,\ldots,n$ - nadwyżki podaży magazynowane u nadawców.

  Macierz łącznych kosztów dla tego zadania:

i \ j	1	2	…	m	m+1 (magazyn)	a_i
1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	…	$c_{1,m}$	h_1	a_1
2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	…	$c_{2,m}$	h_2	a_2
…	…	…	…	…	…	…
n	$c_{n,1}$	$c_{n,2}$	…	$c_{n,m}$	h_n	a_n
b_j	b_1	b_2	…	b_m	b_{m+1}	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m+1} b_j$

Model matematyczny zadania:

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j}x_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} h_i x_{i,m+1} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j; j=1,\ldots,m+1 \\ \sum_{j=1}^{m+1} x_{i,j} = a_i; i=1,\ldots,n \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

- Zadanie transportowo – produkcyjne (ZT - P)

W zagadnieniu transportowo-magazynowym zakładaliśmy, że towary są już wyprodukowane (znajdują się w magazynach). Jeżeli towary przed transportem należy wyprodukować to musimy uwzględnić w takim zagadnieniu także koszty produkcji. Tego typu zadania nazywają się transportowo-produkcyjnymi.

Zakładamy, że $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ (zdolności produkcyjne nadawców przewyższają zapotrzebowania odbiorców), a więc zadanie musimy zbilansować wprowadzając fikcyjnego odbiorcę – magazyn, w którym będą magazynowane nadwyżki mocy produkcyjnych w ilościach: $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Oznaczmy: k_i - jednostkowe koszty produkcji u „i – tego" producenta (dostawcy); h_i - jednostkowe koszty magazynowania w magazynach nadawców nadwyżki produkcji; $x_{i,j}(i=1,\dots,n; j=1,\dots,m)$ - wielkości towarów wyprodukowane i dostarczone od i – tego nadawcy do j - tego odbiorcy; $x_{i,m+1}; i=1,\dots,n$ - nadwyżki produkcji magazynowane u nadawców.

Uwaga: gdy założymy, że zdolności produkcyjne nie będą w pełni wykorzystane, to w zadaniu przyjmujemy: $h_i + k_i = 0$.

Macierz łącznych kosztów dla tego zadania:

i \ j	1	2	…	m	m+1 (magazyn)	a_i
1	$c_{1,1}+k_1$	$c_{1,2}+k_1$	…	$c_{1,m}+k_1$	h_1+k_1	a_1
2	$c_{2,1}+k_2$	$c_{2,2}+k_2$	…	$c_{2,m}+k_2$	h_2+k_2	a_2
…	…	…	…	…	…	…
n	$c_{n,1}+k_n$	$c_{n,2}+k_n$	…	$c_{n,m}+k_n$	h_n+k_n	a_n
b_j	b_1	b_2	…	b_m	b_{m+1}	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m+1} b_j$

Model matematyczny zadania:

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_{i,j}+k_i)x_{i,j} + \sum_{i=1}^{n}(h_i+k_i)x_{i,m+1} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j; \ j=1,\dots,m+1 \\ \sum_{j=1}^{m+1} x_{i,j} = a_i; \ i=1,\dots,n \\ x_{i,j} \ge 0 \end{cases}$$

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

2. Praktyczny przykład problemu decyzyjnego – sformułowanego za pomocą zamkniętego zadania transportowego ZZT.

Cztery piekarnie zlokalizowane na terenie miasta są zaopatrywane w mąkę z dwóch magazynów znajdujących się na peryferiach miasta. Zapasy mąki w magazynach wynoszą odpowiednio: I magazyn – 130 t, II – magazyn – 200 t. Natomiast zapotrzebowanie piekarń jest równe odpowiednio: I piekarnia – 80 t, II – piekarnia – 120 t, III – piekarnia – 70 t, III – piekarnia – 60 t. Koszty dostawy mąki do piekarń zależą tylko od odległości dostaw i są podane w tabeli kosztów:

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Należy wyznaczyć, taki plan dostaw mąki z magazynów do piekarń, aby dostarczyć piekarniom wymagane ilości, przy minimalnych sumarycznych kosztach jej transportu.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Problem decyzyjny w postaci zamkniętego zadania transportowego jest postaci:

$$f(x_{i,j}) = 25x_{1,1} + 24x_{1,2} + 28x_{1,3} + 13x_{1,4} + 17x_{2,1} + 30x_{2,2} + 15x_{2,3} + 26x_{2,4} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} x_{i,1} = 80, \quad \sum_{i=1}^{2} x_{i,2} = 120, \quad \sum_{i=1}^{2} x_{i,3} = 70, \quad \sum_{i=1}^{2} x_{i,4} = 60, \\ \sum_{j=1}^{4} x_{1,j} = 130, \quad \sum_{j=1}^{4} x_{2,j} = 200, \quad x_{i,j} \geq 0,_{i=1,2;\, j=1,2,3,4} \end{cases}$$

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

1. Algorytm wyznaczania rozwiązań ZZT.

Idea poszukiwania rozwiązań ZZT jest podobna do idei algorytmu „simpleks".

Najpierw należy znaleźć jakiekolwiek początkowe rozwiązanie bazowe (ponieważ rząd macierzy rz(A)= n + m – 1), to rozwiązanie bazowe niezdegenerowane posiada n + m - 1 dodatnich wartości w wektorze zmiennych decyzyjnych – zmienne bazowe, pozostałe wartości to zera – dla zmiennych niebazowych.

Następnie sprawdza się, czy rozwiązanie bazowe aktualne jest optymalne, czy też nie. Jeśli nie to znajdujemy kolejne rozwiązanie nie gorsze od poprzedniego i znów sprawdzamy jego optymalność. Powyższe postępowanie kończymy, gdy wreszcie uzyskamy rozwiązanie bazowe optymalne.

Algorytmicznie otrzymywanie rozwiązań ZZT można przedstawić następująco:
ETAP I (wyznaczenie dopuszczalnego początkowego rozwiązania bazowego).
W literaturze opisanych jest wiele metod konstrukcji początkowego rozwiązania bazowego, np.:

- Metoda ***kąta północno – zachodniego*** (N-W) – prosta ale mało efektywna (wymagane jest zazwyczaj przeprowadzenie dużej liczby iteracji, aby uzyskać z niego końcowe rozwiązanie optymalne).
- Metoda ***minimalnego elementu*** macierzy kosztów transportu – na ogół bardziej efektywna od poprzedniej.
- Metoda VAM (***aproksymacyjna***) – nieco bardziej złożona od poprzednich, ale daje rozwiązania początkowe bliskie rozwiązaniom optymalnym.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów:

Oznaczmy przez (r , k) – numer zmiennej wybieranej w danej (p – tej) iteracji za zmienną bazową: $x_{r,k}^{(p)} > 0$. Oznaczmy przez: $\boldsymbol{I}$ – zbiór indeksów dostawców, których zasoby w danym kroku nie zostały jeszcze rozdysponowane, zaś przez $\boldsymbol{J}$ – zbiór indeksów odbiorców, których zapotrzebowanie w danym kroku nie zostało jeszcze zaspokojone. Numer zmiennej wprowadzanej do bazy w każdej iteracji wyznaczamy zgodnie z formułą:

$$c_{r,k} = \min\{c_{i,j} : (i,j) \in I \times J\}$$

Następnie przypisujemy (p – tej) - zmiennej bazowej aktualną wielkość transportu od dostawcy (r – tego) do odbiorcy (k – tego) zgodnie ze wzorem:

$$x_{r,k}^{(p)} = \min\{a_r^{(p-1)}, b_k^{(p-1)}\}, p = 1,2,\ldots, m+n-1;$$

$$a_r^{(p)} = a_r^{(p-1)} - x_{r,r}^{(p)}, b_k^{(p)} = b_k^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, p = 1,2,\ldots, m+n-1;$$

$$a_i^{(p)} = a_i^{(p-1)}, b_j^{(p)} = b_j^{(p-1)}, \quad \text{dla} \quad i \neq r, j \neq k, p = 1,\ldots, m+n-1;$$

$$a_i^{(0)} = a_i, b_j^{(0)} = b_j; i = 1,\ldots, n; j = 1,\ldots, m;$$

Eliminujemy z dalszych rozważań ze zbioru indeksów dostawców „***I***" lub odbiorców „***J***" ten indeks, dla którego $a_r^{(p)} = 0$ (zapasy tego dostawcy zostały wyczerpane) lub $b_k^{(p)} = 0$ (zapotrzebowanie tego odbiorcy zostało zrealizowane).

Powtarzamy tę procedurę i na ogół po (m + n - 1) krokach znajdujemy wartości wszystkich zmiennych bazowych dla rozwiązania początkowego.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy) 1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Tablica przewozów (kolejne iteracje):

i \ j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1		$x_{1,2}^{(4)} = 70$		$x_{1,4}^{(1)} = 60$	130	70	70	70	0	0
2	$x_{2,1}^{(3)} = 80$	$x_{2,2}^{(5)} = 50$	$x_{2,3}^{(2)} = 70$		200	200	130	50	50	0
$b_j^{(0)}$	80	120	70	60	330					
$b_j^{(1)}$	80	120	70	0						
$b_j^{(2)}$	80	120	0	0						
$b_j^{(3)}$	0	120	0	0						
$b_j^{(4)}$	0	50	0	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0	0						

Iteracja p=5: $I = \{2\}; J = \{2\}$; 5 zmienna bazowa: $x_{2,2}^{(5)} = \min\{50,50\} = 50$

modyfikujemy: $a_1^{(4)} = a_1^{(3)} - x_{1,2} = 70 - 70 = 0$; $b_2^{(4)} = b_4^{(3)} - x_{1,2} = 120 - 70 = 50$;

pozostałe: $a_i^{(4)} = a_i^{(3)}$; $b_j^{(4)} = b_j^{(3)}$. Skreślamy ze zbioru nadawców 1 – nadawcę.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tablica przewozów (ostateczna)

i \ j	1	2	3	4
1	0	70	0	60
2	80	50	70	0

Otrzymujemy zatem rozwiązanie bazowe początkowe postaci:

$f(x_{i,j}) = 80\cdot 17 + 70\cdot 24 + 50\cdot 30 + 70\cdot 15 + 60\cdot 13 = 6370$

ETAP II (sprawdzenie optymalności rozwiązania bazowego).

Wyznaczamy tzw. ***tablicę kosztów zastępczych*** $\hat{c}_{i,j}$ w następujący sposób:

- Koszty zastępcze dla aktualnych przewozów rozwiązania bazowego ($x_{i,j} > 0$) przyjmujemy równe kosztom wyjściowym podanym w tablicy: $c_{i,j}$.
- Znajdujemy parę takich wierszy lub kolumn dla których możemy wyznaczyć ich różnicę (w tej samej kolumnie lub wierszu są dwie zmienne bazowe).
- Znając ile wynosi taka różnica - wyznaczamy pozostałe elementy w macierzy kosztów zastępczych, których wartości jeszcze nie znamy, rozwiązując odpowiednie równania, tak aby zgadzała się wyznaczona różnica.

Po wyznaczeniu kosztów zastępczych wyznaczamy ***tablicę różnic***: $r_{i,j} = c_{i,j} - \hat{c}_{i,j}$.

Uwaga: Dla zmiennych bazowych $r_{i,j} = 0$.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

<u>Kryterium optymalności rozwiązania bazowego:</u>

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, jeżeli wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie.

Dla naszego przykładu (w przypadku otrzymanego rozwiązania początkowego metodą minimalnego elementu macierzy kosztów) mamy:

<u>Macierz kosztów zastępczych (początkowa)</u>

i \ j	1	2	3	4
1		24		13
2	17	30	15	

Różnica np. między drugim i pierwszym wierszem wynosi: 6, zatem pozostałe elementy tej macierzy wyznaczamy rozwiązując równania: $17-\hat{c}_{1,1}=6 \Rightarrow \hat{c}_{1,1}=11$, $15-\hat{c}_{1,3}=6 \Rightarrow \hat{c}_{1,3}=9$, $\hat{c}_{2,4}-13=6 \Rightarrow \hat{c}_{2,4}=19$.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych (pełna)

i \ j	1	2	3	4
1	11	24	9	13
2	17	30	15	19

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	14	0	19	0
2	0	0	0	7

Ponieważ wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie to otrzymane rozwiązanie początkowe jest optymalne.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

ETAP III (modyfikacja rozwiązania bazowego i poprawa wartości funkcji celu):

Z każdym zadaniem transportowym związany jest graf tego zadania odpowiadający aktualnemu rozwiązaniu bazowemu. Jeżeli rozwiązanie bazowe nie jest zdegenerowane, to taki graf jest grafem ***spójnym*** i ***bezkonturowym***.

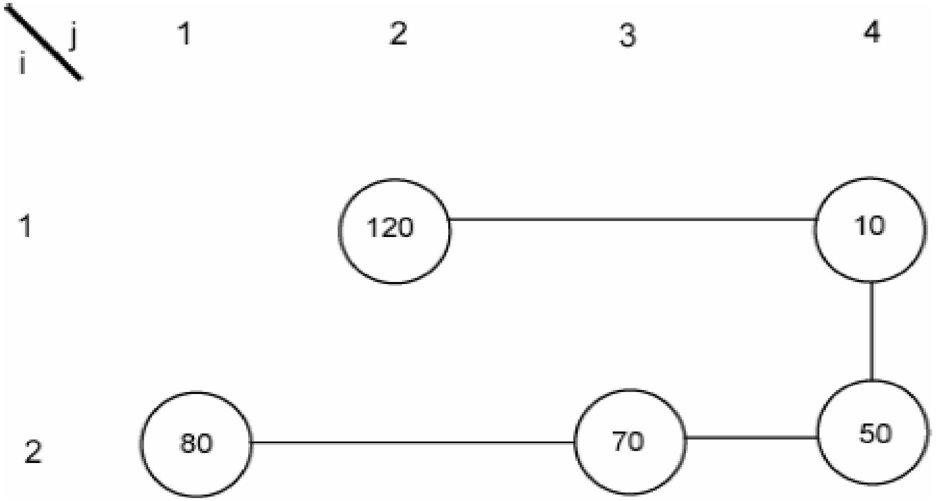
Np. dla naszego przykładu dla rozwiązania bazowego postaci:

Tablica przewozów

i \ j	1	2	3	4
1	0	120	0	10
2	80	0	70	50

Funkcja celu wynosi: $f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 120 \cdot 24 + 70 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 50 \cdot 26 = 6720$ (więcej niż dla rozwiązania optymalnego).

Graf tego rozwiązania jest postaci:



❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych:

i \ j	1	2	3	4
1	4	24	2	13
2	17	37	15	26

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

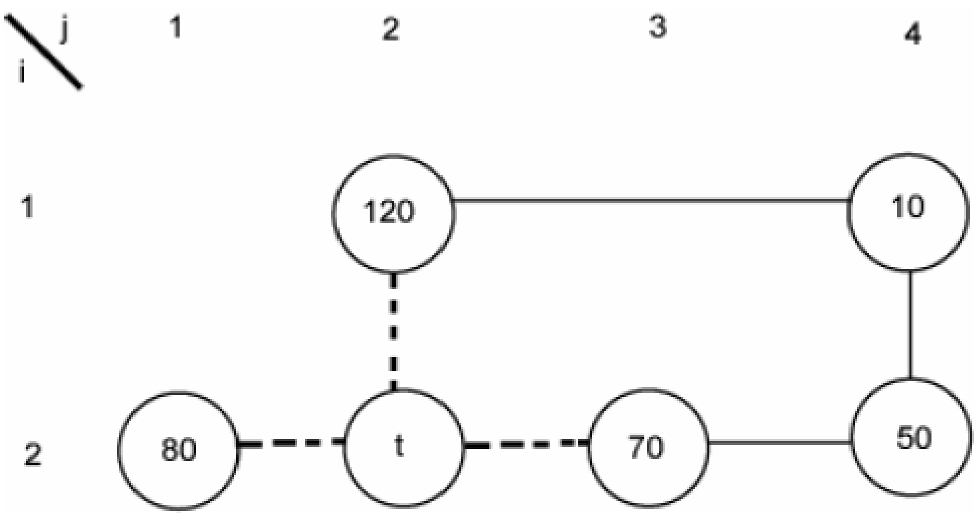
Ponieważ $\hat{c}_{2,2} = -7$, to rozwiązanie to nie jest oczywiście optymalne. Należy go zatem poprawić.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wejścia do bazy:

Do bazy wprowadzamy tę zmienną niebazową, dla której element macierzy różnic jest najmniejszy (z ujemnych). W naszym przypadku zmienną $x_{2,2}$. Wprowadzając tę zmienną (przypisując jej wielkość transportu „t>0" jednostek) poprawiamy rozwiązanie bazowe. Po wprowadzeniu tej zmiennej otrzymalibyśmy dla zadania graf konturowy postaci:

Węzły narożne konturu określają numery zmiennych, których wartości się zmieniają, gdy wprowadzamy do bazy nową zmienną.



Należy ustalić, zatem którą zmienną z aktualnej bazy (spośród narożnych konturu) należy usunąć. Określa to kryterium wyjścia dla zadania transportowego.

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wyjścia:

Niech $G = \{(k,l)\}$, gdzie: (k,l) - węzły narożne konturu. Zbiór ten ma parzystą liczbę wierzchołków (dla nas 4). Wierzchołki te cechujemy na przemian (+/-) poczynając od wierzchołka, który wprowadzamy do bazy (otrzymuje on cechę plus). Cechowanie dzieli ten zbiór na 2 rozłączne zbiory G^+ oraz G^-.

W naszym przykładzie: $G^+ = \{(2,2),(1,4)\}; G^- = \{(1,2),(2,4)\}$.

Wartość nowo wprowadzanej zmiennej bazowej w (p – tej) iteracji wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$x^{(p)}{}_{k,l} = \min_{(i,j)\in G^-}\{x_{i,j}^{(p-1)}\}$$

Nowe wartości zmiennych narożnych obliczamy zgodnie ze wzorami:

$$x_{i,j}^{p} = x_{i,j}^{(p-1)} - x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j)\in G^-;$$

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} + x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j)\in G^+, (i,j)\neq(k,l);$$

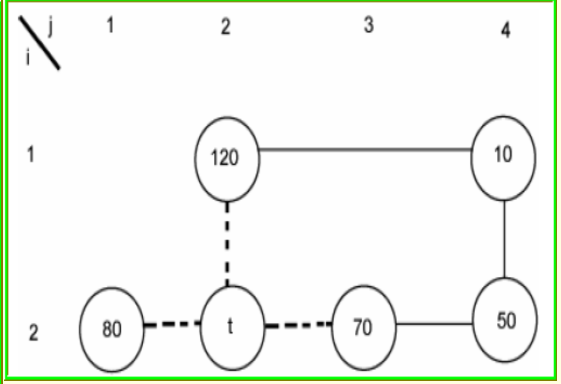
$$x_{i,j}^{0} = x_{i,j};$$

Pozostałe zmienne nie będące narożne w grafie nie zmieniają wartości.

W naszym przykładzie:

$x_{2,2}^{(1)} = \min\{x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0}\} = \min\{120,50\} = 50$; $\quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70$;

$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0$; $\quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60$.

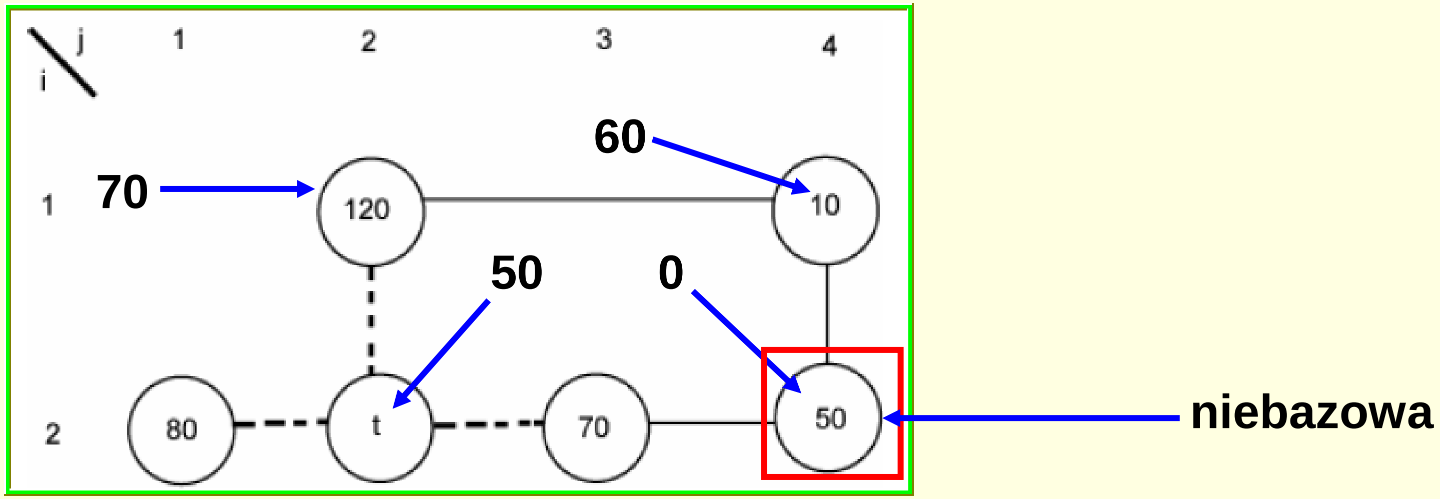


❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

<u>Treść kryterium wyjścia</u>: z bazy usuwamy tę zmienną ze zmiennych należących do zbioru indeksów G^{-}, dla której policzona nowa wartość (zgodnie ze wzorami redukcyjnymi) jest najmniejsza. Dla naszego przykładu usuwaną zmienną jest zmienna: $x_{2,4}$. Tak utworzone nowe rozwiązanie bazowe da wyznaczone już wcześniej rozwiązanie optymalne.

$x_{2,2}^{(1)} = \min\{x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0}\} = \min\{120, 50\} = 50$; $\quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70$;

$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0$; $\quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60$.

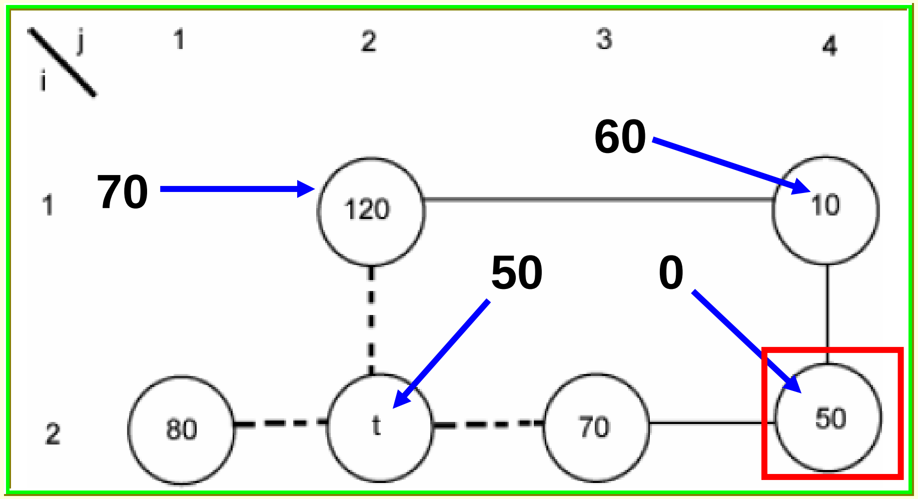


❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Interpretacja współczynnika różnic $r_{2,2} = -7$ (dla rozwiązania nieoptymalnego) prowadzi do wniosku, że nieoptymalne rozwiązanie aktualne można poprawić o wartość $(-7 \cdot 50 = -350)$ - tzn. zmniejszyć o 350 koszty transportu (tyle wynosi różnica f – celu rozwiązania bieżącego oraz optymalnego), dostarczając drugiemu odbiorcy nie 120 j. jego pełnego zapotrzebowania z magazynu 1-go, lecz w porcjach - 70 z 1-go i 50 z 2-go. Tym samym zamówienie 4-go odbiorcy mogło być zrealizowane (60 – jednostek) w całości z magazynu 1-go.

Uwaga:

Jeżeli w macierzy różnic rozwiązania optymalnego jest więcej zer niż zmiennych bazowych, to istnieje wiele rozwiązań optymalnych o tej samej wartości funkcji celu.



Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

1. Zagadnienie pośrednika:

Pośrednik (sprzedawca) nabywa towar od m - dostawców, przewozi go oraz sprzedaje n - odbiorcom.

Dane są:

a_i - maksymalna ilość towaru jaką można kupić u i-tego dostawcy (jego podaż)

b_j - maksymalna ilość towaru jaką można sprzedać j-temu odbiorcy (jego popyt)

k_i - cena zakupu u i-tego dostawcy

p_j - cena sprzedaży j-temu odbiorcy

c_{ij} - jednostkowy koszt transportu na trasie od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy

Należy ustalić taki plan zakupów, transportu i sprzedaży, aby dochód pośrednika był maksymalny (dochód = przychód ze sprzedaży - koszty zakupu - koszty transportu)

$d_{ij} = p_j - k_i - c_{ij}$ - dochód jednostkowy z trasy zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \to \max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

4. Minimalizacja pustych przebiegów (dotyczy optymalnego krążenia środków transportu rozwożących towar):

Załóżmy, że istnieje n - miast pomiędzy którymi odbywa się wymiana towarowa.

Miasta te tworzą układ zamknięty, tzn. wymiana towarów odbywa się tylko pomiędzy nimi i każde z nich może być zarówno dostawca jak i odbiorcą towarów.

Do każdego miasta przywozi się i z każdego wywozi się określoną masę towarową nadającą się do przewozu określonym środkiem transportu (o określonej ładowności)

Znane są:

d_{ij} - odległości pomiędzy i-tym oraz j-tym miastem

a_{ij} - przewóz masy towarowej pomiędzy miastami - wyrażony liczbą pełnych środków transportu (samochodów, wagonów)

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

Dla każdego miasta określa się:

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do wywiezienia masy towarowej (wywóz) równą: $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do przywiezienia masy towarowej (przywóz) równą: $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Dla całego układu spełniona jest równość: $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Natomiast dla poszczególnych miast wywóz (w_i) wcale nie musi być równy przywozowi (p_i).

Miasta w których $w_i > p_i$ - są odbiorcami tzw. pustych przebiegów, a ich zapotrzebowanie na puste środki transportu wynosi: $b_i = w_i - p_i > 0$.

Miasta w których $w_i < p_i$ - są dostawcami pustych przebiegów, a ich podaż pustych środków transportu wynosi: $a_i = p_i - w_i > 0$.

Miasta w których $p_i = w_i$ eliminujemy z dalszych rozważań (bo nie występuje dla nich problem pustych przebiegów)

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

Problem decyzyjny jest następujący:
Znaleźć taki plan przebiegów pustych środków transportu pomiędzy miastami, aby łączny pojazdokilometraż (samochodokilometraż, wagonokilometraż) pustych przebiegów był minimalny.

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - liczba pustych środków transportu wysyłanych z miasta i do miasta j

$i = 1, 2, ..., k$ - indeks miast dostawców, dla których występuje problem pustych przebiegów

$j = 1, 2, ..., l$ - indeks miast odbiorców, dla których występuje problem pustych przebiegów

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, ..., k) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, ..., l) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, ..., k; j = 1, ..., l) \end{cases}$$

OPTYMALIZACJA NIELINIOWA

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

1. Wprowadzenie:

Bardzo często w praktyce spotykamy się z taką sytuacją, gdzie analizowane procesy gospodarcze mają charakter nieliniowy.

Stąd też oprócz liniowych zadań decyzyjnych (spotykanych np.: w zagadnieniach transportowych, różnego rodzaju problemach optymalizacji dyskretnej, zagadnieniach optymalizacji sieciowej) formułujemy także **nieliniowe zadania decyzyjne**.

Zadanie decyzyjne nazywamy **nieliniowym** jeżeli **funkcja celu** lub chociaż **jeden z warunków ograniczających** jest postaci **nieliniowej**.

Zadania **nieliniowe rozpatruje się rzadziej** niż zadania liniowe, gdyż:

- brak jest danych aby oszacować analityczną postać nieliniowej zależności badanego zjawiska (pomimo, że wiemy iż będzie to zależność nieliniowa);
- zadania programowania nieliniowego rozwiązuje się zazwyczaj trudniej, niż zadania liniowe, gdyż nie ma ogólnej metody ich rozwiązywania;
- często z racji łatwości znalezienia rozwiązania formułujemy liniowe zadania decyzyjne, mimo że wiemy, iż jest to znaczne uproszczenie badanego problemu;

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

2. Własności zadań programowania nieliniowego:

Programowaniem nieliniowym nazywamy zadanie decyzyjne postaci:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max(\min)$$

$$(1)\quad \begin{cases} g^j(x_1,\ldots,x_n) \le c_j \text{ lub } g^j(x_1,\ldots,x_n) \ge c_j \quad \text{dla } (j=1,\ldots,r); \\ g^j(x_1,\ldots,x_n) = c_j \quad \text{dla } (j=r+1,\ldots,m); \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0. \end{cases}$$

gdy funkcja celu $f(X) = f(x_1,\ldots,x_n)$ lub chociaż jeden z warunków ograniczających: $g_j(X) = g_j(x_1,\ldots,x_n)$ jest **funkcją nieliniową**.

Jeżeli w programowaniu nieliniowym **wszystkie warunki ograniczające** (poza warunkami brzegowymi) są w **postaci równań**, to taką postać nazywamy postacią **kanoniczną**, zaś gdy wszystkie warunki ograniczające są **nierównościami** nazywamy ją postacią **standardową**.

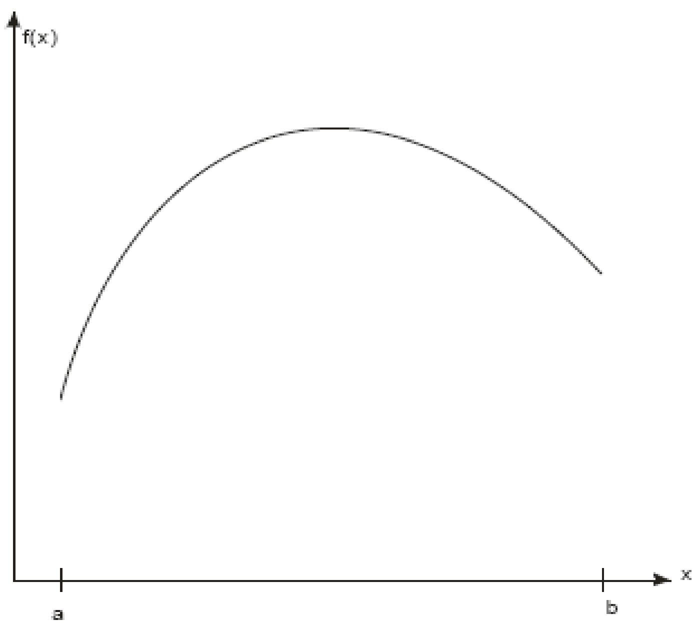
Uwaga: Warunki w postaci nierówności w ogólnej postaci zadania programowania nieliniowego możemy sprowadzić do równości wprowadzając dodatkowe zmienne swobodne (dodając je lub odejmując je do lewych stron nierówności). Tym samym uzyskujemy równoważną postać kanoniczną.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

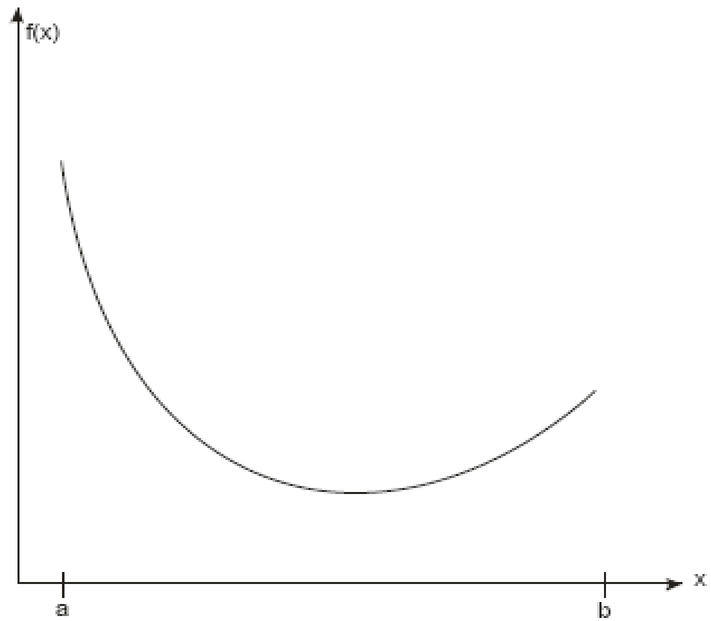
Można wyróżnić dwa podstawowe typy zadań programowania nieliniowego:

- zadania programowania **wypukłego**;
- zadania programowania **niewypukłego**;

Zadanie nieliniowe jest zadaniem **programowania wypukłego**, jeżeli **minimalizujemy wypukłą** lub **maksymalizujemy wklęsłą** funkcję celu, zaś zbiór **rozwiązań dopuszczalnych** jest **obszarem (wielościanem) wypukłym**.
Każde inne zadanie programowania nieliniowego nazywamy zadaniem programowania **niewypukłego**.



a) Funkcja wklęsła



b) Funkcja wypukła

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Dla zadań optymalizacji nieliniowej w postaci kanonicznej (warunki ograniczające w postaci równości) możemy w ogólnym przypadku zastosować metodę tzw. czynników nieoznaczonych Lagrange'a. W metodzie tej zamiast poszukiwać ekstremum warunkowego postaci:

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min)$$

$$(2) \quad \begin{cases} g^j(x_1,\dots,x_n) = c_j \quad \text{dla} \quad (j=1,\dots,m); \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots x_n \ge 0. \end{cases}$$

poszukujemy ekstremum bezwarunkowego dla tzw. funkcji Lagrange'a utworzonej w oparciu o wyjściową funkcje celu f(X) poprzez włączenie do tej funkcji warunków ograniczających z odpowiednimi (sztucznie wprowadzonymi) czynnikami nieoznaczonymi (zakładamy, że m<n).

Dla zadania programowania nieliniowego w postaci kanonicznej (2) funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(X;\lambda) = L(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\dots,x_n)\right]$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) jest następujący: zerowanie się pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = c_j - g^j(x_1,\dots,x_n) = 0; \quad \text{dla} \quad (j=1,\dots,m); \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \dfrac{\partial g^1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \dfrac{\partial g^m}{\partial x_i} = 0; \quad \text{dla} \quad (i=1,2,\dots,n); \end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) w postaci kanonicznej jest następujący:

$$L = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n) \right]$$

- Funkcja Lagrange'a (m<n)

Hesjan obrzeżony

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \ldots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \ldots & g_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \ldots & g_n^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^m & L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

gdzie: $g_i^j = \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i}; L_{pq} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_q \partial x_p}$

$|\overline{H}_2|$

Dla maksimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby $|\overline{H}_{m+1}|, |\overline{H}_{m+2}|, \ldots, |\overline{H}_n| = |\overline{H}|$ **zmieniały znak (dla** $|\overline{H}_{m+1}|$ **znak taki jak** $(-1)^{m+1}$ **)**

Dla minimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby miały one ten sam znak (i to taki jak dla $(-1)^m$ **)**

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

4. Przykłady nieliniowych problemów decyzyjnych – zagadnienie wyboru środków przekazu reklamy.

Załóżmy, że firma dysponuje pewną ilością środków pieniężnych na reklamę nowego produktu w środkach masowego przekazu (do wyboru n – czasopism, w których można zamówić reklamę produktu).

Zasięg reklamy w danym czasopiśmie zależy od:

- nakładu czasopisma;
- od tego ile razy zamieszczamy reklamę w tym czasopiśmie.

Jeżeli reklamę w danym czasopiśmie zamieścimy 8 razy to na pewno firma dotrze do większej liczby czytelników niż gdyby zamieściła reklamę tylko 2 razy. Nie będzie to jednak zasięg 4 – krotnie większy (gdyż do niektórych czytelników trafiamy z tą samą reklamą kilkakrotnie). Zatem funkcja zasięgu reklamy powinna być funkcją rosnącą (w zależności od liczby zamieszczeń reklamy), ale funkcją wklęsłą (pierwsza pochodna malejąca). Może być to dla przykładu wklęsła funkcja kwadratowa.

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Oznaczmy przez:

A – fundusz na reklamę;
a_j – koszt zamieszczenia jednej reklamy w j – tym czasopiśmie;
b_j – minimalna liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
d_j – maksymalna liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
x_j – liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
$f_j(x_j)$ - zasięg reklamy (liczba czytelników) w j – tym czasopiśmie, jeżeli dokonano w nim x_j – zamieszczeń;
$f_j(x_j) = c_j x_j - r_j x_j^2$ - analityczna postać zasięgu reklamy, gdzie: c_j – maksymalny zasięg w przypadku jednostkowej reklamy w j – tym czasopiśmie, r_j – tempo spadku przeciętnego zasięgu w przypadku powtórzeń;

Zadanie decyzyjne:

Znaleźć takie wartości zmiennych x_j, aby:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max$$

przy warunkach:

$$\sum_{j-1}^{n} a_j x_j \le A \quad \text{(koszty reklamy)}; \quad b_j \le x_j \le d_j \quad (j = 1,\dots,n) \quad \text{(liczba zamieszczeń)};$$

x_j – całkowite.

Uwaga: zadanie to jest bardzo trudne do rozwiązania ze względu na nieliniową funkcje celu i całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych. Jeżeli pominiemy warunek całkowitoliczbowości staje się zadaniem programowania kwadratowego i można je rozwiązać stosując np. algorytm Beale'a (zob. Ignasiak: Badania Operacyjne – str 166).

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Nieliniowe zagadnienie transportowo-produkcyjne do zagadnienia utylizacji odpadów

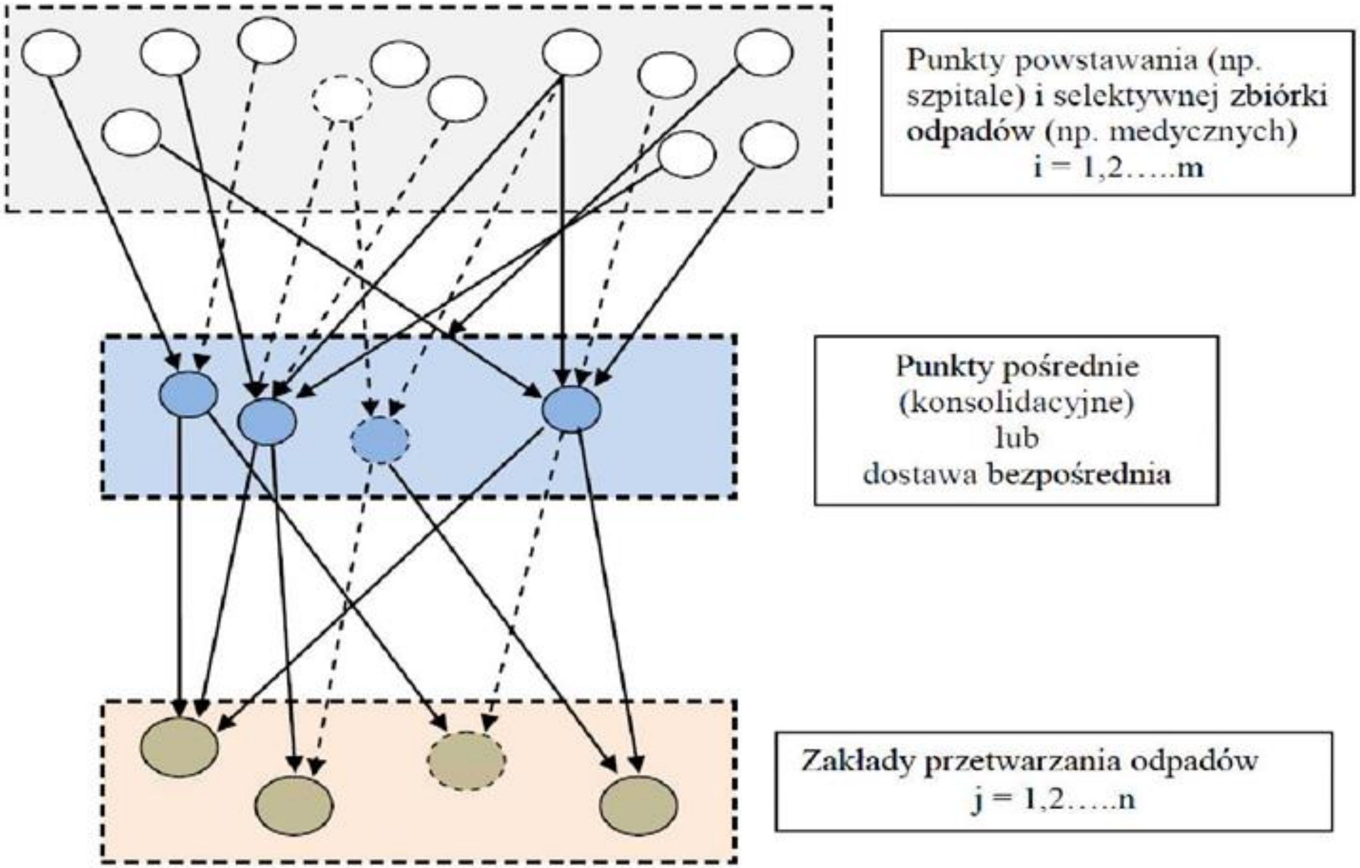
W odniesieniu do przetwarzania odpadów problem transportowo - produkcyjny powinno się rozważyć w co najmniej dwóch aspektach:

- **aspekt ogólny:** dla istniejącej sieci punktów gromadzenia odpadów i zakładów ich przetwarzania, zgodnie z przyjętym algorytmem, należy wyznaczyć optymalny pod względem kosztowym rozdział zadań przewozowych do odpowiednich zakładów przetwarzania odpadów,
- **aspekt szczególny:** dla istniejącej sieci punktów gromadzenia odpadów i jednego zakładu (np. spalarnia odpadów niebezpiecznych) przetwarzającego odpady co najmniej dwoma technologiami, należy zoptymalizować rozdział zadań przewozowych i produkcyjnych na poszczególne technologie przetwarzania.

W obydwu zadaniach bardzo ważna (konieczna) jest znajomość funkcji (nieliniowej) opisującej koszty procesów przetwarzania odpadów. opis tej funkcji można uzyskać w wyniku aproksymacji wielomianowej kosztów przetwarzania odpadów ponoszonych w minionych okresach.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Na rysunku przedstawiono schematycznie rozważany problem zadania transportowo - produkcyjnego (ZPT) dla przypadku selektywnego gromadzenia odpadów, a następnie przewozu odpadów do istniejących punktów ich przetwarzania.



❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Model matematyczny zagadnienia:

Przedsiębiorstwo przetwarzające jednorodny surowiec posiada ***m*** - punktów gromadzenia surowca oraz ***n*** - zakładów przetwarzających ten surowiec.

Dodatkowo należy znać:

- jednostkowe koszty transportu od każdego punktu gromadzenia do poszczególnych zakładów przetwórczych,
- ilość surowca zgromadzonego w każdym punkcie dostaw,
- funkcje określające koszt przerobu surowca w każdym zakładzie w zależności od wielkości przerobu.

Funkcje określające koszty przerobu są funkcjami wypukłymi i kwadratowymi. Uwzględniają one tylko koszty zmienne, czyli zależne od rozmiarów produkcji.

Całość nabytego surowca musi być przewieziona do zakładów i tam przerobiona. Przyjmuje się, że zakłady są w stanie przetworzyć dostarczoną ilość surowca (znane są możliwości przerobowe zakładów).

Zwiększa to zdolności produkcyjne zakładów, ale powoduje także wzrost jednostkowych kosztów produkcji. Rosnące koszty przerobu są naturalnym ograniczeniem rozmiarów produkcji w każdym zakładzie.

Należy ustalić taki plan dostaw surowca do poszczególnych zakładów oraz przerobu surowca w tych zakładach, aby łączne koszty transportu i przerobu były minimalne.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Przyjęto następujące oznaczenia:
i - numer punktu gromadzenia (numer dostawcy),
j - numer zakładu przetwórczego (numer odbiorcy),
$x_{i,j}$ - ilość surowca przesłana od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
x_j - ilość surowca przerobiona przez j-tego odbiorcę,
b_j - zdolności przerobowe surowca dla j-tego odbiorcy
a_i - ilość surowca, jaką musi wysłać i-ty dostawca,
$c_{i,j}$ - jednostkowy koszt transportu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
$f_j(x_j)$ - koszt przerobu jednostek surowca w j-tym zakładzie (u j-tego odbiorcy).

Ponadto przyjęto, że wypukła funkcja kosztu f_j jest wielomianem drugiego stopnia postaci:

$$f_j(x_j) = c_j x_j + e_j x_j^2; \quad c_j, e_j > 0$$

gdzie:
c_j - opisuje minimalny koszt jednostkowy przerobu
e_j - wyznacza tempo wzrostu kosztu jednostkowego

Pierwsza pochodna funkcji kosztów przerobu określa koszt krańcowy przerobu:

$$F_j'(x_j) = c_j + 2e_j x_j$$

Natomiast druga pochodna - tempo wzrostu kosztu krańcowego:

$$F''(x_j) = 2e_j$$

Koszt przeciętny przerobu w j-tym zakładzie określony jest wzorem:

$$K_j^P(x_j) = c_j + e_j x_j$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Problem ustalenia optymalnego planu dostaw surowca i jego przerobu można przedstawić w postaci nieliniowego zadania decyzyjnego:

Poszukiwane są takie wartości zmiennych $x_{i,j}$ oraz x_j, aby:

Funkcja celu

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \min$$

minimalizuje łączne koszty transportu i przerobu

Przy warunkach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i, \quad (i = 1, \ldots, m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = x_j \le b_j, \quad (j = 1, \ldots, n);$$

$$x_{i,j} \ge 0, \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

Warunki: $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i$ - zapewniają, że każdy dostawca wyśle całość posiadanego surowca

Warunki: $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = x_j \le b_j$ - wymuszają przerób w j-tym zakładzie całego surowca jaki do niego został dostarczony, przy jednoczesnym nieprzekroczeniu zdolności przerobowych.

Zadanie to jest zadaniem programowania kwadratowego o specjalnej - transportowej strukturze.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 2

Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch rodzajów bocznic: własnej i dzierżawionej od PKP.

Koszty (w tys. zł) związane z postojem wagonów na bocznicach wyraża następująca funkcja kosztów:

$$f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2$$

gdzie:

t_1 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy własnej,

t_2 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy PKP.

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa maja w swym składzie 100 wagonów.

Dzienna zdolność przeładunkowa bocznicy własnej wynosi 10 wagonów, a bocznicy PKP 20 wagonów.

- Jak rozdzielić wagony pomiędzy bocznice, aby koszt postojowego był możliwie najniższy ?
- Podać koszt postojowego przy optymalnym rozdzieleniu wagonów pomiędzy obie bocznice.

  Uwaga: zakładamy, że z wyładowanych wagonów formułuje się skład, który może odejść dopiero wtedy, gdy wszystkie wagony są opróżnione. Tym samym postojowe liczy się do momentu wyładunku ostatniego wagonu na każdej z bocznic.
- Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek wagonów na bocznicy własnej a ile na PKP ?

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Matematyczny model problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne: $t_1, t_2 \geq 0$

Funkcja celu: $f(t_1,t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2 \to \min$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10t_1 + 20t_2 = 100 \Leftrightarrow g(t_1,t_2) = t_1 + 2t_2 = 10 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja Lagrange'a:

$$F(t_1,t_2,\lambda) = f(t_1,t_2) + \lambda\left[10 - t_1 - 2t_2\right] \to \min$$

Pochodne cząstkowe z funkcji Lagrange'a względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - t_1 - 2t_2, \quad \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0,5t_1 + 3 - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial t_2} = t_2 + 4 - 2\lambda$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - t_1 - 2t_2 = 0 \\ 0,5t_1 + 3 - \lambda = 0 \\ t_2 + 4 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 4 \\ \lambda_1^* = 4 \end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki dostateczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = 0,5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_1}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial t_2} = 2$$

Hesjan obrzeżony:

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dla zadania **na minimum** z $m = 1$ warunkami ograniczającymi wymagane jest, aby tylko jeden minor $|H_2| = |H|$ równy wyznacznikowi głównemu miał znak taki jak $(-1)^m = -1 < 0$.

Łatwo sprawdzić że wartość wyznacznika (obliczona np. stosując rozwinięcie Laplace'a względem 1 wiersza wynosi):

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (0 - 2 \cdot 0,5) = -1 - 2 = -3 < 0$$