

# **WYBRANE ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA I ANALIZY SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI**

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## **Literatura:**

- [1] Bogusław Filipowicz, Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych, Analiza i synteza systemów obsługi i sieci kolejkowych, PWN Warszawa 1996.
- [2] Jan Mikuś, Metody wspomagania procesu zarządzania, Modele sieciowe i obsługi masowej, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1993.

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## 1. Uwagi wstępne.

Przez „system obsługi masowej” rozumie się różnego rodzaju urządzenia ze *stanowiskami obsługi (kanalami obsługi)*, do których zgłaszają się w stałych lub losowych odstępach czasu *klienci*, którzy chcą być obsłużeni.

Przykładami tego rodzaju systemów może być:

<i>Numer systemu obsługi</i>	<i>Klient</i>	<i>Stanowisko obsługi Kanal obsługi</i>	<i>Rodzaj obsługi</i>
1	statek	nabrzeże portowe	załadunek lub rozładunek statku
2	pacjent	gabinet lekarski	badanie stanu zdrowia pacjenta
3	abonent telefoniczny	centrala telefoniczna	połączenie z wybranym numerem
4	samochód	stacja benzynowa	tankowanie paliwa
5	samochód	stacja obsługi samochodów	naprawa samochodu (badanie stanu technicznego)
6	maszyna	konserwator maszyn	naprawa uszkodzonej maszyny
7	widz kinowy	kasa biletowa	sprzedaż biletu do kina
8	kupujący w supermarkecie	kasa supermarketu	pobieranie należności za towar

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte, to zgłaszający się klient ma dwie możliwości:

- zrezygnować z obsługi
- ustawić się w kolejce (nie jest to skutkiem złej organizacji pracy, lecz faktem obiektywnym wynikającym z losowego czasu przybywania klientów do stanowisk obsługi oraz losowego czasu trwania ich obsługi)

### Uwaga:

Całkowita likwidacja kolejek (przez znaczne zwiększenie liczby stanowisk obsługi) jest rozwiązaniem nie tylko ekonomicznie najgorszym (*najbardziej kosztownym*), ale także fizycznie *niemożliwym* (zmniejszeniu się liczby klientów oczekujących na obsługę towarzyszyć będzie znaczny wzrost liczby niewykorzystanych stanowisk obsługi oczekujących na klientów - powstaje zatem *inny rodzaj kolejki*).

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Aby skrócić czas oczekiwania klientów w kolejce na obsługę menadżer systemu może:

- zwiększyć ilość stanowisk obsługi,
- skrócić czas obsługi klientów przez wszystkie kanały obsługi lub tylko ich część,

## Uwaga:

Oba rozwiązania wymagają poniesienia *dodatkowych kosztów* na inwestycje oraz powodują, że *wydluży się czas* w którym wszystkie stanowiska obsługi lub ich część *będą niewykorzystane* (system ponosi wtedy niepotrzebne straty). Menadżer systemu musi podjąć decyzje, które są pewnym *kompromisem* pomiędzy *interesami klientów* (brak kolejek, szybszy czas obsługi) oraz *interesami zarządzającego systemem* (niższe koszty funkcjonowania systemu, brak strat).

Zakres zastosowań *teorii masowej obsługi* obejmuje różne dziedziny działalności ludzkiej. Teoria ta znalazła zastosowanie m.in. przy rozwiązywaniu bardzo wielu *problemów ekonomicznych*. Do zadań z teorii masowej obsługi należą również zadania z zakresu *teorii niezawodności*, oraz *zarządzania zapasami*.

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

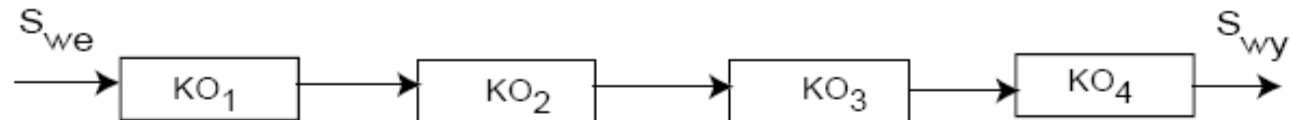
## 2. Struktura systemów obsługi i ich podstawowe elementy.

Systemy masowej obsługi (jak np. wielkie przedsiębiorstwa, systemy zaopatrzeniowo – magazynowe, systemy transportu miejskiego) poza dużą różnorodnością indywidualnych właściwości posiadają wiele wspólnych cech. Główną ich wspólną cechą jest występowanie w nich trzech podstawowych elementów:

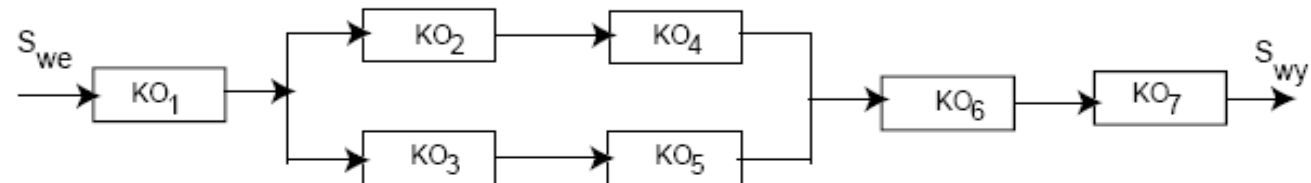
- *Źródło zgłoszeń* - zbiór potencjalnych *zgłoszeń* (klienci, życzenia, potrzeby, przedmioty) do systemu, które czekają na *obsługę* (sprzedaż, przegląd, obróbkę) przez urządzenia obsługujące.
- *Urządzenia obsługujące (kanały obsługi)* - realizują obsługę na podstawie zgłoszeń wchodzących do systemu. Mogą to być zarówno obsługujący zgłoszenia *ludzie* jak i *maszyny*.
- *Kolejka* (powstaje, gdy liczba wolnych kanałów obsługi jest mniejsza od liczby zgłoszeń). Nie jest to jedynie *zbiór oczekujących na obsługę*, ale także pewna struktura podlegająca pewnemu zbiorowi reguł – *regulamin kolejki*.

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

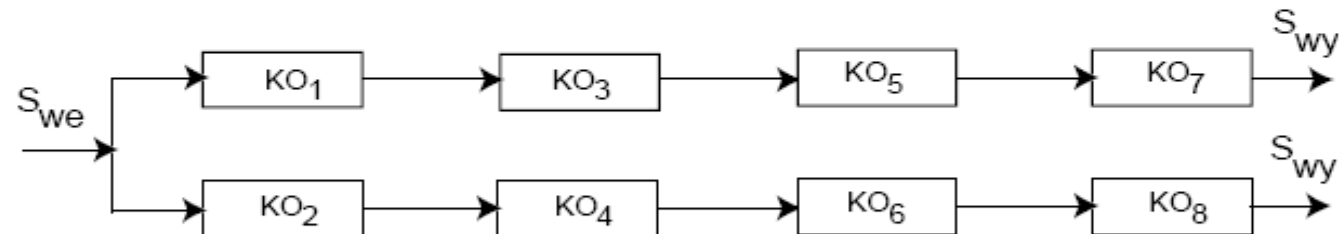
Schemat funkcjonowania przykładowych systemów masowej obsługi przedstawia poniższy rysunek:



a) szeregową strukturą wielofazowego systemu obsługi masowej



b) szeregowo - równoległą strukturą wielofazowego systemu obsługi masowej



c) równoległą strukturą wielofazowego systemu obsługi masowej

Powstałe w źródle zgłoszenia pojawiają się w stałych lub losowych chwilach czasu i tworzą tzw. **wejściowy strumień zgłoszeń** ( $S_{we}$ ). Każde zgłoszenie przechodzi kolejno przez kilka kanałów (faz) i przed każdym może czekać w kolejce (obsługa kończy się po przejściu wszystkich faz). Wszystkie obsłużone zgłoszenia tworzą **strumień wyjściowy** ( $S_{wy}$ ). Obsługa zgłoszeń przez oddzielny kanał obsługi podlega określonym prawidłowościom – tzw. **mechanizm obsługi** (zależy on m.in. od systemu, celu obsługi, kanału obsługi).



# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## Charakterystyka wejściowego strumienia zgłoszeń.

Zgłoszenia wchodzące do systemu (pojedynczo lub grupowo) tworzą tzw. *wejściowy strumień zgłoszeń*. Strumień zgłoszeń jest *określony* - jeśli znane są prawidłowości rządzące powstawaniem zgłoszenia w przedziale czasu  $[t, t + T]$  od chwili „t” – powrotu jego do źródła do chwili „t+T” ponownego jego pojawienia się w systemie (znana jest *probabilistyczna charakterystyka zmiennej losowej* „T”) oraz *liczba zgłoszeń* „N”.

Jeżeli w wejściowym strumieniu zgłoszeń nie występują przypadki pojawienia się dwóch lub większej liczby zgłoszeń (tzw. *strumień pojedynczy*), to jest on w pełni charakteryzowany za pomocą długości przedziału czasu „ $\xi_n$ ” pomiędzy kolejnym (n – „tym”,  $n=1,2,3,\dots$ ) oraz poprzednim (n-1 – „szym”) zgłoszeniem.

Wejściowy strumień zgłoszeń może być *strumieniem regularnym* (zgłoszenia wpływają w jednakowych odstępach czasu:  $\xi_n = const$ ). W praktyce przypadek ten bardzo rzadko występuje (czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami zależy od bardzo wielu czynników przypadkowych). Zatem najczęściej wejściowy strumień zgłoszeń jest *strumieniem losowym* ( $\xi_n$  - są zmiennymi losowymi o określonych funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa).

Jeżeli długości przedziałów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami nie wpływają wzajemnie na siebie (zmienne losowe  $\xi_n$  - są niezależne), to strumień nazywa się *strumieniem bez następstw (bez pamięci)*. W szczególności, gdy zmienne losowe  $\xi_n$  mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa to taki strumień nazywa się *strumieniem rekurencyjnym*.



## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W zależności od typu rozkładu zmiennych losowych  $\xi_n$  strumienie rekurencyjne posiadają pewne specyficzne nazwy. Często w systemach obsługi masowej rozpatruje się wejściowy rekurencyjny strumień zgłoszeń będący tzw. *strumieniem Poissona*.

Dla wejściowego strumienia zgłoszeń *typu Poissona* zmienne losowe  $\xi_n = t_n - t_{n-1}$  ( $n=1,2,\dots$ ) określające czas pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, a zatem posiadają rozkład prawdopodobieństwa określony za pomocą dystrybuanty postaci:

$$F(t) = P(\xi_n < t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad \lambda > 0, t \geq 0.$$

Wynika to z poniższego twierdzenia

### **Twierdzenie:**

Jeśli proces zgłoszeń do systemu jest *procesem Poissona* z intensywnością  $\lambda > 0$ , to odstępów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami (zmienne losowe  $\xi_n$ ) posiadają ten sam *rozkład wykładniczy* z parametrem  $\lambda > 0$ .

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Niech  $X(t)$  - będzie *sygnałowym procesem Poissona* (proces jednorodny o przyrostach niezależnych i pojedynczych) oraz oznacza ilość sygnałów (zgłoszeń) jakie pojawiły się w przedziale czasu  $[0,t]$ .

Dla strumienia wejściowego będącego *strumieniem Poissona* prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale  $[0,t]$  pojawiło się „k” – zgłoszeń (sygnałów) wynosi:

$$P(X(t) = k) = e^{-\lambda \cdot t} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}; k = 0, 1, 2, \dots$$

*Oczekiwana (średnia) ilość zgłoszeń* (sygnałów) w przedziale czasu  $[0,t]$  wynosi zatem:  $E[X(t)] = \lambda \cdot t$ . Stąd parametr „ $\lambda > 0$ ” – interpretujemy jako ilość zgłoszeń w jednostce czasu, a więc jako *intensywność zgłoszeń* dla strumienia typu Poissona.

W praktycznych zastosowaniach rozważa się także wejściowy strumień zgłoszeń *typu Erlanga* (rzędu „k”). W tym przypadku strumień napływających zgłoszeń może być *strumieniem Poissona*, lecz do obsługi dopuszcza się tylko jedno (ostatnie) z każdych „k” – kolejno napływających zgłoszeń.

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W dotychczasowych rozważaniach wejściowy strumień zgłoszeń charakteryzował się tym, że kolejne zgłoszenia pojawiały się pojedynczo. W praktyce występują również takie przypadki, gdzie zgłoszenia pojawiają się *grupowo* w dowolnych chwilach czasu i liczba tych zgłoszeń może być *losowa*.

W zależności od tego czy struktura probabilistyczna (rozkład) strumienia wejściowego *zmienia się w czasie czy też nie*, strumienie dzielimy na *niestacjonarne* oraz *stacjonarne* (znacznie prostsze do analizy).

### Oznaczmy przez:

$N_t$  - liczba zgłoszeń, które weszły do systemu od chwili początkowej „ $t_0 = 0$ ” do chwili czasu „ $t > 0$ ”,  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  kolejne chwile pojawiania się zgłoszeń, zaś przez  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  - liczba zgłoszeń (liczba serii zgłoszeń) pojawiająca się w tych chwilach.

**Uwaga:** Strumień wejściowy uważa się za określony jeśli znany jest rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego:

$$(\xi_1 = t_1 - t_0, \dots, \xi_n = t_n - t_{n-1}; X_1, \dots, X_n),$$

gdzie:  $\xi_j = t_j - t_{j-1}$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  - czas pomiędzy pojawieniem się „j-tej” serii zgłoszeń.

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Analiza strumienia zgłoszeń wpływającego do systemu obsługi określa jego typ:

- Jeżeli zmienne losowe  $\xi_1, \dots, \xi_n; X_1, \dots, X_n$  są niezależne to strumień wejściowy nazywamy z *ograniczonymi następstwami* (z ograniczoną pamięcią). Strumień taki określa się za pomocą następujących rozkładów:

$$F_n(t) = P(\xi_n < t); n=1,2,\dots \quad A_n(k) = P(\{X_n = k\}); k=0,1,\dots; n=1,2,\dots$$
$$P(\{\xi_1 < t_1^0, \dots, \xi_n < t_n^0; X_1 = k_1^0, \dots, X_n = k_n^0\}) = F_1(t_1^0) \cdot \dots \cdot F_n(t_n^0) \cdot A_1(k_1^0) \cdot \dots \cdot A_n(k_n^0)$$

- Jeżeli praktycznie niemożliwe jest pojawienie się dwóch lub więcej zgłoszeń w jednej i tej samej chwili, to strumień wejściowy nazywamy *strumieniem pojedynczym* (np. strumień Poissona).
- Jeżeli prawdopodobieństwo pojawienia się „k” zgłoszeń w przedziale czasu  $[t, t+T)$  nie zależy od tego ile zgłoszeń i w jaki sposób pojawiło się w czasie poprzedzającym ten przedział to strumień taki nazywa się *strumieniem bez następstw* (bez pamięci). Jeżeli  $N_{t,t+T}$  - oznacza liczbę zgłoszeń, które pojawiły się w przedziale czasu  $[t, t+T)$ , to warunek braku następstw dla strumienia wejściowego możemy zapisać następująco:

$$P(\{N_{t,t+T} = k \mid N_t = n\}) = P(\{N_{t,t+T} = k\}), \quad k, n - \text{całkowite nieujemne.}$$

**Inaczej:** brak pamięci określa wzajemną niezależność liczby zgłoszeń, które wpływają w rozłącznych przedziałach czasu

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Jeżeli dla dowolnej skończonej liczby rozłącznych przedziałów czasu:  $[t_1, t_1 + \Delta_1), \dots, [t_r, t_r + \Delta_r)$  prawdopodobieństwo pojawienia się w tych przedziałach odpowiednio:  $k_1, \dots, k_r$  - zgłoszeń zależy tylko od długości tych przedziałów, a nie od położenia względem pozostałych przedziałów, to strumień wejściowy nazywa się *strumieniem stacjonarnym*.
- Jeżeli strumień wejściowy jest: stacjonarny, pojedynczy oraz bez następstw, to jest tzw. *strumieniem prostym*.

## Charakterystyka mechanizmu obsługi.

Teoria masowej obsługi bada procesy, w których z jednej strony powstaje zapotrzebowanie na wykonanie pewnych prac (usług), a z drugiej powstaje konieczność zaspokojenia tych potrzeb. Związane jest to z odpowiednim mechanizmem obsługi, który *określa sposoby postępowania ze zgłoszeniami, ale od strony kanału obsługi*.

Do podstawowych charakterystyk kanału obsługi należą:

- *Czas trwania obsługi.*
- *Zdolność przepustowa systemu*
- *Dostępność systemu*



# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Czas trwania obsługi - to przedział czasu niezbędny dla realizacji obsługi dla pojedynczego zgłoszenia.

Przyjmuje się, że czasy trwania obsługi dla poszczególnych zgłoszeń są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach.

Jeżeli jednak występuje *kilka rodzajów zgłoszeń*, to każdy rodzaj ma *własny czas trwania* obsługi. Podobnie każdy *kanal obsługi* (jeśli jest ich wiele) może posiadać własny czas trwania obsługi.

Typ rozkładu czasu trwania obsługi określa nazwę odpowiedniej obsługi (możemy mieć do czynienia z obsługą: *wykładniczą, deterministyczną, Erlanga, dowolną*). Badania systemów obsługi masowej pokazują, że najczęściej rozkład czasu trwania obsługi jest *rozkładem wykładniczym*.

Niech  $\eta_k$  - oznacza czas konieczny do obsługi „k-tego” zgłoszenia ( $k=1,2,\dots$ ) Zakładając ponadto, że zmienne losowe  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  są niezależne i mają ten sam rozkład, to rozkład prawdopodobieństwa dla wykładniczego czasu trwania obsługi „k - tego” zgłoszenia określa dystrybuanta:  
$$B(t) = P(\eta_k < t) = 1 - e^{-\nu \cdot t}.$$

Stąd otrzymujemy, że *średni czas trwania obsługi* dla jednego zgłoszenia (w przypadku rozkładu wykładniczego) wynosi:  $t_{sr} = E[\eta_k] = \frac{1}{\nu}$ . Odwrotność

średniego czasu obsługi nazywamy *intensywnością obsługi*:  $\nu = \frac{1}{t_{sr}}$  (liczba zgłoszeń obsłużona w jednostkowym przedziale czasu).

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Jeżeli system obsługi jest systemem wieloetapowym (każde zgłoszenie jest obsługiwane przez jeden kanał w „ $m$ ” etapach), zaś czas trwania obsługi dla każdego etapu ma identyczny rozkład wykładniczy, to rozkład pełnego czasu trwania obsługi (po zakończeniu wszystkich etapów) jest *rozkładem Erlanga*

postaci:  $B(t) = P(\eta < t) = 1 - e^{-\nu t} \left[ 1 + \frac{\nu t}{1!} + \frac{(\nu t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\nu t)^m}{m!} \right]$

**Zdolność przepustowa systemu** – to *maksymalna liczba zgłoszeń*, które mogą być jednocześnie obsługiwane przez system.

W zależności od liczby jednocześnie obsługiwanych zgłoszeń rozróżniamy systemy: *jednokanałowe* (tylko jedno zgłoszenie w tym samym czasie obsługiwane) oraz *wielokanałowe* (więcej niż jedno zgłoszenie może być jednocześnie obsługiwane).

W praktyce spotyka się również tzw. *systemy wielofazowe* (każde zgłoszenie musi przejść przez kilka kanałów obsługi i przy każdym z nich może czekać w kolejce).



# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

**Dostępność systemu** – określa dostęp zgłoszeń do różnych kanałów obsługi. System jest w *pełni dostępny*, gdy każde zgłoszenie może być obsłużone przez dowolny kanał. Jeżeli jest to niemożliwe, to system należy do grupy systemów *niepełnodostępowych*.

Najczęściej w systemach masowej obsługi zgłoszenia są obsługiwane zgodnie z *kolejnością* ich napływania. Mogą jednak zdarzyć się takie systemy obsługi, w których niektóre zgłoszenia są *uprzywilejowane* (systemy z *priorytetem*).

Mogą być to systemy z *priorytetem bezwzględnym* (przerywana jest obsługa zgłoszeń o niższym priorytecie) oraz o *priorytecie względnym* (zgłoszenie o wyższym priorytecie musi czekać na zakończenie rozpoczętej obsługi zgłoszenia o niższym priorytecie). Możliwe zasady obsługi zgłoszeń zawiera *regulamin* (dyscyplina) obsługi.

**Uwaga:** Do charakterystyk mechanizmu obsługi należy również *niezawodność kanału obsługi* (określa się ją za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla *przedziału czasu sprawnej - niezawodnej pracy* kanału obsługi oraz dla *przedziału czasu trwania jego odnowy* – naprawy w sytuacji awarii).

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## Charakterystyka regulaminu kolejek.

Regulamin kolejki – to reguła wyboru zgłoszenia, które ma zostać obsłużone, gdy tylko zakończy się obsługa poprzedniego.

Jeżeli zgłoszenia ustawiają się w kolejce w kolejności ich przybywania to taki porządek tworzenia kolejki nazywa się *naturalnym*.

Występują też inne zasady w *regulaminie kolejki*: wybór zgłoszenia, którego obsługa zajmuje najmniej czasu, *losowy* wybór zgłoszeń, *priorytetowy* (względny lub bezwzględny) wybór zgłoszeń oraz *mieszany* wybór zgłoszeń.

Regulamin kolejki obejmuje również:

- Ograniczenia liczby oczekujących zgłoszeń (*systemy z odmową* lub ze stratą).
- Ograniczenia dotyczące czasu oczekiwania na obsługę oraz pobytu zgłoszenia w systemie (mogą być to wielkości stałe lub zmienne losowe).
- Przepisy regulujące możliwości przechodzenia z jednej kolejki do drugiej.

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## 3. Klasyfikacja systemów masowej obsługi.

Najczęściej systemy masowej obsługi charakteryzowane są za pomocą kodu zaproponowanego przez D. G. Kendalla (jednego z twórców teorii). Oznaczenie systemu masowej obsługi ma postać:  $X|Y|n|N|f_i^j$ , gdzie:

„X” – oznacza typ strumienia wejściowego,

„Y” – oznacza typ rozkładu czasu trwania obsługi,

Przyjmuje się kod X=M – oznaczający Poissonowski (Markowski) strumień zgłoszeń (wykładniczy rozkład czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami), Y=M – wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi, X=D – deterministyczne (regularne) zgłoszenia klientów do systemu, Y=D – stały czas obsługi, X=G – dowolny proces zgłoszeń klientów do systemu, Y=G – dowolny rozkład prawdopodobieństw czasu trwania obsługi, X= $E_k$  – rozkład Erlanga (z parametrami  $\lambda, k$ ) odstępów czasu między zgłoszeniami, Y= $E_k$  – rozkład Erlanga (z parametrami  $\nu, k$ ) prawdopodobieństw czasu trwania obsługi.

„n” – liczba kanałów w systemie (system z nieograniczoną liczbą kanałów obsługi oznacza się  $n = \infty$ ),

„N” – maksymalna liczba miejsc oczekiwania (systemy z odmową mają  $N=0$ , dla nieograniczonej kolejki  $N = \infty$ ),

$f_i^j$  – regulamin obsługi (wskaźnik „i”) i regulamin kolejki (wskaźnik „j”)

Znaczenie indeksów: „i=0” – *niepriorytetowa* obsługa (porządek naturalny FIFO lub odwrotny LIFO), „i=1” *względny* priorytet obsługi, „i=2” – *bezwzględny* priorytet obsługi, „j=0” – priorytet w kolejce *nie obowiązuje* (zgłoszenie, które zastaje wszystkie miejsca zajęte w kolejce odchodzi), „j=2” – *bezwzględny* priorytet zgłoszeń (zgłoszenie z wyższym priorytetem usuwa z kolejki jedno zgłoszenie z niższym priorytetem).

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## 4. Przykłady systemów masowej obsługi i ich podstawowe charakterystyki.

Bardzo ważną charakterystyką systemów masowej obsługi jest prawdopodobieństwo:  $P_k(t) = P(V_t = k)$  - losowo wchodzące do systemu zgłoszenie w chwili „t” zastaje w nim „k” innych zgłoszeń (jako „k-te” ustawia się w kolejce). Rozkład tego prawdopodobieństwa zależy od czasu. W praktyce można jednak zauważyć, że dla pewnych systemów (*systemy stabilne*) wpływ czasu na charakterystyki zmniejsza się wraz z jego upływem. Jest to ważna własność ustalania się tzw. *trybu stacjonarnego systemu*. Wariant stacjonarny interpretuje się jako graniczny wariant systemu niestacjonarnego:  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k$ .

Nie dla każdego systemu *wariant stacjonarny istnieje*. Systemy z ograniczoną liczbą miejsc oczekiwania zawsze mają wariant stacjonarny, gdy intensywności zgłoszeń (parametr  $\lambda$ ) oraz obsługi (parametr  $\nu$ ) są skończone. Dla systemów z nieograniczoną liczbą miejsc oczekiwania wariant regularny istnieje tylko

wtedy, gdy tzw. *współczynnik obciążenia* (zajętości systemu)  $\frac{\lambda}{n\nu} < 1$ .

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu**  $M|M|1|\infty$  - jest to jednokanałowy system obsługi, z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanał obsługi posiada wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności  $0 < \nu < \infty$ , zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością  $0 < \lambda < \infty$ ). Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa zgodnie z kolejnością przybyć do systemu (porządek naturalny). Dla takiego systemu *wariant regularny* istnieje (system jest stabilny), gdy  $\lambda < \nu$  (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych). Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez  $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$  (dla tego systemu jest to *obciążenie systemu*), to prawdopodobieństwo  $P_k = (1 - \rho)\rho^k$ ,  $k=0,1,2,\dots$

*Prawdopodobieństwo, że w systemie w kolejce oczekuje więcej niż  $r_0$  zgłoszeń wynosi:*

$$\begin{aligned} P(r > r_0) &= P_{r_0+2} + P_{r_0+3} + \dots = (1 - \rho)\rho^{r_0+2} + (1 - \rho)\rho^{r_0+3} + \dots = \\ &= (1 - \rho)\rho^{r_0+2} [1 + \rho + \rho^2 + \dots] = \rho^{r_0+2} \end{aligned}$$

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

*Średnia liczba zgłoszeń w systemie* obsługi wynosi:  $E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}$ ,

*Wariancja liczby zgłoszeń w systemie* obsługi wynosi:

$$D^2[V] = E[V^2] - E[V]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k - \left( \sum_{k=0}^{\infty} kP_k \right)^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

*Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce* wynosi:  $\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ ,

*Wariancja liczby zgłoszeń znajdujących się w kolejce* wynosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_{k+1} - \left( \sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} \right)^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$



## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

*Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż  $t_0 \geq 0$  jednostek czasu wyznacza się następująco:*

$$P(T > t_0) = \rho e^{-(\nu - \lambda)t_0}$$

*Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce (na obsługę) oraz jego wariancja wynoszą:  $E[T] = \frac{\rho}{\nu - \lambda}$ ,  $D^2[T] = \frac{\rho(2 - \rho)}{(\nu - \lambda)^2}$ ,*

*Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie przebywać w systemie dłużej niż  $t_0 \geq 0$  jednostek czasu wyznacza się następująco:*

$$P(Z > t_0) = e^{-(\nu - \lambda)t_0}$$

*Średni całkowity czas przebywania zgłoszenia w systemie oraz jego wariancja wynoszą:  $E[Z] = \frac{1}{\nu - \lambda}$ ,  $D^2[Z] = \frac{1}{(\nu - \lambda)^2}$ ,*



## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu  $M|M|n|\infty$**  - jest to system obsługi składający się z „n” kanałów obsługi z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności  $0 < \nu < \infty$ , zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością  $0 < \lambda < \infty$ ). Zgłoszenia czekają w kolejce tylko wtedy, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (*w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału*) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (*porządek naturalny*). Dla takiego systemu *wariant regularny* istnieje (system jest stabilny), gdy  $\lambda < n\nu$  (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych przez wszystkie kanały). Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez  $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ ,

to prawdopodobieństwo:  $P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0$ , dla  $k=0,1,2,\dots,n$ , oraz  $P_k = \frac{\rho^k}{n!n^{k-n}} P_0$ ,

dla  $k=n+1,n+2,\dots$ , gdzie:  $P_0 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} \right)^{-1}$ .

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

*Prawdopodobieństwo*, że zgłoszenie *będzie obsłużone bez czekania* (w systemie znajduje się co najwyżej  $n-1$  zgłoszeń) wynosi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\rho^k}{k!} \right)$$

*Prawdopodobieństwo*, że zgłoszenie *będzie oczekiwało w kolejce* wynosi:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{n}{n-\rho} P_n$$

*Prawdopodobieństwo*, że  $1 \leq s_0 \leq n-1$  *kanalów obsługi jest zajętych*

wynosi:  $P(S = s_0) = P_{s_0} = \frac{\rho^{s_0}}{s_0!} P_0$

*Prawdopodobieństwo*, że *długość kolejki wynosi*  $r_0 \geq 0$  obliczamy ze wzoru:

$$P(R = r_0) = P_{n+r_0} = \frac{\rho^{n+r_0}}{n!n^{r_0}} P_0$$

*Prawdopodobieństwo*, że *w kolejce oczekuje więcej* niż  $r_0 \geq 0$  zgłoszeń wynosi:

$$\begin{aligned} P(R > r_0) &= P_{n+r_0+1} + P_{n+r_0+2} + \dots = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \left[ 1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \frac{n}{n-\rho} = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0}(n-\rho)} P_0 \end{aligned}$$

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

*Średnia liczba zgłoszeń w kolejce* wynosi:  $\sum_{r=0}^{\infty} r P_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{(n-\rho)^2} P_0$

*Średnia liczba zajętych kanałów* (istotna informacja dla zarządzającego systemem) wynosi:  $\sum_{k=1}^n k P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n P_k = \rho = \frac{\lambda}{\nu}$ . Zatem *średnia liczba wolnych kanałów* wynosi:  $n - \rho = n - \frac{\lambda}{\nu} = n \left( 1 - \frac{\lambda}{n\nu} \right)$ .

*Średnia liczba zgłoszeń w systemie* wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = \rho + P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{(n-\rho)^2}$$

*Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż*  $t_0 \geq 0$  *jednostek czasu wyznacza się następująco:*

$$P(T > t_0) = \frac{n}{n-\rho} P_n e^{-(n-\rho)\nu \cdot t_0}$$

*Średni czas oczekiwania na obsługę* (w kolejce) oraz jego *wariancja* wynoszą:  $E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$ ;  $D^2[T] = \frac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu**  $M|M|n|N$  - jest to system obsługi składający się z „n” kanałów obsługi z odmową (ograniczona liczba „ $N < \infty$ ” miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności  $0 < \nu < \infty$ , zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością  $0 < \lambda < \infty$ ). W omawianym systemie może znajdować się jednocześnie najwyżej „n+N” zgłoszeń, z których „n” - będzie obsługiwanych, zaś „N” - będzie czekać w kolejce. Napływające w tym czasie zgłoszenia otrzymują **odmowę** i odchodzą nie obsłużone. Przyjęte zgłoszenia albo od razu są obsługiwane (jeśli jest wolny kanał) lub czekają w kolejce (jeśli wszystkie kanały obsługi są zajęte). Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (**w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału**) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (**porządek naturalny**). Dla takiego systemu **wariant regularny (system jest stabilny)** istnieje zawsze. Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez  $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ , to prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n, \text{ oraz } P_k = \frac{\rho^k}{n!n^{k-n}} P_0, \text{ dla } k=n+1,n+2,\dots,n+N,$$

$$\text{gdzie: } P_0 = \left( \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\rho}{n} \right)^k \right)^{-1}.$$

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie nie zostanie przyjęte (dostanie odmowę)*, czyli *prawdopodobieństwo straty zgłoszenia* wynosi:

$$P_{n+N} = \frac{\rho^n}{n!} \left( \frac{\rho}{n} \right)^N P_0$$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie zostanie przyjęte* do obsługi (procentowa przepustowość systemu – *g*) wynosi:  $g = 1 - P_{n+N}$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie będzie obsłużone bez czekania* wynosi:  $\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\rho^k}{k!} \right)$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie *będzie musiało czekać w kolejce* wynosi:  $\sum_{k=0}^{N-1} P_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{\rho}{n} \right)^k$

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

*Średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w kolejce* wynosi:

$$\sum_{k=1}^N kP_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^N k \left( \frac{\rho}{n} \right)^k$$

*Średnia liczba zajętych kanałów* wynosi:  $\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=1}^N nP_{n+k} = \rho(1 - P_{n+N})$ .

*Średnia liczba wolnych kanałów* (z powodu braku zgłoszeń) wynosi:  $n - \rho(1 - P_{n+N})$ .

*Średnia liczba zgłoszeń w systemie (równa średniej liczbie zajętych kanałów obsługi plus średniej liczbie zgłoszeń czekających w kolejce)* wynosi:

$$E[V] = \rho(1 - P_{n+N}) + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^N k \left( \frac{\rho}{n} \right)^k$$

*Średnia liczba zgłoszeń, które otrzymały odmowę* wynosi:  $\lambda P_{n+N}$  (w jednostce czasu). Średni *odstęp czasu między dwoma kolejnymi zgłoszeniami*, które otrzymały odmowę wynosi:  $\frac{1}{\lambda P_{n+N}}$ .

*Średnia liczba wolnych miejsc w kolejce* jest równa:  $N - E[V]$ .

*Średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi* (oczekiwania w kolejce)

wynosi:  $E[T] = \frac{n\nu P_n}{(n\nu - \lambda)^2} \left[ 1 - (N+1) \left( \frac{\rho}{n} \right)^N + N \left( \frac{\rho}{n} \right)^{N+1} \right]$ .

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu**  $M|M|n|0$  - jest to szczególny przypadek systemu poprzedniego, w którym występuje *strata zgłoszeń* (każde zgłoszenie, które przychodzi i zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte odchodzi nie obsłużone). Dla tego systemu prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n, \text{ gdzie: } P_0 = \left( \sum_{k=0}^n \left( \frac{\rho^k}{k!} \right) \right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie nie zostanie przyjęte* (stracone) wyraża się wzorem:  $P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$ , zaś prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie zostanie przyjęte* (a tym samym *obsłużone bez czekania*) wynosi:

$$1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Średnia *liczba zajętych kanałów obsługi* (tym samym średnia *liczba zgłoszeń w systemie*) wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^n k P_k = \rho \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\rho^k}{k!} \right) P_0 = \rho(1 - P_n).$$



# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## Przykład praktyczny:

Do stacji technicznej obsługi samochodów mającej  $n=4$  identycznie wyposażone kanały zgłaszają się klienci. Strumień zgłoszeń jest typu Poissona z intensywnością  $\lambda = 3$  zgłoszenia na godzinę. Intensywność obsługi przez każdy kanał obsługi (z wykładniczym czasem trwania obsługi) wynosi  $\nu = 2$  klientów na godzinę. Zakładamy, że jest to system bez odmowy (nieograniczona ilość miejsc w kolejce).

- Sprawdzić czy system jest stabilny ? (stacjonarny):

Warunkiem koniecznym aby system był stabilny jest by:  $\lambda < n\nu$ . W naszym przykładzie  $\lambda = 3 < 4 \cdot 2 = 8$ . Zatem system jest stabilny.

- Obliczyć: średni (w procentach) *czas przestoju wszystkich kanałów* obsługi systemu -  $P_0$ , średnią liczbę *zajętych kanałów obsługi*, prawdopodobieństwo, że *klient będzie czekał w kolejce*, średnią *liczbę klientów w kolejce* oraz średni *czas oczekiwania klienta* na rozpoczęcie obsługi.

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Procentowy (średni) czas przestoju wszystkich kanałów obsługi

$$P_0 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \left( 1 - \frac{\rho}{n} \right)^{-1} \right)^{-1} = \left( \sum_{k=0}^3 \frac{1.5^k}{k!} + \frac{1.5^4}{4!} \left( 1 - \frac{1.5}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} = 0,22$$

$$\text{bo } \rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Średnia liczba zajętych kanałów obsługi wynosi:  $\rho = 1.5$

Prawdopodobieństwo, że klient będzie czekał w kolejce wynosi:

$$\Pi = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{1.5^4}{3!(4-1.5)} 0.22 = 0,074.$$

Średnia liczba klientów w kolejce wynosi:

$$P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} = 0.22 \frac{1.5^5}{3! (4-1.5)^2} = 0,045$$

**- kolejka praktycznie nie istnieje**

Średni czas oczekiwania klienta na rozpoczęcie obsługi wynosi:

$$E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{0.074}{4 \cdot 2 - 3} = 0,015[h] \text{ (0,9 minuty).}$$

System jest wyraźnie niedociążony (obciążenie systemu:  $\frac{\lambda}{n\nu} = \frac{3}{8}$ ).

# ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

## Przykład praktyczny 2:

Hipermarket posiada 6 stanowisk kasowych. W ciągu godziny średnio zgłaszało się do kas 60 klientów (intensywność zgłoszeń do systemu  $\lambda = 60 \left[ \frac{\text{os.}}{\text{godz.}} \right]$ ). Średni czas ich obsługi na stanowisku kasowym wynosi 2 minuty, tym samym jedna kasa może obsługiwać w ciągu 1 godziny  $\nu = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30 \left[ \frac{\text{os.}}{\text{godz.}} \right]$  (intensywność obsługi dla jednego kanału obsługi). Stratę jaką ponosi hipermarket z tytułu przebywania klienta w systemie przez każdą godzinę oszacowano na poziomie 12 zł. Koszt uruchomienia 1 kasy wynosi 10 zł na godzinę (wynagrodzenie godzinowe kasjerki).

Powyższy system masowej obsługi interpretujemy jako system wielokanałowy ( $n=6$  stanowisk obsługi), z wykładniczym rozkładem czasu pojawiania się zgłoszeń (o intensywności  $\lambda > 0$ ) oraz wykładniczym rozkładem czasu trwania obsługi (o intensywności  $\nu > 0$ ). Porządek obsługi zgłoszeń oraz tworzenia się kolejki jest porządkiem naturalnym (zgodnie z kolejnością przybyć).

Jest to system bez odmowy (nieograniczona liczba miejsc w kolejce) – czyli każdy klient, który zastanie wszystkie kasy zajęte może ustawić się w kolejce i czekać na obsługę. Tworzy się jednak tyle kolejek ile jest czynnych kanałów obsługi ( $n=6$ ).

Każdy kanał możemy interpretować jako pojedynczy system obsługi elementarny (jednokanałowy) obsługujący zgłoszenia kierowane do niego zgodnie z zasadą minimalizacji każdej kolejki.

# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Ile kas uruchomić, aby system obsługi generował jak najmniejsze koszty ?

Aby kolejki stale nie rosły (czyli aby system był systemem funkcjonującym w ustabilizowanych warunkach – system stacjonarny) musi być spełniony warunek

$$\frac{\lambda}{n \cdot \nu} < 1 \Rightarrow \frac{60}{n \cdot 30} < 1 \Rightarrow n > 2 \quad (n=3 \text{ kasy są minimalną liczbą kanałów obsługi}).$$

Średnia liczba zgłoszeń (klientów) w systemie z jednym kanałem obsługi dana jest wzorem:  $\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\nu-\lambda}$ , bo  $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ , dlatego średnia liczba osób w każdym elementarnym systemie obsługi (pojedyncze stanowisko kasowe) dana jest wzorem:  $L_s^{(n=1)} = \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n}$ .

Średnia liczba osób w całym systemie obsługi wynosi:

$$L_s = n \cdot L_s^{(n=1)} = n \cdot \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n} = \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n}.$$

Łączny koszt obsługi całego systemu składającego się z n – kanałów obsługi (n kas) wynosi:  $K(n) = b \cdot L_s + p \cdot n = b \cdot \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n} + p \cdot n$ ,

gdzie:

b - strata jaką ponosi system, gdy pojedynczy klient przebywa przez jednostkę czasu w systemie (b=12 zł – strata na godzinę)

p – koszt utrzymania kanału obsługi w jednostce czasu (p=10 zł – koszt godzinowy)

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Zadanie decyzyjne sprowadza się do znalezienia takiej liczby kanałów obsługi  $n^*$ , aby:

$$K(n^*) = \min \{K(n) : n \in D\},$$

gdzie  $D$  – zbiór dopuszczalnych wariantów liczby kanałów obsługi

$n^*$  - można wyznaczyć stosując przegląd zupełny zbioru  $D$ , albo stosując rachunek różniczkowy do wyznaczenia minimum funkcji  $K(n)$ .

Przegląd zupełny rozwiązań dopuszczalnych wygląda następująco:

$$K(3) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/3} + 10 \cdot 3 = 102$$

$$K(4) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/4} + 10 \cdot 4 = 88 - \text{ optymalne } n^* = 4$$

$$K(5) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/5} + 10 \cdot 5 = 90$$

$$K(6) = 12 \cdot \frac{60}{30 - 60/6} + 10 \cdot 6 = 96$$

## ❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Wyznaczyć charakterystyki osobowo-czasowe dla optymalnego systemu (n=4) kasami obsługi.

Średnia liczba osób w całym systemie obsługi wynosi:

$$L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n} = \frac{60}{30 - 60 / 4} = 4 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce w elementarnym systemie z pojedynczym stanowiskiem kasowym dana jest wzorem:

$$L_k^{(n=1)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda / n}{\nu} \cdot \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n}, \text{ gdyż } \rho = \frac{\lambda / n}{\nu}.$$

Zatem dla całego systemu obsługi składającego się z n=4 – elementarnych systemów jednokanałowych otrzymujemy:

$$L_k = n \cdot L_k^{(n=1)} = \frac{\lambda / n}{\nu} \cdot \frac{\lambda / n}{\nu - \lambda / n} \cdot n = \frac{\lambda / n}{\nu} \cdot L_s, \text{ gdyż } L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n}$$

$$L_k = \frac{60 / 4}{30} \cdot 4 = 2 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba osób w obsłudze wynosi:  $L_o = L_s - L_k = \frac{\lambda}{\nu} = 2 \text{ [osoby]}$

## □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

średni czas przebywania w systemie,  
średni czas oczekiwania na obsługę w kolejce,  
średni czas obsługi klienta,

są równe odpowiednim charakterystykom dla elementarnego systemu masowej obsługi (z jednym stanowiskiem kasowym)

$$T_s = T_s^{(n=1)} = \frac{1}{\nu - \lambda / n} = \frac{1}{30 - 60 / 4} = \frac{1}{15} \text{ [godz.]} \text{ (4 minuty)}$$

$$T_k = T_k^{(n=1)} = \frac{\frac{\lambda / n}{\nu}}{\nu - \lambda / n} = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot \frac{\lambda}{\nu - \lambda / n} = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot L_s = \frac{1}{30 \cdot 4} \cdot 4 = \frac{1}{30} \text{ [godz.]} \\ \text{(2 minuty)}$$

$$T_o = T_o^{(n=1)} = T_s - T_k = 4 - 2 = 2 \text{ [min.]}$$



# □ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Ze względu na niskie płace personelu ( $p=10$  zł) udało się zatrudnić tylko 3 kasjerki. Wyznaczyć charakterystyki osobowo-czasowe dla systemu z ( $n=3$ ) kasami obsługi.

Średnia liczba osób w systemie obsługi wynosi:

$$L_s = \frac{\lambda}{\nu - \lambda/n} = \frac{60}{30 - 60/3} = 6 \text{ [osób]}$$

Średnia liczba klientów czekających w kolejce dla systemu z  $n=3$  kasami obsługi wynosi:

$$L_k = \frac{\lambda/n}{\nu} \cdot L_s = \frac{60/3}{30} \cdot 6 = 4 \text{ [osoby]}$$

Średnia liczba osób obsługiwanych wynosi:  $L_o = L_s - L_k = 6 - 4 = 2$  [osoby]

Średni czas przebywania w systemie, średni czas oczekiwania na obsługę w kolejce oraz średni czas obsługi klienta wynosi w tym przypadku:

$$T_s = \frac{1}{\nu - \lambda/n} = \frac{1}{30 - 60/3} = \frac{1}{10} [\text{godz.}] \text{ (6 minut)}$$

$$T_k = \frac{1}{\nu \cdot n} \cdot L_s = \frac{1}{30 \cdot 3} \cdot 6 = \frac{1}{15} [\text{godz.}] \text{ (4 minuty)}$$

$$T_o = T_s - T_k = 6 - 4 = 2 \text{ [min.]}$$

- Ile warto zapłacić czwartej kasjerce aby zachęcić ją do pracy

Ponieważ  $K(3)=102$  zł, zaś  $K(4)=88$  zł, to opłaca się dodatkowo zapłacić co najwyżej 14 zł (będzie zarabiać 24 zł na godzinę)