❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

4. Przykłady nieliniowych problemów decyzyjnych – zagadnienie wyboru środków przekazu reklamy.

Załóżmy, że firma dysponuje pewną ilością środków pieniężnych na reklamę nowego produktu w środkach masowego przekazu (do wyboru n – czasopism, w których można zamówić reklamę produktu).

Zasięg reklamy w danym czasopiśmie zależy od:

- nakładu czasopisma;
- od tego ile razy zamieszczamy reklamę w tym czasopiśmie.

Jeżeli reklamę w danym czasopiśmie zamieścimy 8 razy to na pewno firma dotrze do większej liczby czytelników niż gdyby zamieściła reklamę tylko 2 razy. Nie będzie to jednak zasięg 4 – krotnie większy (gdyż do niektórych czytelników trafiamy z tą samą reklamą kilkakrotnie). Zatem funkcja zasięgu reklamy powinna być funkcją rosnącą (w zależności od liczby zamieszczeń reklamy), ale funkcją wklęsłą (pierwsza pochodna malejąca). Może być to dla przykładu wklęsła funkcja kwadratowa.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Oznaczmy przez:

A – fundusz na reklamę;
a_j – koszt zamieszczenia jednej reklamy w j – tym czasopiśmie;
b_j – minimalna liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
d_j – maksymalna liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
x_j – liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
$f_j(x_j)$ - zasięg reklamy (liczba czytelników) w j – tym czasopiśmie, jeżeli dokonano w nim x_j – zamieszczeń;
$f_j(x_j) = c_j x_j - r_j x_j^2$ - analityczna postać zasięgu reklamy, gdzie: c_j – maksymalny zasięg w przypadku jednostkowej reklamy w j – tym czasopiśmie, r_j – tempo spadku przeciętnego zasięgu w przypadku powtórzeń;

Zadanie decyzyjne:

Znaleźć takie wartości zmiennych x_j, aby:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max$$

przy warunkach:

$$\sum_{j-1}^{n} a_j x_j \le A \quad \text{(koszty reklamy)}; \quad b_j \le x_j \le d_j \quad (j = 1, \ldots, n) \quad \text{(liczba zamieszczeń)};$$

x_j – całkowite.

Uwaga: zadanie to jest bardzo trudne do rozwiązania ze względu na nieliniową funkcje celu i całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych. Jeżeli pominiemy warunek całkowitoliczbowości staje się zadaniem programowania kwadratowego i można je rozwiązać stosując np. algorytm Beale'a (zob. Ignasiak: Badania Operacyjne – str 166).

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Nieliniowe zagadnienie transportowo-produkcyjne do zagadnienia utylizacji odpadów

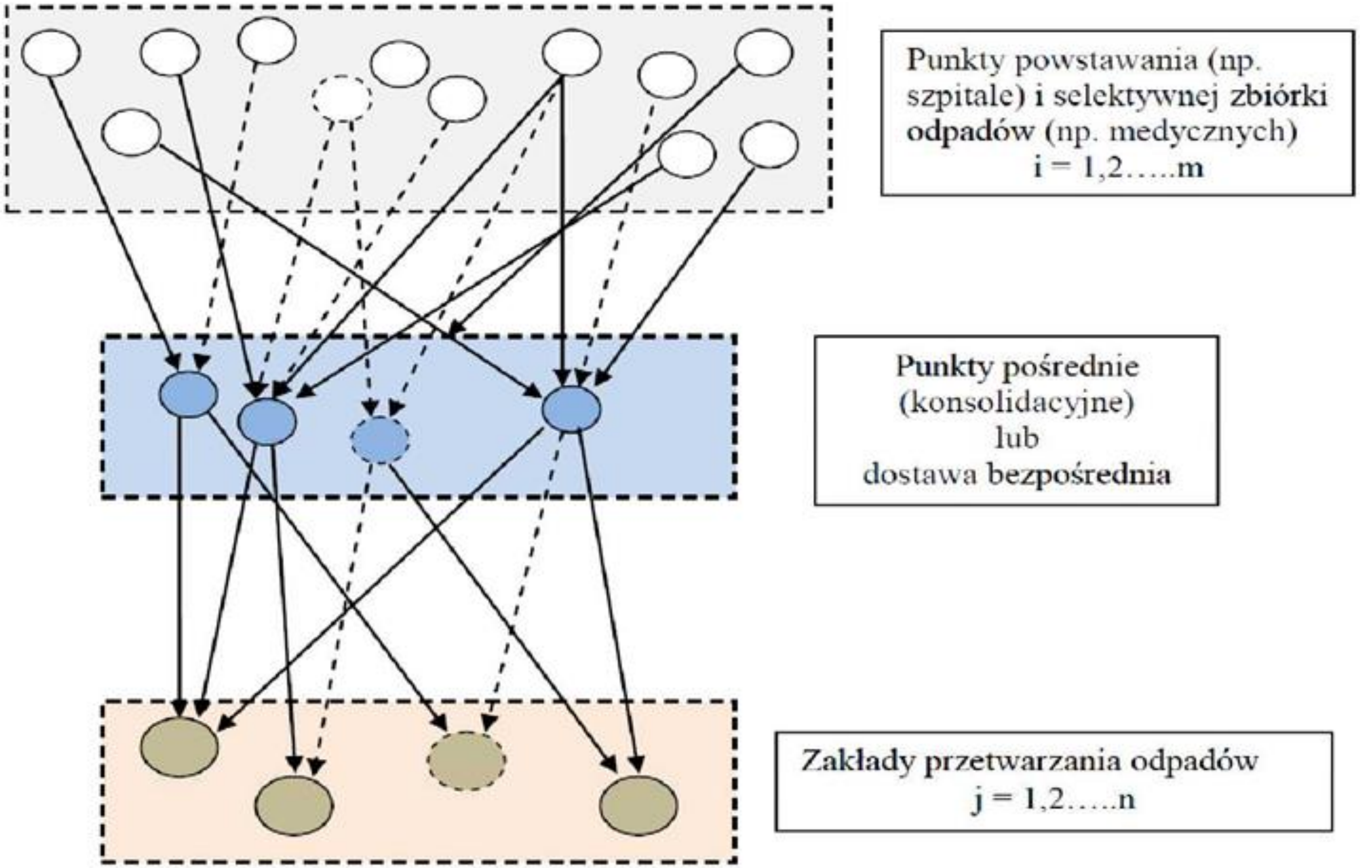
W odniesieniu do przetwarzania odpadów problem transportowo - produkcyjny powinno się rozważyć w co najmniej dwóch aspektach:

- **aspekt ogólny:** dla istniejącej sieci punktów gromadzenia odpadów i zakładów ich przetwarzania, zgodnie z przyjętym algorytmem, należy wyznaczyć optymalny pod względem kosztowym rozdział zadań przewozowych do odpowiednich zakładów przetwarzania odpadów,
- **aspekt szczególny:** dla istniejącej sieci punktów gromadzenia odpadów i jednego zakładu (np. spalarnia odpadów niebezpiecznych) przetwarzającego odpady co najmniej dwoma technologiami, należy zoptymalizować rozdział zadań przewozowych i produkcyjnych na poszczególne technologie przetwarzania.

W obydwu zadaniach bardzo ważna (konieczna) jest znajomość funkcji (nieliniowej) opisującej koszty procesów przetwarzania odpadów. opis tej funkcji można uzyskać w wyniku aproksymacji wielomianowej kosztów przetwarzania odpadów ponoszonych w minionych okresach.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Na rysunku przedstawiono schematycznie rozważany problem zadania transportowo - produkcyjnego (ZPT) dla przypadku selektywnego gromadzenia odpadów, a następnie przewozu odpadów do istniejących punktów ich przetwarzania.



❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Model matematyczny zagadnienia:

Przedsiębiorstwo przetwarzające jednorodny surowiec posiada ***m*** - punktów gromadzenia surowca oraz ***n*** - zakładów przetwarzających ten surowiec.

Dodatkowo należy znać:

- jednostkowe koszty transportu od każdego punktu gromadzenia do poszczególnych zakładów przetwórczych,
- ilość surowca zgromadzonego w każdym punkcie dostaw,
- funkcje określające koszt przerobu surowca w każdym zakładzie w zależności od wielkości przerobu.

Funkcje określające koszty przerobu są funkcjami wypukłymi i kwadratowymi. Uwzględniają one tylko koszty zmienne, czyli zależne od rozmiarów produkcji.

Całość nabytego surowca musi być przewieziona do zakładów i tam przerobiona. Przyjmuje się, że zakłady są w stanie przetworzyć dostarczoną ilość surowca (znane są możliwości przerobowe zakładów).

Zwiększa to zdolności produkcyjne zakładów, ale powoduje także wzrost jednostkowych kosztów produkcji. Rosnące koszty przerobu są naturalnym ograniczeniem rozmiarów produkcji w każdym zakładzie.

Należy ustalić taki plan dostaw surowca do poszczególnych zakładów oraz przerobu surowca w tych zakładach, aby łączne koszty transportu i przerobu były minimalne.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Przyjęto następujące oznaczenia:
i - numer punktu gromadzenia (numer dostawcy),
j - numer zakładu przetwórczego (numer odbiorcy),
$x_{i,j}$ - ilość surowca przesłana od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
x_j - ilość surowca przerobiona przez j-tego odbiorcę,
b_j - zdolności przerobowe surowca dla j-tego odbiorcy
a_i - ilość surowca, jaką musi wysłać i-ty dostawca,
$c_{i,j}$ - jednostkowy koszt transportu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
$f_j(x_j)$ - koszt przerobu jednostek surowca w j-tym zakładzie (u j-tego odbiorcy).

Ponadto przyjęto, że wypukła funkcja kosztu f_j jest wielomianem drugiego stopnia postaci:

$$f_j(x_j) = c_j x_j + e_j x_j^2; \quad c_j, e_j > 0$$

gdzie:
c_j - opisuje minimalny koszt jednostkowy przerobu
e_j - wyznacza tempo wzrostu kosztu jednostkowego

Pierwsza pochodna funkcji kosztów przerobu określa koszt krańcowy przerobu:
$$F_j'(x_j) = c_j + 2e_j x_j$$

Natomiast druga pochodna - tempo wzrostu kosztu krańcowego:
$$F''(x_j) = 2e_j$$

Koszt przeciętny przerobu w j-tym zakładzie określony jest wzorem:

$$K_j^P(x_j) = c_j + e_j x_j$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Problem ustalenia optymalnego planu dostaw surowca i jego przerobu można przedstawić w postaci nieliniowego zadania decyzyjnego:

Poszukiwane są takie wartości zmiennych $x_{i,j}$ oraz x_j, aby:

Funkcja celu

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \rightarrow \min$$

minimalizuje łączne koszty transportu i przerobu

Przy warunkach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i, \quad (i = 1,\dots,m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = x_j \le b_j, \quad (j = 1,\dots,n);$$

$$x_{i,j} \ge 0, \quad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n)$$

Warunki: $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i$ - zapewniają, że każdy dostawca wyśle całość posiadanego surowca

Warunki: $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = x_j \le b_j$ - wymuszają przerób w j-tym zakładzie całego surowca jaki do niego został dostarczony, przy jednoczesnym nieprzekroczeniu zdolności przerobowych.

Zadanie to jest zadaniem programowania kwadratowego o specjalnej - transportowej strukturze.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Przykład praktyczny:
Badaniom poddano dostawy odpadów medycznych w województwie podkarpackim (około 2 000 Mg/rok – ton/rok).
W województwie źródłem odpadów jest 60 szpitali (małe, duże) oraz wiele ośrodków opieki zdrowotnej (nie uwzględnianych w obliczeniach).

Na terenie podkarpackiego istnieją 2 spalarnie:
ECO-TOP Rzeszów - 0.29 Mg/h,
RAF-Ekologia Jedlicze - 1.13 Mg/h,
oraz 3 małe zakłady utylizacji odpadów medycznych.

W obliczeniach uwzględniono:
Rzeszów (5), Krosno (5), Przemyśl (3), Jasło (2), Sanok (1), Dębica (1)
razem: 6 dostawców (17 szpitali - dużych)

Zadanie sformułowano następująco:
6 dostawców: D1, D2, D3, D4, D5, D6 zaopatruje w odpady medyczne 2 spalarnie: S1, S2 przy ograniczeniach:
S1: może przyjąć i przetworzyć 700 lub 1000 Mg odpadów,
S2: może przyjąć i przetworzyć 1 500 Mg odpadów.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Dane zestawiono w tabeli i obejmują:

- jednostkowe koszty transportu (w zł za tkm)
- oferowane miesięcznie wielkości dostaw A_i (w tonach)
- miesięczne zapotrzebowanie spalarni B_j (w tonach)

Tabela. Jednostkowe koszty transportu, podaż i popyt

Dostawcy	**Spalarnie**				
	wariant v1			**wariant v2**	
	S1 (RZ)	**S2 (JE)**	**podaż** A_i [Mg]	**S1 (RZ)**	**S2 (JE)**
D1 (Rzeszów)	5	60	500	5	60
D2 (Dębica)	40	60	80	40	60
D3 (Jasło)	70	15	200	70	15
D4 (Krosno)	70	5	400	70	5
D5 (Sanok)	100	50	120	100	50
D6 (Przemyśl)	100	80	300	80	100
Popyt B_j [Mg]	700	1500	1 600	1 000	1500

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Ponadto na podstawie przeprowadzonych analiz oszacowano, że funkcje przerobu odpadów w obu spalarniach mają postać:

- **dla wariantu pierwszego v1** (przyjęto popyt: dla spalarni S1 - 700 Mg/rok, a dla spalarni S2 - 1500 Mg/rok)

$$f_1(x_1) = 15\,x_1 + 0.2\,x_1^2$$

oraz

$$f_2(x_2) = 15\,x_2 + 0.1\,x_2^2\,.$$

- **dla wariantu pierwszego v2** (przyjęto popyt: dla spalarni S1 - 1 000 Mg/rok, a dla spalarni
S2 - 1500 Mg/rok)

$$f_1(x_1) = 10\,x_1 + 0.2\,x_1^2$$

oraz

$$f_2(x_2) = 10\,x_2 + 0.1\,x_2^2\,.$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Rozwiązania dla obu wariantów (uzyskane w arkuszu Excel z wykorzystaniem modułu Solver)

Uwaga: Zadanie to można także rozwiązać stosując algorytm WKK – Wyrównywania Kosztów Krańcowych

Wariant v1:

$$x_{i,j} = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 67 & 13 \\ 0 & 200 \\ 0 & 400 \\ 0 & 120 \\ 0 & 300 \end{bmatrix}$$

Przerób w spalarniach $x_1 = 567, x_2 = 1033$

Koszty transportu i utylizacji: F=235966,7

Wariant v2:

$$x_{i,j} = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 80 \\ 0 & 200 \\ 0 & 400 \\ 0 & 120 \\ 67 & 233 \end{bmatrix}$$

Przerób w spalarniach $x_1 = 567, x_2 = 1033$

Koszty transportu i utylizacji: F=233966,7

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 2

Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch rodzajów bocznic: własnej i dzierżawionej od PKP.

Koszty (w tys. zł) związane z postojem wagonów na bocznicach wyraża następująca funkcja kosztów:

$$f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2$$

gdzie:

t_1 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy własnej,

t_2 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy PKP.

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa maja w swym składzie 100 wagonów.

Dzienna zdolność przeładunkowa bocznicy własnej wynosi 10 wagonów, a bocznicy PKP 20 wagonów.

– Jak rozdzielić wagony pomiędzy bocznice, aby koszt postojowego był możliwie najniższy ?
– Podać koszt postojowego przy optymalnym rozdzieleniu wagonów pomiędzy obie bocznice.
  Uwaga: zakładamy, że z wyładowanych wagonów formułuje się skład, który może odejść dopiero wtedy, gdy wszystkie wagony są opróżnione. Tym samym postojowe liczy się do momentu wyładunku ostatniego wagonu na każdej z bocznic.
– Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek wagonów na bocznicy własnej a ile na PKP ?

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Matematyczny model problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne: $t_1, t_2 \geq 0$

Funkcja celu: $f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2 \to \min$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10t_1 + 20t_2 = 100 \Leftrightarrow g(t_1, t_2) = t_1 + 2t_2 = 10 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja Lagrange'a:

$$F(t_1, t_2, \lambda) = f(t_1, t_2) + \lambda[10 - t_1 - 2t_2] \to \min$$

Pochodne cząstkowe z funkcji Lagrange'a względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - t_1 - 2t_2, \quad \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0,5t_1 + 3 - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial t_2} = t_2 + 4 - 2\lambda$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - t_1 - 2t_2 = 0 \\ 0,5t_1 + 3 - \lambda = 0 \\ t_2 + 4 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 4 \\ \lambda_1^* = 4 \end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki dostateczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = 0,5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_1}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial t_2} = 2$$

Hesjan obrzeżony:

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dla zadania **na minimum** z $m=1$ warunkami ograniczającymi wymagane jest, aby tylko jeden minor $|H_2| = |H|$ równy wyznacznikowi głównemu miał znak taki jak $(-1)^m = -1 < 0$.

Łatwo sprawdzić że wartość wyznacznika (obliczona np. stosując rozwinięcie Laplace'a względem 1 wiersza wynosi):

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (1-0) + 2 \cdot (0 - 2 \cdot 0,5) = -1 - 2 = -3 < 0$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 3

Określić optymalne z punktu widzenia kosztów transportu współrzędne (X,Y) dla lokalizacji magazynu zaopatrującego w towar pięciu odbiorców dla przedstawionych poniżej danych modelowych.

Lokalizacje poszczególnych odbiorców: (x_i, y_i) $(i = 1,2,\ldots,5)$

Numer Odbiorcy	Lokalizacja x_i [km]	Lokalizacja y_i [km]	Wielkość zapotrzebowania z_i [w jednostkach towaru]
1	2	5	2
2	4	3	7
3	1	1	4
4	3	2	9
5	3	4	1

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

(X,Y) – współrzędne lokalizacji magazynu,

z_i - ilościowe zapotrzebowanie poszczególnych odbiorców na towar (i=1,2,…,5),

$d_i^2 = \left[(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2\right]$ - kwadrat odległość magazynu od i-tego odbiorcy,

$K_i = z_i \cdot d_i^2 \geq 0$ - koszty dostaw towaru proporcjonalne do kwadratu odległości oraz zapotrzebowania z_i odbiorców (nieujemne),

$K = \sum_{i=1}^{5} K_i = \sum_{i=1}^{5} z_i \cdot d_i^2$ - całkowity koszt dostaw towaru.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Model matematyczny problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne:

(X,Y) – współrzędne lokalizacji magazynu

Funkcja celu:

$$K(X,Y)=\sum_{i=1}^{5} z_i\left[(X-x_i)^2+(Y-y_i)^2\right]\to \min$$

Uwaga:

brak warunków ograniczających (szukamy ekstremum bezwarunkowego)

Rozwiązanie:

$$K=2(X-2)^2+2(Y-5)^2+7(X-4)^2+7(Y-3)^2+4(X-1)^2+4(Y-1)^2+$$
$$+9(X-3)^2+9(Y-2)^2+(X-3)^2+(Y-4)^2\to \min$$

Warunki konieczne:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K}{\partial X}=0\\ \dfrac{\partial K}{\partial Y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(X-2)+14(X-4)+8(X-1)+18(X-3)+2(X-3)=0\\ 4(Y-5)+14(Y-3)+8(Y-1)+18(Y-2)+2(Y-4)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}46X=132\\ 46Y=114\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X^*=\dfrac{66}{23}\\ Y^*=\dfrac{57}{23}\end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki wystarczające:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}(46X - 132) = 46$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y}(46Y - 114) = 46$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Y \partial X} = \frac{\partial^2 K}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}(46X - 132) = \frac{\partial}{\partial X}(46Y - 114) = 0$$

Warunkiem dostatecznym dla zadania na minimum jest, aby Hesjan drugich pochodnych cząstkowych był dodatni.

Łatwo sprawdzić, że Hesjan:

$$|H| = |H_2| = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial Y \partial X} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 0 \\ 0 & 46 \end{bmatrix} = 46 \cdot 46 = 2116 > 0$$

LINIOWE MODELE OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Istnieje bardzo wiele sytuacji decyzyjnych, których nie możemy opisać używając tylko wyłącznie zmiennych ciągłych.

Wynika to z nieciągłości pewnych rozważanych procesów ekonomicznych:

- pracownika można przydzielić tylko do jednego z kilku dostępnych stanowisk pracy;
- projekt inwestycyjny będzie przyjmowany do realizacji lub nie;
- zakład produkcyjny będzie lokalizowany w jednym z możliwych punktów lokalizacji lub też nie;

We wszystkich przytoczonych sytuacjach decyzyjnych wymagamy, aby wszystkie (lub choć jedna zmienna decyzyjna), spośród tych które mamy wyznaczyć przyjmowały wartości tzw. ***dyskretne*** (np. ze zbioru liczb całkowitych: $x \in Z$, lub ze zbioru liczb binarnych: $x \in \{0,1\}$).

Zagadnienia decyzyjne, w których przynajmniej jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości dyskretne nazywamy – ***dyskretnym zagadnieniem decyzyjnym***, a ich matematyczne modele – ***dyskretnym zadaniem decyzyjnym*** (DZD).

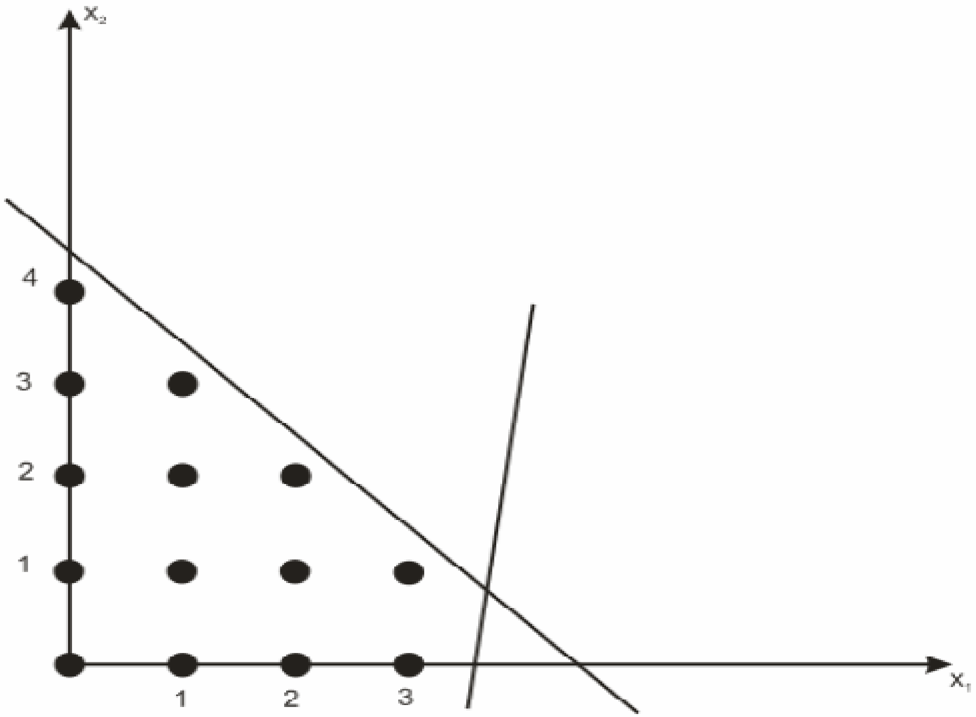
❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Interesować nas będą obecnie tylko takie dyskretne problemy decyzyjne, w których zarówno funkcja celu jak i warunki ograniczające są postaci liniowej – *zadania programowania dyskretnego - liniowego* (PDL). Wśród tego typu zadań wyróżnia się trzy podstawowe grupy:

- zadania *programowania całkowitoliczbowego - liniowego* (PCL)
- zadania *programowania binarnego – liniowego* (PBL)
- zadania *programowania mieszanego – liniowego* (PML)

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych „*D*" zadania programowania dyskretnego – liniowego jest zawsze zbiorem niespójnym (np. dla zadania programowania całkowitoliczbowego z dwoma zmiennymi - będzie to zbiór punktów o współrzędnych całkowitych znajdujących się w pewnym wieloboku). Nieciągłość zmiennych decyzyjnych powoduje, że zadania tego typu są trudniejsze do rozwiązania, niż zwykłe zadania programowania liniowego.



❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

- **Zagadnienie optymalnego przydziału**

Istnieje możliwość obsadzenia „n" – stanowisk roboczych (i = 1,2,...,n) przez „n" – osób (pracowników) (j = 1,2,...,n). Znane są efekty pracy j – tego robotnika na i – tym stanowisku pracy (macierz efektów pracy - $W_{i,j} = [w_{i,j}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$).

Efekty te mogą być oceniane pozytywnie (wydajność pracy, wartość produkcji w przeliczeniu na jednostkę czasu) lub negatywnie (liczba braków, czas wykonania pracy, koszty związane z pracą).

Należy dokonać takiego przydziału pracowników do poszczególnych stanowisk pracy, tak aby zminimalizować negatywne lub zmaksymalizować pozytywne efekty pracy dla całego zespołu (zakładu pracy).

Zakłada się ponadto, że każde stanowisko pracy może być obsadzone tylko przez jednego pracownika, a tym samym każdy pracownik może pracować tylko na jednym stanowisku.

Oznaczenia:

Oznaczmy przez $X_{i,j} = [x_{i,j}]_{i,j} = 1,2,\ldots,n$ - macierz zmiennych decyzyjnych, która jest postaci:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{gdy j - ty pracownik jest przydzielony do i - tego stanowiska} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Model matematyczny:

Problem ten można przedstawić za pomocą następującego liniowego zadania programowania binarnego (PBL):

(funkcja celu)

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \cdot x_{i,j} \to \max(\min)$$

(warunki ograniczające)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

(każde stanowisko jest obsadzone tylko przez 1 pracownika)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$$

(każdy pracownik jest przydzielony tylko do 1 stanowiska)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{i, j=1,2,...,n.}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne (tym samym optymalne) to macierze postaci (dla n=5):

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie jest tylko jedna jedynka).

Zadanie optymalnego przydziału, mimo że jest klasycznym problemem **programowania dyskretnego**, to może być rozwiązane metodami programowania liniowego – **algorytmem simpleks** (co jest bardzo pracochłonne). Istnieje jednak stosunkowo prosty i skuteczny algorytm postępowania – **algorytm węgierski** (oparty na twierdzeniu węgierskiego matematyka - **Denesa Königa**), który można zastosować do rozwiązywania zadań optymalnego przydziału.