❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

WYBRANE ZAGADNINIA OPTYMALIZACJI LINIOWEJ W PROBLEMACH TRANSPORTOWYCH

1. Zagadnienie transportowe – zamknięte (ZZT)

Przedsiębiorstwo potrzebuje przetransportować produkt z m - punktów lokalizacji (magazynów, lokalizacji początkowych) do n - lokalizacji docelowych.

Zakłada się, że w każdej lokalizacji początkowej znajduje się $a_i, i = 1,\dots,m$ jednostek towaru (dostępna podaż towaru), zaś do każdej lokalizacji docelowej należy dostarczyć $b_j, j = 1,\dots,n$ jednostek tego towaru (popyt – zapotrzebowanie na produkt).

Zakłada się ponadto, że całkowita wielkość towaru dostępna w punktach początkowych równa jest wymaganej całkowitej wielkości towaru niezbędnej do dostarczenia do punktów docelowych: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Jeżeli jednostkowy koszt transportu (1 jednostki towaru) z i-tego punktu początkowego do j-tego punktu docelowego wynosi $c_{ij}, i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n$ należy odpowiedzieć na pytanie:

Ile jednostek towaru powinno być przetransportowanych pomiędzy każdym punktem początkowym, a każdym punktem docelowym jego lokalizacji, aby zminimalizować całkowity koszt transportu.

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zakładając $x_{ij} \geq 0, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n$ - wielkości produktu transportowane z i-tego punktu początkowego do j-tego punktu docelowego, powyższy problem decyzyjny można zapisać za pomocą następującego zadania optymalizacji liniowej:

$$Min\ F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,\ldots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,\ldots,n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

3. Modyfikacje zagadnienia transportowego:

- Otwarte zagadnienie transportowe - OZT

Jeżeli zmodyfikujemy założenie o bilansie pomiędzy całkowitą podażą oraz całkowitym popytem, tzn. przyjmiemy założenie, że $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$, to zadanie transportowe jest zadaniem otwartym (OZT) postaci:

$$Min\ F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

- Zagadnienie transportowo-produkcyjno-magazynowe (ZTP-M)

Jeżeli założymy, że istnieje nadwyżka podaży nad popytem: $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$, to nadwyżka towaru: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, jaka pozostaje w magazynach punktów początkowych i nie jest wysyłana do punktów docelowych musi być składowana w punktach początkowych.

Załóżmy, że wielkości magazynowanego towaru w punktach początkowych opisują zmienne: $x_{i,n+1} \geq 0, i = 1,\ldots,m$, $\left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = b_{n+1}\right)$, zaś jednostkowy koszt jego składowania wynosi $h_i, i = 1,\ldots,m$.

W analizowanym problemie decyzyjnym uwzględniamy dodatkowo jednostkowe koszty wytworzenia (wyprodukowania) przewożonych towarów w każdym punkcji początkowym.

Koszt ten opisują parametry: $p_i, i = 1,\ldots,m$.

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zadanie optymalizacji liniowej dla tak sformułowanego problemu decyzyjnego jest postaci:

$$Min\ F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p_i + c_{ij})\cdot x_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{i,n+1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i & (i = 1,\dots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,\dots,n+1) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n+1) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

4. Zagadnienie pośrednika:

Pośrednik (sprzedawca) nabywa towar od m - dostawców, przewozi go oraz sprzedaje n - odbiorcom.

Dane są:

a_i - maksymalna ilość towaru jaką można kupić u i -tego dostawcy (jego podaż)

b_j - maksymalna ilość towaru jaką można sprzedać j -temu odbiorcy (jego popyt)

k_i - cena zakupu u i -tego dostawcy

p_j - cena sprzedaży j -temu odbiorcy

c_{ij} - jednostkowy koszt transportu na trasie od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy

Należy ustalić taki plan zakupów, transportu i sprzedaży, aby dochód pośrednika był maksymalny (dochód = przychód ze sprzedaży - koszty zakupu - koszty transportu)

$d_{ij} = p_j - k_i - c_{ij}$ - dochód jednostkowy z trasy zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

6. **Minimalizacja pustych przebiegów (dotyczy optymalnego krążenia środków transportu rozwożących towar):**

Załóżmy, że istnieje n - miast pomiędzy którymi odbywa się wymiana towarowa.

Miasta te tworzą układ zamknięty, tzn. wymiana towarów odbywa się tylko pomiędzy nimi i każde z nich może być zarówno dostawca jak i odbiorcą towarów.

Do każdego miasta przywozi się i z każdego wywozi się określoną masę towarową nadającą się do przewozu określonym środkiem transportu (o określonej ładowności)

Znane są:

d_{ij} - odległości pomiędzy i-tym oraz j-tym miastem

a_{ij} - przewóz masy towarowej pomiędzy miastami - wyrażony liczbą pełnych środków transportu (samochodów, wagonów)

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Dla każdego miasta określa się:

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do wywiezienia masy towarowej (wywóz) równą: $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do przywiezienia masy towarowej (przywóz) równą: $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Dla całego układu spełniona jest równość: $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Natomiast dla poszczególnych miast wywóz (w_i) wcale nie musi być równy przywozowi (p_i).

Miasta w których $w_i > p_i$ - są odbiorcami tzw. pustych przebiegów, a ich zapotrzebowanie na puste środki transportu wynosi: $b_i = w_i - p_i > 0$.

Miasta w których $w_i < p_i$ - są dostawcami pustych przebiegów, a ich podaż pustych środków transportu wynosi: $a_i = p_i - w_i > 0$.

Miasta w których $p_i = w_i$ eliminujemy z dalszych rozważań (bo nie występuje dla nich problem pustych przebiegów)

❑ Zadania optymalizacji liniowej w problemach transportowych

Problem decyzyjny jest następujący:
Znaleźć taki plan przebiegów pustych środków transportu pomiędzy miastami, aby łączny pojazdokilometraż (samochodokilometraż, wagonokilometraż) pustych przebiegów był minimalny.

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - liczba pustych środków transportu wysyłanych z miasta i do miasta j

$i = 1, 2, \dots, k$ - indeks miast dostawców, dla których występuje problem pustych przebiegów

$j = 1, 2, \dots, l$ - indeks miast odbiorców, dla których występuje problem pustych przebiegów

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \to \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, k) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, l) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, l) \end{cases}$$

1. Praktyczny przykład problemu decyzyjnego – sformułowanego za pomocą zamkniętego zadania transportowego ZZT.

Cztery piekarnie zlokalizowane na terenie miasta są zaopatrywane w mąkę z dwóch magazynów znajdujących się na peryferiach miasta. Zapasy mąki w magazynach wynoszą odpowiednio: I magazyn – 130 t, II – magazyn – 200 t. Natomiast zapotrzebowanie piekarń jest równe odpowiednio: I piekarnia – 80 t, II – piekarnia – 120 t, III – piekarnia – 70 t, III – piekarnia – 60 t. Koszty dostawy mąki do piekarń zależą tylko od odległości dostaw i są podane w tabeli kosztów:

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Należy wyznaczyć, taki plan dostaw mąki z magazynów do piekarń, aby dostarczyć piekarniom wymagane ilości, przy minimalnych sumarycznych kosztach jej transportu.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

1. Algorytm wyznaczania rozwiązań ZZT.

Idea poszukiwania rozwiązań ZZT jest podobna do idei algorytmu „simpleks".

Najpierw należy znaleźć jakiekolwiek początkowe rozwiązanie bazowe (ponieważ rząd macierzy rz(A)= n + m – 1), to rozwiązanie bazowe niezdegenerowane posiada n + m - 1 dodatnich wartości w wektorze zmiennych decyzyjnych – zmienne bazowe, pozostałe wartości to zera – dla zmiennych niebazowych.

Następnie sprawdza się, czy rozwiązanie bazowe aktualne jest optymalne, czy też nie. Jeśli nie to znajdujemy kolejne rozwiązanie nie gorsze od poprzedniego i znów sprawdzamy jego optymalność. Powyższe postępowanie kończymy, gdy wreszcie uzyskamy rozwiązanie bazowe optymalne.

Algorytmicznie otrzymywanie rozwiązań ZZT można przedstawić następująco:
ETAP I (wyznaczenie dopuszczalnego początkowego rozwiązania bazowego).
W literaturze opisanych jest wiele metod konstrukcji początkowego rozwiązania bazowego, np.:

- Metoda ***kąta północno – zachodniego*** (N-W) – prosta ale mało efektywna (wymagane jest zazwyczaj przeprowadzenie dużej liczby iteracji, aby uzyskać z niego końcowe rozwiązanie optymalne).
- Metoda ***minimalnego elementu*** macierzy kosztów transportu – na ogół bardziej efektywna od poprzedniej.
- Metoda VAM (***aproksymacyjna***) – nieco bardziej złożona od poprzednich, ale daje rozwiązania początkowe bliskie rozwiązaniom optymalnym.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów:

Oznaczmy przez (r , k) – numer zmiennej wybieranej w danej (p – tej) iteracji za zmienną bazową: $x_{r,k}^{(p)} > 0$. Oznaczmy przez: ***I*** – zbiór indeksów dostawców, których zasoby w danym kroku nie zostały jeszcze rozdysponowane, zaś przez ***J*** – zbiór indeksów odbiorców, których zapotrzebowanie w danym kroku nie zostało jeszcze zaspokojone. Numer zmiennej wprowadzanej do bazy w każdej iteracji wyznaczamy zgodnie z formułą:

$$c_{r,k} = \min\{c_{i,j} : (i,j) \in I \times J\}$$

Następnie przypisujemy (p – tej) - zmiennej bazowej aktualną wielkość transportu od dostawcy (r – tego) do odbiorcy (k – tego) zgodnie ze wzorem:

$$x_{r,k}^{(p)} = \min\{a_r^{(p-1)}, b_k^{(p-1)}\}, p = 1,2,\ldots, m+n-1;$$

$$a_r^{(p)} = a_r^{(p-1)} - x_{r,r}^{(p)}, b_k^{(p)} = b_k^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, p = 1,2,\ldots, m+n-1;$$

$$a_i^{(p)} = a_i^{(p-1)}, b_j^{(p)} = b_j^{(p-1)}, \quad \text{dla} \quad i \neq r, j \neq k, p = 1,\ldots, m+n-1;$$

$$a_i^{(0)} = a_i, b_j^{(0)} = b_j; i = 1,\ldots, n; j = 1,\ldots, m;$$

Eliminujemy z dalszych rozważań ze zbioru indeksów dostawców „***I***" lub odbiorców „***J***" ten indeks, dla którego $a_r^{(p)} = 0$ (zapasy tego dostawcy zostały wyczerpane) lub $b_k^{(p)} = 0$ (zapotrzebowanie tego odbiorcy zostało zrealizowane).

Powtarzamy tę procedurę i na ogół po (m + n - 1) krokach znajdujemy wartości wszystkich zmiennych bazowych dla rozwiązania początkowego.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy)			
	1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Tablica przewozów (kolejne iteracje):

i \ j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1		$x_{1,2}^{(4)} = 70$		$x_{1,4}^{(1)} = 60$	130	70	70	70	0	0
2	$x_{2,1}^{(3)} = 80$	$x_{2,2}^{(5)} = 50$	$x_{2,3}^{(2)} = 70$		200	200	130	50	50	0
$b_j^{(0)}$	80	120	70	60	330					
$b_j^{(1)}$	80	120	70	0						
$b_j^{(2)}$	80	120	0	0						
$b_j^{(3)}$	0	120	0	0						
$b_j^{(4)}$	0	50	0	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0	0						

Iteracja p=5: $I = \{2\}; J = \{2\};$ 5 zmienna bazowa: $x_{2,2}^{(5)} = \min\{50,50\} = 50$

modyfikujemy: $a_1^{(4)} = a_1^{(3)} - x_{1,2} = 70 - 70 = 0$; $b_2^{(4)} = b_4^{(3)} - x_{1,2} = 120 - 70 = 50$;

pozostałe: $a_i^{(4)} = a_i^{(3)}$; $b_j^{(4)} = b_j^{(3)}$. Skreślamy ze zbioru nadawców 1 – nadawcę.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tablica przewozów (ostateczna)

i \ j	1	2	3	4
1	0	70	0	60
2	80	50	70	0

Otrzymujemy zatem rozwiązanie bazowe początkowe postaci:

$$f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 70 \cdot 24 + 50 \cdot 30 + 70 \cdot 15 + 60 \cdot 13 = 6370$$

<u>ETAP II</u> (sprawdzenie optymalności rozwiązania bazowego).

Wyznaczamy tzw. ***tablicę kosztów zastępczych*** $\hat{c}_{i,j}$ w następujący sposób:

- Koszty zastępcze dla aktualnych przewozów rozwiązania bazowego ($x_{i,j} > 0$) przyjmujemy równe kosztom wyjściowym podanym w tablicy: $c_{i,j}$.
- Znajdujemy parę takich wierszy lub kolumn dla których możemy wyznaczyć ich różnicę (w tej samej kolumnie lub wierszu są dwie zmienne bazowe).
- Znając ile wynosi taka różnica - wyznaczamy pozostałe elementy w macierzy kosztów zastępczych, których wartości jeszcze nie znamy, rozwiązując odpowiednie równania, tak aby zgadzała się wyznaczona różnica.

Po wyznaczeniu kosztów zastępczych wyznaczamy ***tablicę różnic***: $r_{i,j} = c_{i,j} - \hat{c}_{i,j}$.

<u>Uwaga:</u> Dla zmiennych bazowych $r_{i,j} = 0$.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium optymalności rozwiązania bazowego:

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, jeżeli wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie.

Dla naszego przykładu (w przypadku otrzymanego rozwiązania początkowego metodą minimalnego elementu macierzy kosztów) mamy:

Macierz kosztów zastępczych (początkowa)

i \ j	1	2	3	4
1		24		13
2	17	30	15	

Różnica np. między drugim i pierwszym wierszem wynosi: 6, zatem pozostałe elementy tej macierzy wyznaczamy rozwiązując równania: $17-\hat{c}_{1,1}=6 \Rightarrow \hat{c}_{1,1}=11$, $15-\hat{c}_{1,3}=6 \Rightarrow \hat{c}_{1,3}=9$, $\hat{c}_{2,4}-13=6 \Rightarrow \hat{c}_{2,4}=19$.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych (pełna)

i \ j	1	2	3	4
1	11	24	9	13
2	17	30	15	19

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	14	0	19	0
2	0	0	0	7

Ponieważ wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie to otrzymane rozwiązanie początkowe jest optymalne.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

ETAP III (modyfikacja rozwiązania bazowego i poprawa wartości funkcji celu):

Z każdym zadaniem transportowym związany jest graf tego zadania odpowiadający aktualnemu rozwiązaniu bazowemu. Jeżeli rozwiązanie bazowe nie jest zdegenerowane, to taki graf jest grafem *spójnym* i *bezkonturowym*.

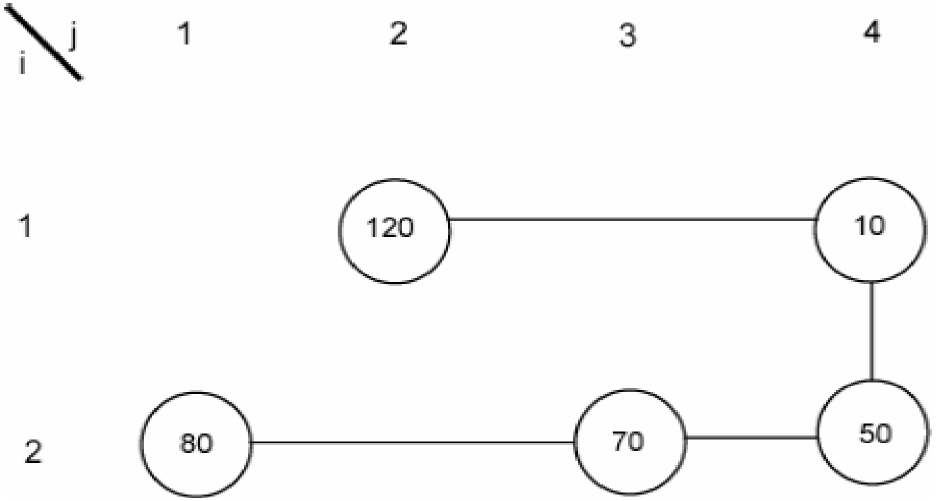
Np. dla naszego przykładu dla rozwiązania bazowego postaci:

Tablica przewozów

i \ j	1	2	3	4
1	0	120	0	10
2	80	0	70	50

Funkcja celu wynosi: $f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 120 \cdot 24 + 70 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 50 \cdot 26 = 6720$ (więcej niż dla rozwiązania optymalnego).

Graf tego rozwiązania jest postaci:



❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych:

i \ j	1	2	3	4
1	4	24	2	13
2	17	37	15	26

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

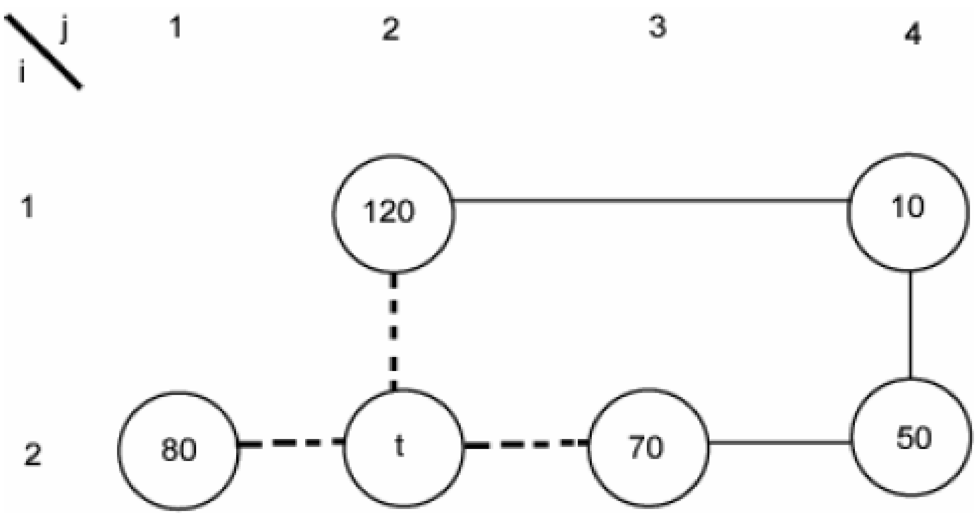
Ponieważ $\hat{c}_{2,2} = -7$, to rozwiązanie to nie jest oczywiście optymalne. Należy go zatem poprawić.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wejścia do bazy:

Do bazy wprowadzamy tę zmienną niebazową, dla której element macierzy różnic jest najmniejszy (z ujemnych). W naszym przypadku zmienną $x_{2,2}$. Wprowadzając tę zmienną (przypisując jej wielkość transportu „t>0" jednostek) poprawiamy rozwiązanie bazowe. Po wprowadzeniu tej zmiennej otrzymalibyśmy dla zadania graf konturowy postaci:

Węzły narożne konturu określają numery zmiennych, których wartości się zmieniają, gdy wprowadzamy do bazy nową zmienną.

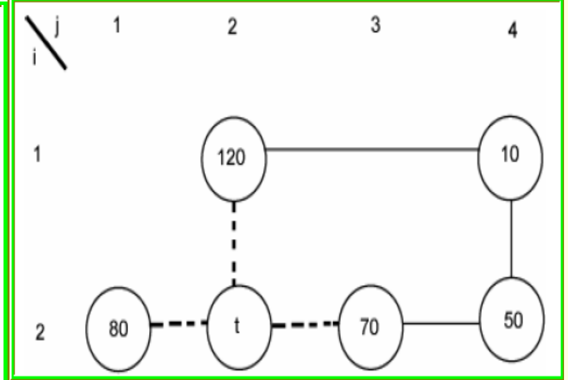


Należy ustalić, zatem którą zmienną z aktualnej bazy (spośród narożnych konturu) należy usunąć. Określa to kryterium wyjścia dla zadania transportowego.

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy



Kryterium wyjścia:

Niech $G = \{(k,l)\}$, gdzie: (k,l) - węzły narożne konturu. Zbiór ten ma parzystą liczbę wierzchołków (dla nas 4). Wierzchołki te cechujemy na przemian (+/-) poczynając od wierzchołka, który wprowadzamy do bazy (otrzymuje on cechę plus). Cechowanie dzieli ten zbiór na 2 rozłączne zbiory G^+ oraz G^-.

W naszym przykładzie: $G^+ = \{(2,2),(1,4)\}; G^- = \{(1,2),(2,4)\}$.

Wartość nowo wprowadzanej zmiennej bazowej w (p – tej) iteracji wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$x^{(p)}{}_{k,l} = \min_{(i,j)\in G^-} \{x_{i,j}^{(p-1)}\}$$

Nowe wartości zmiennych narożnych obliczamy zgodnie ze wzorami:

$$x_{i,j}^{p} = x_{i,j}^{(p-1)} - x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j)\in G^-;$$

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} + x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j)\in G^+, (i,j)\neq(k,l);$$

$$x_{i,j}^{0} = x_{i,j};$$

Pozostałe zmienne nie będące narożne w grafie nie zmieniają wartości.

W naszym przykładzie:

$x_{2,2}^{(1)} = \min\{x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0}\} = \min\{120,50\} = 50$; $\quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70$;

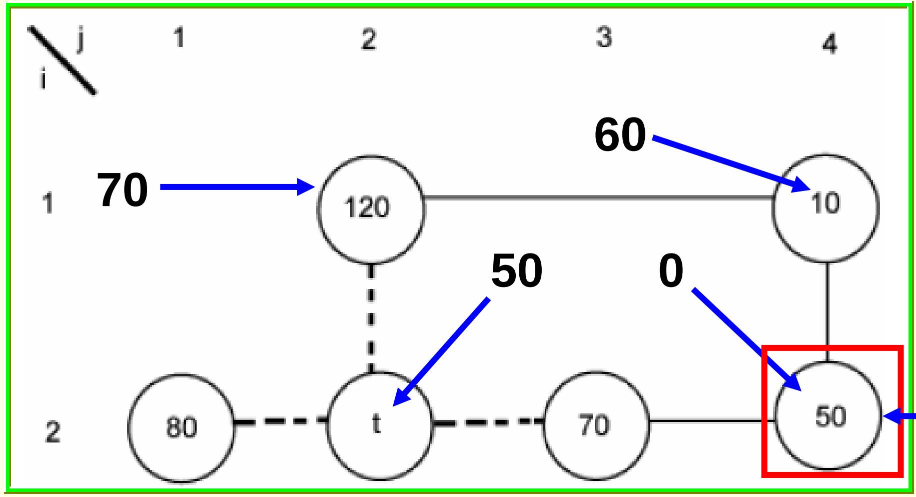
$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0$; $\quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60$.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

<u>Treść kryterium wyjścia</u>: z bazy usuwamy tę zmienną ze zmiennych należących do zbioru indeksów G^-, dla której policzona nowa wartość (zgodnie ze wzorami redukcyjnymi) jest najmniejsza. Dla naszego przykładu usuwaną zmienną jest zmienna: $x_{2,4}$. Tak utworzone nowe rozwiązanie bazowe da wyznaczone już wcześniej rozwiązanie optymalne.

$x_{2,2}^{(1)} = \min\{x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0}\} = \min\{120, 50\} = 50$; $\quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70$;

$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0$; $\quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60$.

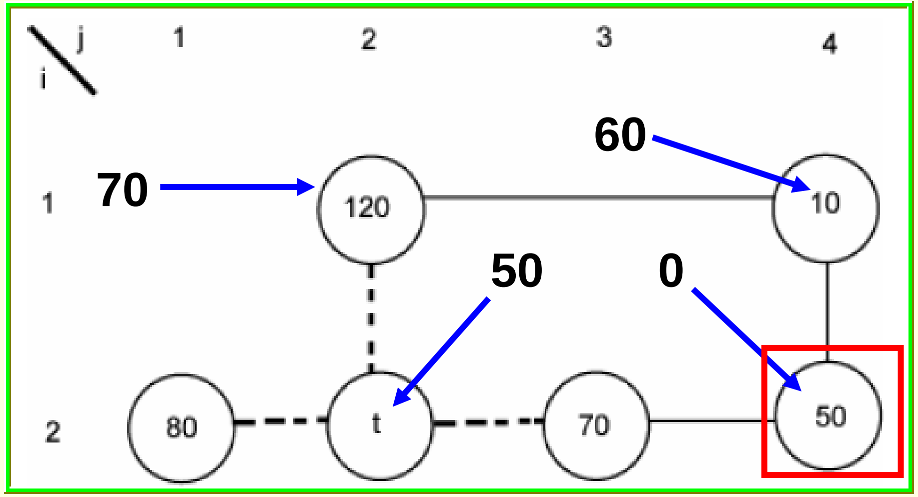


niebazowa

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Interpretacja współczynnika różnic $r_{2,2} = -7$ (dla rozwiązania nieoptymalnego) prowadzi do wniosku, że nieoptymalne rozwiązanie aktualne można poprawić o wartość $(-7 \cdot 50 = -350)$ - tzn. zmniejszyć o 350 koszty transportu (tyle wynosi różnica f – celu rozwiązania bieżącego oraz optymalnego), dostarczając drugiemu odbiorcy nie 120 j. jego pełnego zapotrzebowania z magazynu 1-go, lecz w porcjach - 70 z 1-go i 50 z 2-go. Tym samym zamówienie 4-go odbiorcy mogło być zrealizowane (60 – jednostek) w całości z magazynu 1-go.

<u>Uwaga:</u>
Jeżeli w macierzy różnic rozwiązania optymalnego jest więcej zer niż zmiennych bazowych, to istnieje wiele rozwiązań optymalnych o tej samej wartości funkcji celu.



<u>Macierz różnic</u>

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

ZAGADNIENIA OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

w aspekcie zadań

PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Problemy optymalizacji nieliniowej dzielimy ogólnie na:

- problemy programowania wypukłego
  - Minimalizacja funkcji celu wypukłej, lub maksymalizacja funkcji celu wklęsłej
  - zbiór warunków ograniczających jest zbiorem wypukłym

  Niech funkcje: $f, g^j; j=1,..,m_1, h^j; j=1,\dots,m_2$ - są funkcjami wypukłymi, wtedy można udowodnić, że zbiory ograniczone warunkami: $g^j(x_1,\dots,x_n)-c_j \le 0$ oraz $h^j(x_1,\dots,x_n)-c_j=0$ są zbiorami wypukłymi. Ponieważ część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więc zadania programowania wypukłego przyjmują postać:

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \min$$

lub

$$-f(x_1,\dots,x_n) \to \max$$

  Przy warunkach:

$$\begin{cases} g^j(x_1,\dots,x_n) \le 0 \ \text{ dla } \ (j=1,\dots,m_1); \\ h^j(x_1,\dots,x_n)=0 \ \text{ dla } \ (j=1,\dots,m_2); \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots x_n \ge 0. \end{cases}$$

- problemy programowania niewypukłego
  problemy decyzyjne nieliniowe, które niespełnianą warunków programowania wypukłego nazywamy zadaniami programowania niewypukłego

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Szczególnym przypadkiem zadań programowania wypukłego jest programowanie kwadratowe.

Zakłada on, że funkcja celu jest wypukłą funkcją kwadratową, zaś funkcje $g^j(x_1,...,x_n)$ z warunków ograniczających są funkcjami liniowymi (a więc tworzą obszar wypukły).

Zadanie programowania kwadratowego przyjmuje postać:

$$cx + \frac{1}{2}x^T Ex \to \min$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

gdzie:

$x = [x_1,...,x_n]^T$ - wektor kolumnowy zmiennych decyzyjnych

$c = [c_1,...,c_n]$ - wektor wierszowy współczynników funkcji celu składnika liniowego

$b = [b_1,...,b_m]^T$ - wektor kolumnowy wyrazów wolnych

$A = [a_{i,j}]_{n\times m}$ - macierz współczynników warunków (po lewej stronie warunków),

$E = [e_{i,j}]_{n\times n}$ - macierz ujemnie określona – współczynników składnika kwadratowego (co gwarantuje wypukłość składnika kwadratowego funkcji celu)

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Dla zadań optymalizacji nieliniowej w postaci kanonicznej (warunki ograniczające w postaci równości) możemy w ogólnym przypadku zastosować metodę tzw. czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

W metodzie tej zamiast poszukiwać ekstremum warunkowego postaci:

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min)$$

$$(2)\quad \begin{cases} g^j(x_1,\dots,x_n) - c_j = 0 \quad \text{dla} \quad (j = 1,\dots,m); \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_n \geq 0. \end{cases}$$

poszukujemy ekstremum bezwarunkowego dla tzw. funkcji Lagrange'a utworzonej w oparciu o wyjściową funkcje celu f(X) poprzez włączenie do tej funkcji warunków ograniczających z odpowiednimi (sztucznie wprowadzonymi) czynnikami nieoznaczonymi (zakładamy, że m<n).

Dla zadania programowania nieliniowego w postaci kanonicznej (2) funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(X;\lambda) = L(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\dots,x_n)\right]$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego zadania jest następujący: zerowanie się pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a:

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = c_j - g^j(x_1,\dots,x_n) = 0; \quad \text{dla} \quad (j = 1,\dots,m); \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i} = 0; \quad \text{dla} \quad (i = 1,2,\dots,n); \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) w postaci kanonicznej jest następujący:

$$L = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n) \right]$$ **- Funkcja Lagrange'a (m<n)**

Hesjan obrzeżony

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \ldots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \ldots & g_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \ldots & g_n^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^m & L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

gdzie: $g_i^j = \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i}; L_{pq} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_q \partial x_p}$

$|\overline{H}_2|$

Dla maksimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby $|\overline{H}_{m+1}|, |\overline{H}_{m+2}|, \ldots, |\overline{H}_n| = |\overline{H}|$ **zmieniały znak (dla** $|\overline{H}_{m+1}|$ **znak taki jak** $(-1)^{m+1}$ **)**

Dla minimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby miały one ten sam znak (i to taki jak dla $(-1)^m$ **)**

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 2

Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch rodzajów bocznic: własnej i dzierżawionej od PKP.

Koszty (w tys. zł) związane z postojem wagonów na bocznicach wyraża następująca funkcja kosztów:

$$f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2$$

gdzie:

t_1 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy własnej,

t_2 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy PKP.

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa maja w swym składzie 100 wagonów.

Dzienna zdolność przeładunkowa bocznicy własnej wynosi 10 wagonów, a bocznicy PKP 20 wagonów.

– Jak rozdzielić wagony pomiędzy bocznice, aby koszt postojowego był możliwie najniższy ?
– Podać koszt postojowego przy optymalnym rozdzieleniu wagonów pomiędzy obie bocznice.
  Uwaga: zakładamy, że z wyładowanych wagonów formułuje się skład, który może odejść dopiero wtedy, gdy wszystkie wagony są opróżnione. Tym samym postojowe liczy się do momentu wyładunku ostatniego wagonu na każdej z bocznic.
– Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek wagonów na bocznicy własnej a ile na PKP ?

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Matematyczny model problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne: $t_1, t_2 \geq 0$

Funkcja celu: $f(t_1, t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2 \rightarrow \min$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10t_1 + 20t_2 = 100 \Leftrightarrow g(t_1, t_2) = t_1 + 2t_2 = 10 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja Lagrange'a:

$$F(t_1, t_2, \lambda) = f(t_1, t_2) + \lambda\left[10 - t_1 - 2t_2\right] \rightarrow \min$$

Pochodne cząstkowe z funkcji Lagrange'a względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - t_1 - 2t_2, \quad \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0,5t_1 + 3 - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial t_2} = t_2 + 4 - 2\lambda$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - t_1 - 2t_2 = 0 \\ 0,5t_1 + 3 - \lambda = 0 \\ t_2 + 4 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 4 \\ \lambda_1^* = 4 \end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki dostateczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = 0,5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_1}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial t_2} = 2$$

Hesjan obrzeżony:

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dla zadania **na minimum** z $m = 1$ warunkami ograniczającymi wymagane jest, aby tylko jeden minor $|H_2| = |H|$ równy wyznacznikowi głównemu miał znak taki jak $(-1)^m = -1 < 0$.

Łatwo sprawdzić że wartość wyznacznika (obliczona np. stosując rozwinięcie Laplace'a względem 1 wiersza wynosi):

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (0 - 2 \cdot 0,5) = -1 - 2 = -3 < 0$$

PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Twórcą teorii **programowania dynamicznego** jest **Richard Bellman**, który opracował jej podstawy teoretyczne.

Wyczerpujący opis teoretyczny oraz metodologię wykorzystania programowania dynamicznego do zagadnień podejmowaniu optymalnych decyzji można znaleźć między innymi w pracy monograficznej:

[1] Bellman R., Dreyfus S. F., Programowanie Dynamiczne, PWE, Warszawa 1967.

Metodologia programowania dynamicznego:

Formalnie rzecz biorąc, metody programowania dynamicznego polegają na **zamianie** zadania optymalizacyjnego z **N** zmiennymi decyzyjnymi (znalezienia ekstremum warunkowego funkcji **N** – zmiennych) na **N** zadań z **jedną zmienną decyzyjną**, przy czym zadania te są powiązane ze sobą określoną **zależnością rekurencyjną** (na każdym etapie zadania składowego wyznacza się ekstremum warunkowe uwzględniając rezultat osiągnięty na etapie poprzednim).

Postępując w ten sposób upraszczamy proces rachunkowy (zamiast rozwiązywać zadanie złożone rozwiązujemy zadania prostsze).

Operacja rozbicia zadania optymalizacyjnego na zadania składowe jest możliwa tylko wtedy, gdy **funkcja celu** zadania jest tzw. **funkcją separowalną**.

PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Określenie:

Funkcja **N** zmiennych $F(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ będzie funkcją **separowalną**, jeśli $F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) \oplus \ldots \oplus f_N(x_N)$.

Operację: $x \oplus y$ należy rozumieć jako:

1) $x \oplus y := x + y$, albo
2) $x \oplus y := x \cdot y$, albo
3) $x \oplus y := \min\{x, y\}$, albo
4) $x \oplus y := \max\{x, y\}$.

Uwaga: Następujące funkcje celu:

$F_1(x_1, x_2, x_3) = 5g_1(x_1) + 8g_3(x_3)x_3 + 4g_2(x_2)x_2$

$F_2(x_1, x_2, x_3) = \ln[9g_1(x_1) + 2g_2(x_2) + 4g_3(x_3)]$ - **mogą być** funkcjami celu w programowaniu dynamicznym.

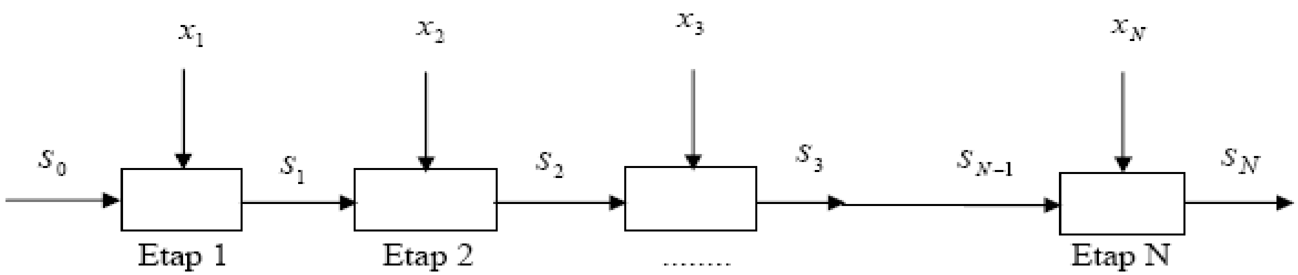
Nie może być to natomiast funkcja celu postaci:

$F_3(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1)x_2 + g_2(x_2)x_3 + g_3(x_3)$

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Metody programowania dynamicznego są w głównej mierze wykorzystywane do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych dla tzw. **wieloetapowych procesów decyzyjnych**.

Ogólny schemat wieloetapowego procesu decyzyjnego przedstawia następujący rysunek:



Schemat ten przedstawia dowolny proces (np. realizację jakiejkolwiek działalności), którego przebieg można podzielić na **N - etapów**. Na dowolnym etapie tego procesu możemy wyróżnić następujące elementy:

1) Stan wejściowy procesu do danego etapu (na schemacie - $s_{i-1}, (i = 1,..., N)$) – jest to stan jaki osiągnął proces w wyniku realizacji etapu poprzedniego.
2) Decyzję podejmowaną na danym etapie (na schemacie - $x_i, (i = 1,..., N)$).
3) Stan wyjściowy procesu z danego etapu (na schemacie - $s_i, (i = 1,..., N)$) – stan ten zależy od stanu wejściowego oraz od podjętej decyzji na danym etapie.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stan procesu można opisywać za pomocą jednego lub kilku parametrów – zwanych: **zmiennymi stanu**. W podanym schemacie proces decyzyjny jest opisywany za pomocą jednej charakterystyki – jednej **zmiennej stanu**.

Oznaczmy przez: S_i $(i = 1,...,N)$ - zbiór możliwych w **i - tym** etapie wartości zmiennej stanu - s_i (**zbiór możliwych stanów**). Natomiast przez: D_i $(i = 1,...,N)$ - zbiór możliwych decyzji w **i - tym** etapie. Oznacza to, że zmienna decyzyjna może przyjmować wartości z tego zbioru $(x_i \in D_i)$.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Formalnie wieloetapowy proces decyzyjny możemy wyrazić następującymi zależnościami rekurencyjnymi:

$$s_i = g_i(s_{i-1}, x_i), i = 1,2,\ldots, N, s_i \in S_i, x_i \in D_i$$

s_0 - jest ustalonym stanem początkowym procesu

Uwaga:

Zależności te przedstawiają ważną cechę wieloetapowych procesów decyzyjnych, a mianowicie, że stan procesu s_i - osiągnięty w i - tym etapie zależy od stanu wejściowego s_{i-1} - do i - tego etapu oraz od decyzji x_i - podjętej na tym etapie.

Problem, który należy rozwiązać w każdym wieloetapowym procesie decyzyjnym polega na określeniu ciągu decyzji: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$, ($x_i^* \in D_i$), przy których ustalona funkcja celu dla całości procesu przebiegającego w N - etapach osiąga wartość optymalną (min lub max).

Ciąg decyzji optymalnych wyznaczonych dla każdego etapu: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$ nazywa się: **polityką optymalną** wieloetapowego procesu decyzyjnego.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Schemat ogólny programowania dynamicznego:

Rozpatrzmy model decyzyjny wieloetapowego procesu decyzyjnego. Oznaczmy:

$X = (x_1, \ldots, x_N)$ - wektor zmiennych decyzyjnych ustalanych na każdym etapie;

s_0 - zadany stan początkowy procesu;

$s_1, s_2, \ldots, s_N$ - stany wyjściowe procesu dla poszczególnych etapów;

$Z_1(s_0, x_1)$ - wartość funkcji celu uzyskana w pierwszym etapie przy zadanym stanie początkowym;

$Z_2(s_1, x_2), Z_3(s_2, x_3), \ldots, Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}), Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - odpowiednio wartości funkcji celu w kolejnych etapach: 2,3,…,N.

Oczywiste jest, że zachodzi: $Z(s_0, X) = Z_1(s_0, x_1) + \ldots + Z_N(s_{N-1}, x_N)$

Należy ustalić **optymalną strategię** – ciąg decyzji $X^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$, taką aby $Z(s_0, X^*) \to \max(\min)$, **przy ograniczeniach**: $X \subset \Omega$, gdzie Ω - obszar **określenia zadania wyjściowego**.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W celu rozwiązania tego zadania dokonujemy dekompozycji na N – zadań (etapów) otrzymując rodzinę zadań:

Niech $\Omega_N, \Omega_{N-1,N}, \ldots, \Omega_{1,2,\ldots,N} \equiv \Omega$ - oznacza rozbicie obszaru dla zadania wyjściowego na obszary ograniczające zmienne decyzyjne dla poszczególnych etapów.

Oznaczmy przez:

$F_1(s_{N-1}) = \max\limits_{x_N \in \Omega_N}(\min) Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - optymalną wartość funkcji celu uzyskaną na 1 – rozpatrywanym etapie.

Dalej uzyskujemy, że:

$F_2(s_{N-2}) = \max\limits_{x_{N-1} \in \Omega_{N-1,N}}(\min)\left[Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}) + F_1(s_{N-1})\right]$ - optymalna wartość funkcji celu w 2 – rozpatrywanym etapie.

Analogicznie dla 3 – rozpatrywanego etapu mamy:

$$F_3(s_{N-3}) = \max_{x_{N-2} \in \Omega_{N-2,N-1,N}}(\min)\left[Z_{N-2}(s_{N-3}, x_{N-2}) + F_2(s_{N-2})\right]$$

…………………………………………………………… i dla kolejnych

Wreszcie dla N – tego rozpatrywanego etapu:

$$F_N(s_0) = \max_{x_1 \in \Omega_{1,2,\ldots,N} \equiv \Omega}(\min)\left[Z_1(s_0, x_1) + F_{N-1}(s_1)\right]$$

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Uwaga:

Z równania tego wynika, że optymalna wartość funkcji celu dla N – etapowego procesu decyzyjnego jest równa optymalnej wartości funkcji celu ze względu na pierwszą decyzję, przy założeniu stanu początkowego s_0 - procesu oraz maksymalnej wartości funkcji celu dla procesu (N-1) – etapowego.

Powyższy ciąg równań funkcyjnych wyraża tzw. **zasadę optymalności** – sformułowaną przez **R. Bellmana**.

„Niezależnie od tego jakie były decyzje początkowe, każda następna decyzja w ciągu sekwencyjnym jest decyzją optymalną z punktu widzenia stanu wynikłego z decyzji poprzednich. W efekcie końcowym otrzymamy zawsze strategię optymalną"

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując metodologię programowania dynamicznego oraz ideę algorytmu sekwencyjnego można rozwiązać bardzo wiele różnorodnych problemów decyzyjnych.

Przytoczymy tutaj tylko niektóre z tych problemów:

- Problem optymalnego wyboru przedsięwzięć inwestycyjnych.
- Problem wyznaczenia najkrótszej trasy przejazdu pomiędzy dwoma miejscowościami w wieloetapowej sieci drogowej (transportowej).
- Problem optymalnego wyznaczenia wielkości odnawianych zasobów magazynowych w wieloetapowym (np. co kwartał) procesie dostaw magazynowych itp.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Przykład 1 - Problem optymalnego rozdziału inwestycji

Międzynarodowe przedsiębiorstwo transportowe planuje zainwestować 10 000 000 $ w rozwój sieci swoich placówek na nowych potencjalnych rynkach świadczenia usług. Pod uwagę bierze 4 strefy (rynki), a mianowicie: (I) – rosyjski, (II) – ukraiński, (III) – białoruski, (IV) – polski.

Firma konsultingowa przeprowadziła wstępne badania opracowując tabelę oraz krzywe potencjalnych zysków dla poszczególnych krajów lokalizacji sieci swoich placówek, przy zainwestowaniu „x" - jednostek pieniężnych (jednostka to 1 000 000 $).

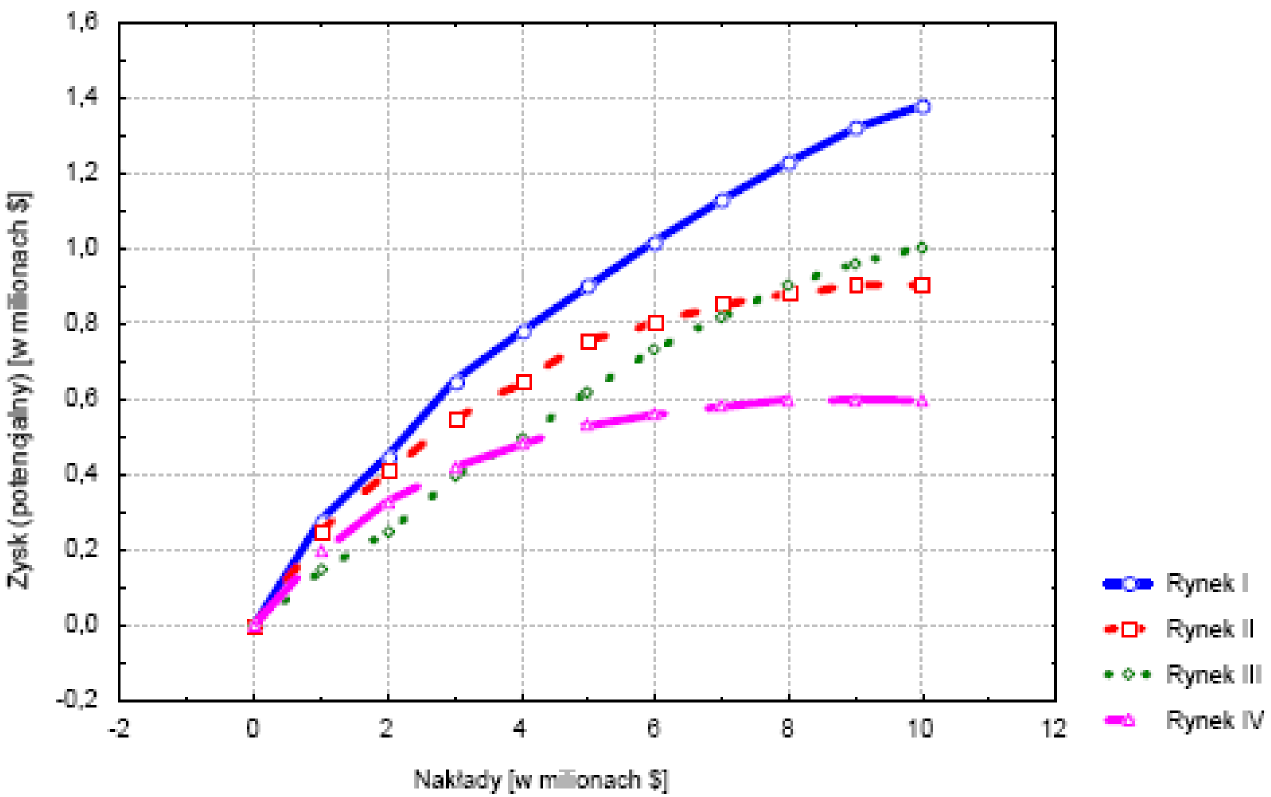
❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Krzywe potencjalnego zysku prezentują poniższe wykresy:



❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Zadanie decyzyjne jest następujące: Jak rozłożyć kwotę inwestycyjną nie przekraczającą 10 jednostek, aby sumaryczny zysk (potencjalnie) był jak największy ?

Jest to zagadnienie kombinatoryczne, ale mające bardzo dużo kombinacji, dlatego zastosujemy algorytm sekwencyjny **R. Bellmana**.

Przyjmiemy następujące oznaczenia:

$f_1(x_1)$ - funkcja zysku z rynku I, przy inwestycji kwoty x_1,

$f_2(x_2)$ - funkcja zysku z rynku II, przy inwestycji kwoty x_2,

$f_3(x_3)$ - funkcja zysku z rynku III, przy inwestycji kwoty x_3,

$f_4(x_4)$ - funkcja zysku z rynku IV, przy inwestycji kwoty x_4,

$x_i \in \{0,1,\ldots,10\}, i = 1,2,3,4.$

Ponadto oznaczymy dla potrzeb algorytmu sekwencyjnego:

$F_{12}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I i II, tzn. $x_1 + x_2 = A$, $A \in \{0,1,\ldots,10\}$

$F_{123}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I, II i III, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 = A$, $A \in \{0,1,\ldots,10\}$

$F_{1234}(A)$ - zysk przy optymalnym podziale kwoty inwestycyjnej wielkości **A** w czterech strefach: I - IV, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A$, $A \in \{0,1,\ldots,10\}$,

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując opisany wcześniej ogólnie algorytm sekwencyjny **R. Bellmana** możemy uzyskać optymalne decyzje podziału środków inwestycyjnych.
Dla przykładu pokażemy jak optymalnie zainwestować kwotę A=2 000000 $ (2 jednostki) w rozpatrywane 4 rynki:

Na pierwszym etapie bierzemy pod uwagę tylko rynek rosyjski – w jeden rynek optymalnie inwestujemy zgodnie z wartościami funkcji celu: $F_1(x) = f_1(x)$ - podanymi w tabeli.

W drugim etapie dołączamy drugi rynek – ukraiński:

$$(*)\ F_{12}(A) = \max_{\substack{x_2 = 0,1,\dots,A \\ x_1 + x_2 = A}} \{f_2(x_2) + f_1(A - x_2)\}$$

$$F_{12}(2) = \max\{f_2(0) + f_1(2-0), f_2(1) + f_1(2-1), f_2(2) + f_1(2-2)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.45; 0.25 + 0.28; 0.41 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1 \rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{12}(0) = \max\{f_2(0) + f_1(0)\} = 0$$
$$F_{12}(1) = \max\{f_2(0) + f_1(1-0), f_2(1) + f_1(1-1)\} = \max\{0.28; 0.25\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W 3 - etapie wyznaczymy optymalną wartość funkcji celu biorąc pod uwagę trzy rynki: rosyjski, ukraiński, białoruski:

$$(**)\ F_{123}(A) = \max_{\substack{x_3 = 0,1,2,\ldots,A \\ x_1 + x_2 + x_3 = A}} \{f_3(x_3) + F_{12}(A - x_3)\}$$

$$F_{123}(2) = \max\{f_3(0) + F_{12}(2-0); f_3(1) + F_{12}(2-1); f_3(2) + F_{12}(2-2)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.53; 0.15 + 0.28; 0.25 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0 \rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{123}(0) = \max\{f_3(0) + F_{12}(0)\} = 0$$
$$F_{123}(1) = \max\{f_3(0) + F_{12}(1-0); f_3(1) + F_{12}(1-1)\} = \max\{0.28; 0.15\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach \$)	Przewidywany zysk (w milionach \$) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wreszcie w 4 etapie wyznaczymy wartość optymalną funkcji celu biorąc pod uwagę wszystkie cztery rynki.

$$(***)\ F_{1234}(A) = \max_{\substack{x_4 = 0,1,2,\dots,A \\ x_1+x_2+x_3+x_4 = A}} \{f_4(x_4) + F_{123}(A - x_4)\}$$

$$F_{1234}(2) = \max\{f_4(0) + F_{123}(2-0); f_4(1) + F_{123}(2-1); f_4(2) + F_{123}(2-2)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.53; 0.20 + 0.28; 0.33 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0,0 \rangle$

Otrzymany wynik jest wynikiem końcowym, gdy inwestor decyduje się na wydanie 2 - jednostek pieniężnych – optymalny rozdział inwestycji: przeznaczyć po jednostce na rynki I i II.

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Dalej należy przeprowadzić analogiczne rozważania rachunkowe dla $A = 3,4,\ldots,10$. Ostateczne wyniki podaje tabela poniżej:

Nakł. Inwest. (A)	Zysk pot. ze strefy				$F_{12}(A)$	Strat. Opt.	$F_{123}(A)$	Strat. Opt.	$F_{1234}(A)$	Strat. Opt.	$\Delta F_{1234} = F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ (Przyrosty Zysku)
	f_1	f_2	f_3	f_4							
0	0	0	0	0	0	$\langle 0,0\rangle$	0	$\langle 0,0,0\rangle$	0	$\langle 0,0,0,0\rangle$	---
1	0,28	0,25	0,15	0,20	0,28	$\langle 1,0\rangle$	0,28	$\langle 1,0,0\rangle$	0,28	$\langle 1,0,0,0\rangle$	0,28
2	0,45	0,41	0,25	0,33	0,35	$\langle 1,1\rangle$	0,53	$\langle 1,1,0\rangle$	0,53	$\langle 1,1,0,0\rangle$	0,25
3	0,65	0,55	0,40	0,42	0,70	$\langle 2,1\rangle$	0,70	$\langle 2,1,0\rangle$	0,73	$\langle 1,1,0,1\rangle$	0,20
4	0,78	0,65	0,50	0,48	0,90	$\langle 3,1\rangle$	0,90	$\langle 3,1,0\rangle$	0,90	$\langle 3,1,0,0\rangle$ $\langle 2,1,0,1\rangle$	0,17
5	0,90	0,75	0,62	0,53	1,06	$\langle 3,2\rangle$	1,06	$\langle 3,2,0\rangle$	1,10	$\langle 3,1,0,1\rangle$	0,20
6	1,02	0,80	0,73	0,56	1,20	$\langle 3,3\rangle$	1,21	$\langle 3,2,1\rangle$	1,26	$\langle 3,2,0,1\rangle$	0,16
7	1,13	0,85	0,82	0,58	1,33	$\langle 4,3\rangle$	1,35	$\langle 3,3,1\rangle$	1,41	$\langle 3,2,1,1\rangle$	0,15
8	1,23	0,88	0,90	0,60	1,44	$\langle 5,3\rangle$	1,48	$\langle 4,3,1\rangle$	1,55	$\langle 3,3,1,1\rangle$	0,14
9	1,32	0,90	0,96	0,60	1,57	$\langle 6,3\rangle$	1,60	$\langle 5,3,1\rangle$ $\langle 3,3,3\rangle$	1,68	$\langle 4,3,1,1\rangle$ $\langle 3,3,1,2\rangle$	0,13
10	1,38	0,90	1,00	0,60	1,68	$\langle 7,3\rangle$	1,73	$\langle 4,3,3\rangle$	1,81	$\langle 4,3,1,2\rangle$	0,13

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wniosek:

Dodatkowy zysk: $\Delta F_{1234} = F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ przy zainwestowaniu na tych czterech rynkach dodatkowej jednostki (1 000000 $) maleje wraz ze wzrostem nasycenia rynków w środki inwestycyjne - A (jest to zjawisko naturalne i prawo ekonomiczne rynku).

Sens praktyczny tego wniosku ilustruje następujący wykres: