ZAGADNIENIA

OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ (c.-d.)

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 3

Określić optymalne z punktu widzenia kosztów transportu współrzędne (X,Y) dla lokalizacji magazynu zaopatrującego w towar pięciu odbiorców dla przedstawionych poniżej danych modelowych.

Lokalizacje poszczególnych odbiorców: (x_i, y_i) $(i = 1,2,\ldots,5)$

Numer Odbiorcy	Lokalizacja x_i [km]	Lokalizacja y_i [km]	Wielkość zapotrzebowania z_i [w jednostkach towaru]
1	2	5	2
2	4	3	7
3	1	1	4
4	3	2	9
5	3	4	1

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

(X,Y) – współrzędne lokalizacji magazynu,

z_i - ilościowe zapotrzebowanie poszczególnych odbiorców na towar (i=1,2,…,5),

$d_i^2 = \left[(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2\right]$ - kwadrat odległość magazynu od i-tego odbiorcy,

$K_i = z_i \cdot d_i^2 \geq 0$ - koszty dostaw towaru proporcjonalne do kwadratu odległości oraz zapotrzebowania z_i odbiorców (nieujemne),

$K = \sum_{i=1}^{5} K_i = \sum_{i=1}^{5} z_i \cdot d_i^2$ - całkowity koszt dostaw towaru.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Model matematyczny problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne:

(X,Y) – współrzędne lokalizacji magazynu

Funkcja celu:

$$K(X,Y)=\sum_{i=1}^{5} z_i\left[(X-x_i)^2+(Y-y_i)^2\right]\to \min$$

Uwaga:

brak warunków ograniczających (szukamy ekstremum bezwarunkowego)

Rozwiązanie:

$$K=2(X-2)^2+2(Y-5)^2+7(X-4)^2+7(Y-3)^2+4(X-1)^2+4(Y-1)^2+$$
$$+9(X-3)^2+9(Y-2)^2+(X-3)^2+(Y-4)^2\to \min$$

Warunki konieczne:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K}{\partial X}=0\\ \dfrac{\partial K}{\partial Y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(X-2)+14(X-4)+8(X-1)+18(X-3)+2(X-3)=0\\ 4(Y-5)+14(Y-3)+8(Y-1)+18(Y-2)+2(Y-4)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}46X=132\\ 46Y=114\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X^*=\dfrac{66}{23}\\ Y^*=\dfrac{57}{23}\end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki wystarczające:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}(46X - 132) = 46$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y}(46Y - 114) = 46$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Y \partial X} = \frac{\partial^2 K}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}(46X - 132) = \frac{\partial}{\partial X}(46Y - 114) = 0$$

Warunkiem dostatecznym dla zadania na minimum jest, aby Hesjan drugich pochodnych cząstkowych był dodatni.

Łatwo sprawdzić, że Hesjan:

$$|H| = |H_2| = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial Y \partial X} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 0 \\ 0 & 46 \end{bmatrix} = 46 \cdot 46 = 2116 > 0$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

5. Przykłady nieliniowych problemów decyzyjnych – zagadnienie wyboru optymalnego portfela akcji.

Rozpatrzmy następujący problem decyzyjny. Inwestor posiadający określony kapitał chce go ulokować na giełdzie kupując akcje. Na giełdzie inwestor ma do wyboru akcje n – firm. Posiadane środki chciałby ulokować możliwie jak najlepiej, tzn. ustalić optymalny portfel akcji (zestaw akcji jakie posiada inwestor).

Każda akcja jest charakteryzowana przez dwa podstawowe czynniki, istotne dla inwestora przy zakupie akcji: stopa zwrotu (zysku) i ryzyko.

Stopa zysku - to stosunek zysku, jaki przynosi dana akcja (na koniec okresu t), do kosztu jej zakupu (na początku okresu t, czyli w momencie t-1):

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}} .$$

Wszystkie decyzje odnośnie inwestowania w akcje odnoszą się do przyszłości oraz są podejmowane w warunkach niepewności i ryzyka. Stopa zysku jest w rzeczywistości **przyszłą oczekiwaną stopą zysku** jaka zostanie osiągnięta w pewnym okresie. Jest to zmienna losowa, która może przyjmować różne wartości z różnymi prawdopodobieństwami (zależą one od sytuacji na giełdzie, która z kolei zależy od stanu gospodarki oraz od sytuacji politycznej kraju).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przyszłą **oczekiwaną stopę zysku** dla losowej rzeczywistej stopy zysku danej akcji oblicza się z reguły następująco: $r_j = \sum_{i=1}^{n} p_i r_{ij}$, gdzie: r_j – oczekiwana stopa zysku j – tej akcji, p_i – prawdopodobieństwo wystąpienia stanu S_i – gospodarki, r_{ij} – i – ta możliwa stopa zysku j – tej akcji.

Dla przykładu:

Stany gospodarki	Prawdopodobieństwo	Stopy zysku (w %)	
		A	B
S_1	0,3	20	10
S_2	0,4	10	20
S_3	0,3	0	30

Dla przykładowych akcji **A** oraz **B** oczekiwana stopa zysku wynosi: $r_A = 0{,}3 \cdot 20 + 0{,}4 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 0 = 10[\%]$, $r_B = 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 20 + 0{,}3 \cdot 30 = 20[\%]$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Ryzyko inwestowania w akcje można mierzyć za pomocą jednej syntetycznej miary, a mianowicie za pomocą wariancji stopy zysku (im większa zmienność stopy zysku dla akcji, tym większe ryzyko ewentualnych potencjalnych strat).

Wariancję stopy zysku danej akcji wyraża się wzorem: $v_j = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(r_{ij} - r_j\right)^2$.

Zamiast wariancji można posługiwać się praktyczniejszym **odchyleniem standardowym**: $s_j = \sqrt{v_j}$.

Dla przykładowych akcji **A** oraz **B** odchylenia standardowe stopy zysku wynoszą:

$v_A = 0{,}3 \cdot (20-10)^2 + 0{,}4 \cdot (10-10)^2 + 0{,}3 \cdot (0-10)^2 = 60$,

$v_B = 0{,}3 \cdot (10-20)^2 + 0{,}4 \cdot (20-20)^2 + 0{,}3 \cdot (30-20)^2 = 60$ (ryzyko obu akcji jest identyczne).

Przyjmijmy teraz, że inwestor chce zainwestować w portfel akcji. **Stopę zysku dla portfela** akcji wyznacza się ze wzoru:

$r_p = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j$, gdzie: x_j – udział j – tej akcji w portfelu (stosunek wartości j – tej akcji do wartości wszystkich akcji w portfelu), r_j – oczekiwana stopa zysku j – tej akcji. Oczywiste jest, że $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1; \quad 0 \le x_j \le 1; \quad (j = 1,\ldots,n)$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Gdy inwestor kupuje kilka akcji, istotne jest powiązanie ich stóp zysku mierzone **współczynnikiem korelacji**: $\rho_{i,j} = \dfrac{\sum_{k=1}^{m} p_k (r_{ki} - r_i)(r_{kj} - r_j)}{s_i \cdot s_j}$.

Dla akcji **A** i **B** współczynnik korelacji wynosi: $\rho_{A,B} = -1$ - stopy zysku obu akcji są silnie powiązane, wzrost stopy zysku jednej akcji powoduje spadek stopy zysku dla akcji drugiej.

Ryzyko portfela akcji (wariancję stopy zysku dla portfela) obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 v_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j s_i s_j \rho_{i,j}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Dla każdego inwestora interesujące jest wyznaczenie takiego portfela akcji, dla którego:

- **stopa zysku** byłaby **maksymalna**;
- **ryzyko** byłoby **minimalne**;

Jest to problem dwukryterialny (bardzo trudny w tej postaci do rozwiązania) dlatego w praktyce analizuje się dwa uproszczone problemy jednokryterialne:

- **Problem I:** ustalić taki portfel akcji, aby:
  stopa zysku była maksymalna, przy ryzyku nie większym od maksymalnie dopuszczanego.

  $$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \to \max$$

  Przy warunkach:

  $$v_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 v_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j s_i s_j \rho_{i,j} \le V_{dop}\,; \ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1; \ x_j \ge 0 \quad (j = 1,\dots,n).$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

- **Problem II:** ustalić taki portfel akcji, aby:
  ryzyko było minimalne, przy stopie zysku nie mniejszej od minimalnie dopuszczanej.

  $$v_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 v_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j s_i s_j \rho_{i,j} \to \min$$

  Przy warunkach:

  $$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq r_{dop}\,;\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1;\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,\dots,n).$$

Dla naszego przykładu zadanie optymalizacyjne dla problemu II, w przypadku gdy inwestor wymaga aby stopa zysku portfela była nie mniejsza niż 15 [%] będzie miało postać:

$$60x_A^2 + 60x_B^2 + 2x_A x_B \sqrt{60}\sqrt{60}(-1) \to \min$$

$$\begin{cases} 10x_A + 20x_B \geq 15; \\ x_A + x_B = 1; \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Zadanie to sprowadzamy do równoważnej postaci kanonicznej:

$$60\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right) = 60 \cdot f(x_1, x_2, x_3) \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 = 1; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tworzymy funkcje Lagrange'a postaci:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + \lambda_1\left(3 - 2x_1 - 4x_2 + x_3\right) + \lambda_2\left(3 - x_1 - x_2\right)$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

$$L(\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+\lambda_1(3-2x_1-4x_2+x_3)+\lambda_2(3-x_1-x_2)$$

Warunki konieczne:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=3-2x_1-4x_2+x_3=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=1-x_1-x_2=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1-2x_2-2\lambda_1-\lambda_2=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-2x_1-4\lambda_1-\lambda_2=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3}=\lambda_1=0$$

Rozwiązując ten układ 5 równań z 5 niewiadomymi otrzymujemy:

$$\lambda_1^*=0,\lambda_2^*=0,x_1^*=\frac{1}{2},x_2^*=\frac{1}{2},x_3^*=0.$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki konieczne:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - x_1 - x_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1 - 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \lambda_1 = 0$$

Warunki dostateczne – **Hesjan obrzeżony** jest postaci:

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 \\ 0 & 0 & g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 \\ g_1^1 & g_1^2 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2^1 & g_2^2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3^1 & g_3^2 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

gdyż: $g^1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - x_3$, $g^2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$

Dla zadania na minimum z trzema zmiennymi decyzyjnymi (n=3) oraz dwoma warunkami ograniczającymi (m=2) warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum jest, aby minor obrzeżony $\left|\overline{H}_3\right| = \left|\overline{H}\right|$ miał znak taki jak $(-1)^m = (-1)^2 > 0$, a wiec aby **był dodatni**.

Dla naszego przykładu właśnie tak jest, a więc aby zminimalizować ryzyko swojego portfela inwestor powinien zainwestować po połowie swoje pieniądze w akcje obu spółek. Taki portfel jest pozbawiony całkowicie ryzyka (wariancja równa zero) i przynosi dokładnie 15[%] potencjalnego zysku.

PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Twórcą teorii **programowania dynamicznego** jest **Richard Bellman**, który opracował jej podstawy teoretyczne.

Wyczerpujący opis teoretyczny oraz metodologię wykorzystania programowania dynamicznego do zagadnień podejmowaniu optymalnych decyzji można znaleźć między innymi w pracy monograficznej:

[1] Bellman R., Dreyfus S. F., Programowanie Dynamiczne, PWE, Warszawa 1967.

Metodologia programowania dynamicznego:

Formalnie rzecz biorąc, metody programowania dynamicznego polegają na **zamianie** zadania optymalizacyjnego z **N** zmiennymi decyzyjnymi (znalezienia ekstremum warunkowego funkcji **N** – zmiennych) na **N** zadań z **jedną zmienną decyzyjną**, przy czym zadania te są powiązane ze sobą określoną **zależnością rekurencyjną** (na każdym etapie zadania składowego wyznacza się ekstremum warunkowe uwzględniając rezultat osiągnięty na etapie poprzednim).

Postępując w ten sposób upraszczamy proces rachunkowy (zamiast rozwiązywać zadanie złożone rozwiązujemy zadania prostsze).

Operacja rozbicia zadania optymalizacyjnego na zadania składowe jest możliwa tylko wtedy, gdy **funkcja celu** zadania jest tzw. **funkcją separowalną**.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Określenie:

Funkcja **N** zmiennych $F(x_1, x_2, ..., x_N)$ będzie funkcją **separowalną**, jeśli $F(x_1, x_2, ..., x_N) = f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) \oplus ... \oplus f_N(x_N)$.

Operację: $x \oplus y$ należy rozumieć jako:

1) $x \oplus y := x + y$, albo
2) $x \oplus y := x \cdot y$, albo
3) $x \oplus y := \min\{x, y\}$, albo
4) $x \oplus y := \max\{x, y\}$.

Uwaga: Następujące funkcje celu:

$F_1(x_1, x_2, x_3) = 5g_1(x_1) + 8g_3(x_3)x_3 + 4g_2(x_2)x_2$

$F_2(x_1, x_2, x_3) = \ln[9g_1(x_1) + 2g_2(x_2) + 4g_3(x_3)]$ - **mogą być** funkcjami celu w programowaniu dynamicznym.

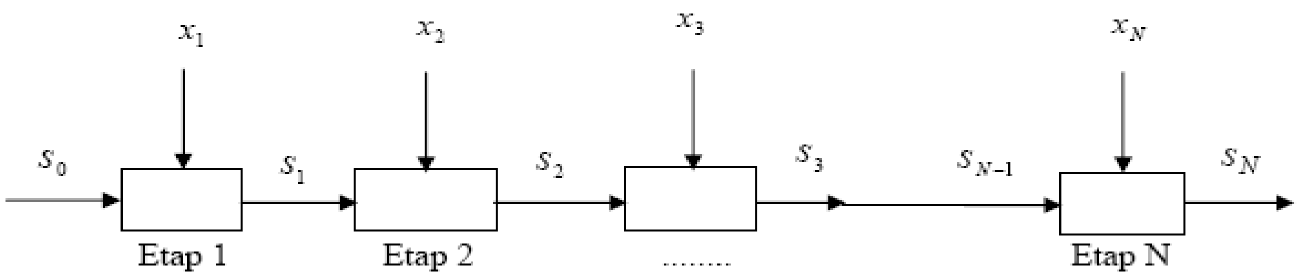
Nie może być to natomiast funkcja celu postaci:

$F_3(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1)x_2 + g_2(x_2)x_3 + g_3(x_3)$

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Metody programowania dynamicznego są w głównej mierze wykorzystywane do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych dla tzw. **wieloetapowych procesów decyzyjnych**.

Ogólny schemat wieloetapowego procesu decyzyjnego przedstawia następujący rysunek:



Schemat ten przedstawia dowolny proces (np. realizację jakiejkolwiek działalności), którego przebieg można podzielić na **N - etapów**. Na dowolnym etapie tego procesu możemy wyróżnić następujące elementy:

1) Stan wejściowy procesu do danego etapu (na schemacie - $s_{i-1}, (i = 1, \ldots, N)$) – jest to stan jaki osiągnął proces w wyniku realizacji etapu poprzedniego.
2) Decyzję podejmowaną na danym etapie (na schemacie - $x_i, (i = 1, \ldots, N)$).
3) Stan wyjściowy procesu z danego etapu (na schemacie - $s_i, (i = 1, \ldots, N)$) – stan ten zależy od stanu wejściowego oraz od podjętej decyzji na danym etapie.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stan procesu można opisywać za pomocą jednego lub kilku parametrów – zwanych: **zmiennymi stanu**. W podanym schemacie proces decyzyjny jest opisywany za pomocą jednej charakterystyki – jednej **zmiennej stanu**.

Oznaczmy przez: S_i $(i = 1,\dots,N)$ - zbiór możliwych w **i - tym** etapie wartości zmiennej stanu - s_i (**zbiór możliwych stanów**). Natomiast przez: D_i $(i = 1,\dots,N)$ - zbiór możliwych decyzji w **i - tym** etapie. Oznacza to, że zmienna decyzyjna może przyjmować wartości z tego zbioru $(x_i \in D_i)$.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Formalnie wieloetapowy proces decyzyjny możemy wyrazić następującymi zależnościami rekurencyjnymi:

$$s_i = g_i(s_{i-1}, x_i), i = 1,2,\ldots, N, s_i \in S_i, x_i \in D_i$$

s_0 - jest ustalonym stanem początkowym procesu

Uwaga:

Zależności te przedstawiają ważną cechę wieloetapowych procesów decyzyjnych, a mianowicie, że stan procesu s_i - osiągnięty w i - tym etapie zależy od stanu wejściowego s_{i-1} - do i - tego etapu oraz od decyzji x_i - podjętej na tym etapie.

Problem, który należy rozwiązać w każdym wieloetapowym procesie decyzyjnym polega na określeniu ciągu decyzji: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$, $(x_i^* \in D_i)$, przy których ustalona funkcja celu dla całości procesu przebiegającego w N - etapach osiąga wartość optymalną (min lub max).

Ciąg decyzji optymalnych wyznaczonych dla każdego etapu: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$ nazywa się: **polityką optymalną** wieloetapowego procesu decyzyjnego.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Schemat ogólny programowania dynamicznego:

Rozpatrzmy model decyzyjny wieloetapowego procesu decyzyjnego. Oznaczmy:

$X = (x_1, \ldots, x_N)$ - wektor zmiennych decyzyjnych ustalanych na każdym etapie;

s_0 - zadany stan początkowy procesu;

$s_1, s_2, \ldots, s_N$ - stany wyjściowe procesu dla poszczególnych etapów;

$Z_1(s_0, x_1)$ - wartość funkcji celu uzyskana w pierwszym etapie przy zadanym stanie początkowym;

$Z_2(s_1, x_2), Z_3(s_2, x_3), \ldots, Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}), Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - odpowiednio wartości funkcji celu w kolejnych etapach: 2,3,…,N.

Oczywiste jest, że zachodzi: $Z(s_0, X) = Z_1(s_0, x_1) + \ldots + Z_N(s_{N-1}, x_N)$

Należy ustalić **optymalną strategię** – ciąg decyzji $X^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$, taką aby $Z(s_0, X^*) \to \max(\min)$, **przy ograniczeniach**: $X \subset \Omega$, gdzie Ω - obszar **określenia zadania wyjściowego**.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W celu rozwiązania tego zadania dokonujemy dekompozycji na N – zadań (etapów) otrzymując rodzinę zadań:

Niech $\Omega_N, \Omega_{N-1,N}, \ldots, \Omega_{1,2,\ldots,N} \equiv \Omega$ - oznacza rozbicie obszaru dla zadania wyjściowego na obszary ograniczające zmienne decyzyjne dla poszczególnych etapów.

Oznaczmy przez:

$F_1(s_{N-1}) = \max\limits_{x_N \in \Omega_N}(\min) Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - optymalną wartość funkcji celu uzyskaną na 1 – rozpatrywanym etapie.

Dalej uzyskujemy, że:

$F_2(s_{N-2}) = \max\limits_{x_{N-1} \in \Omega_{N-1,N}}(\min)\left[Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}) + F_1(s_{N-1})\right]$ - optymalna wartość funkcji celu w 2 – rozpatrywanym etapie.

Analogicznie dla 3 – rozpatrywanego etapu mamy:

$$F_3(s_{N-3}) = \max_{x_{N-2} \in \Omega_{N-2,N-1,N}}(\min)\left[Z_{N-2}(s_{N-3}, x_{N-2}) + F_2(s_{N-2})\right]$$

………………………………………………………… i dla kolejnych

Wreszcie dla N – tego rozpatrywanego etapu:

$$F_N(s_0) = \max_{x_1 \in \Omega_{1,2,\ldots,N} \equiv \Omega}(\min)\left[Z_1(s_0, x_1) + F_{N-1}(s_1)\right]$$

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Uwaga:

Z równania tego wynika, że optymalna wartość funkcji celu dla N – etapowego procesu decyzyjnego jest równa optymalnej wartości funkcji celu ze względu na pierwszą decyzję, przy założeniu stanu początkowego s_0 - procesu oraz maksymalnej wartości funkcji celu dla procesu (N-1) – etapowego.

Powyższy ciąg równań funkcyjnych wyraża tzw. **zasadę optymalności** – sformułowaną przez **R. Bellmana**.

„Niezależnie od tego jakie były decyzje początkowe, każda następna decyzja w ciągu sekwencyjnym jest decyzją optymalną z punktu widzenia stanu wynikłego z decyzji poprzednich. W efekcie końcowym otrzymamy zawsze strategię optymalną”

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując metodologię programowania dynamicznego oraz ideę algorytmu sekwencyjnego można rozwiązać bardzo wiele różnorodnych problemów decyzyjnych.

Przytoczymy tutaj tylko niektóre z tych problemów:

- Problem optymalnego wyboru przedsięwzięć inwestycyjnych.
- Problem wyznaczenia najkrótszej trasy przejazdu pomiędzy dwoma miejscowościami w wieloetapowej sieci drogowej (transportowej).
- Problem optymalnego wyznaczenia wielkości odnawianych zasobów magazynowych w wieloetapowym (np. co kwartał) procesie dostaw magazynowych itp.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Przykład 1 - Problem optymalnego rozdziału inwestycji

Międzynarodowe przedsiębiorstwo transportowe planuje zainwestować 10 000 000 $ w rozwój sieci swoich placówek na nowych potencjalnych rynkach świadczenia usług. Pod uwagę bierze 4 strefy (rynki), a mianowicie: (I) – rosyjski, (II) – ukraiński, (III) – białoruski, (IV) – polski.

Firma konsultingowa przeprowadziła wstępne badania opracowując tabelę oraz krzywe potencjalnych zysków dla poszczególnych krajów lokalizacji sieci swoich placówek, przy zainwestowaniu „x" - jednostek pieniężnych (jednostka to 1 000 000 $).

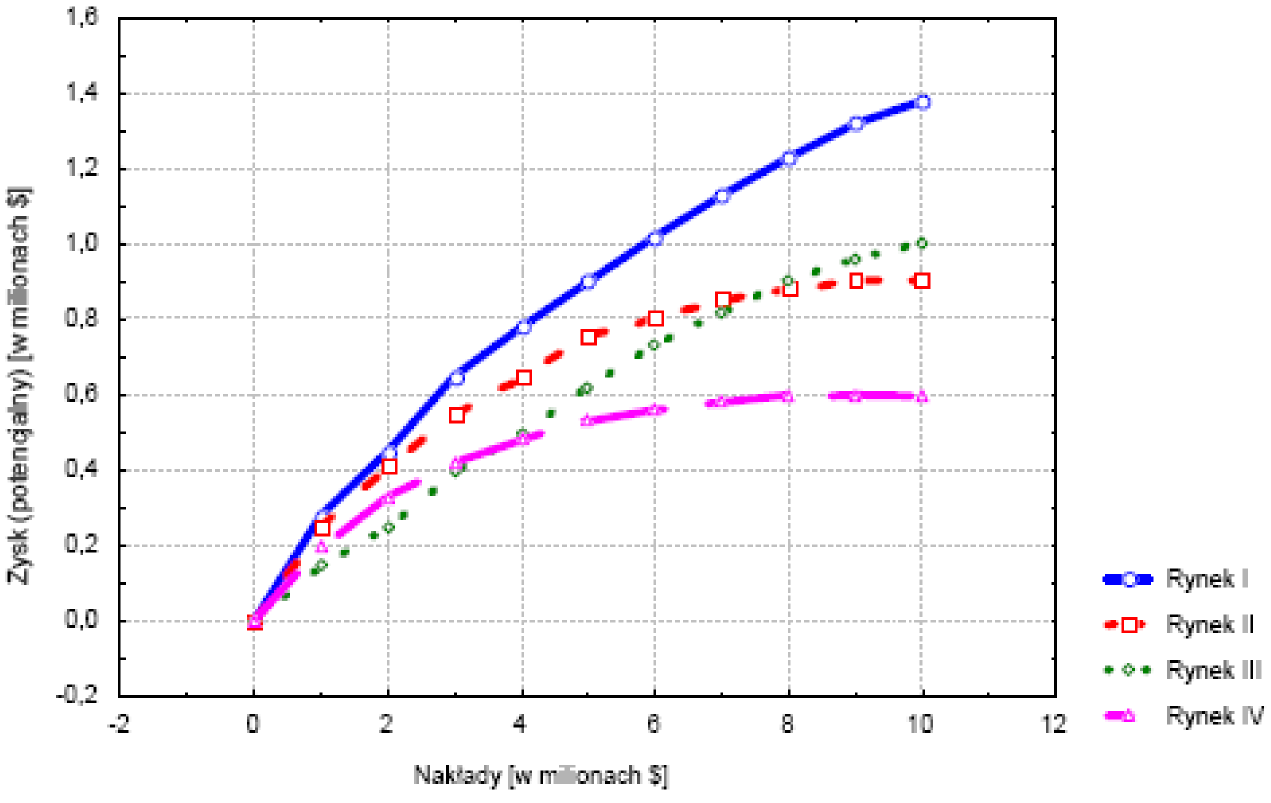
❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Krzywe potencjalnego zysku prezentują poniższe wykresy:



❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Zadanie decyzyjne jest następujące: Jak rozłożyć kwotę inwestycyjną nie przekraczającą 10 jednostek, aby sumaryczny zysk (potencjalnie) był jak największy ?

Jest to zagadnienie kombinatoryczne, ale mające bardzo dużo kombinacji, dlatego zastosujemy algorytm sekwencyjny **R. Bellmana**.

Przyjmiemy następujące oznaczenia:

$f_1(x_1)$ - funkcja zysku z rynku I, przy inwestycji kwoty x_1,

$f_2(x_2)$ - funkcja zysku z rynku II, przy inwestycji kwoty x_2,

$f_3(x_3)$ - funkcja zysku z rynku III, przy inwestycji kwoty x_3,

$f_4(x_4)$ - funkcja zysku z rynku IV, przy inwestycji kwoty x_4,

$x_i \in \{0,1,...,10\}, i = 1,2,3,4.$

Ponadto oznaczymy dla potrzeb algorytmu sekwencyjnego:

$F_{12}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I i II, tzn. $x_1 + x_2 = A$, $A \in \{0,1,...,10\}$

$F_{123}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I, II i III, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 = A$, $A \in \{0,1,...,10\}$

$F_{1234}(A)$ - zysk przy optymalnym podziale kwoty inwestycyjnej wielkości **A** w czterech strefach: I - IV, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A$, $A \in \{0,1,...,10\}$,

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując opisany wcześniej ogólnie algorytm sekwencyjny **R. Bellmana** możemy uzyskać optymalne decyzje podziału środków inwestycyjnych.
Dla przykładu pokażemy jak optymalnie zainwestować kwotę A=2 000000 $ (2 jednostki) w rozpatrywane 4 rynki:

Na pierwszym etapie bierzemy pod uwagę tylko rynek rosyjski – w jeden rynek optymalnie inwestujemy zgodnie z wartościami funkcji celu: $F_1(x) = f_1(x)$ - podanymi w tabeli.

W drugim etapie dołączamy drugi rynek – ukraiński:

$$(*)\ F_{12}(A) = \max_{\substack{x_2 = 0,1,\ldots,A \\ x_1 + x_2 = A}} \{f_2(x_2) + f_1(A - x_2)\}$$

$$F_{12}(2) = \max\{f_2(0) + f_1(2-0), f_2(1) + f_1(2-1), f_2(2) + f_1(2-2)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.45; 0.25 + 0.28; 0.41 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1 \rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{12}(0) = \max\{f_2(0) + f_1(0)\} = 0$$
$$F_{12}(1) = \max\{f_2(0) + f_1(1-0), f_2(1) + f_1(1-1)\} = \max\{0.28; 0.25\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W 3 - etapie wyznaczymy optymalną wartość funkcji celu biorąc pod uwagę trzy rynki: rosyjski, ukraiński, białoruski:

$$(**)\ F_{123}(A) = \max_{\substack{x_3=0,1,2,\dots,A \\ x_1+x_2+x_3=A}} \{f_3(x_3) + F_{12}(A-x_3)\}$$

$$F_{123}(2) = \max\{f_3(0)+F_{12}(2-0); f_3(1)+F_{12}(2-1); f_3(2)+F_{12}(2-2)\} =$$
$$= \max\{0+0.53; 0.15+0.28; 0.25+0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0\rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{123}(0) = \max\{f_3(0)+F_{12}(0)\} = 0$$

$$F_{123}(1) = \max\{f_3(0)+F_{12}(1-0); f_3(1)+F_{12}(1-1)\} = \max\{0.28; 0.15\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wreszcie w 4 etapie wyznaczymy wartość optymalną funkcji celu biorąc pod uwagę wszystkie cztery rynki.

$$(***)\ F_{1234}(A) = \max_{\substack{x_4=0,1,2,\dots,A \\ x_1+x_2+x_3+x_4=A}} \{f_4(x_4) + F_{123}(A-x_4)\}$$

$$F_{1234}(2) = \max\{f_4(0)+F_{123}(2-0); f_4(1)+F_{123}(2-1); f_4(2)+F_{123}(2-2)\} =$$
$$= \max\{0+0.53; 0.20+0.28; 0.33+0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0,0 \rangle$

Otrzymany wynik jest wynikiem końcowym, gdy inwestor decyduje się na wydanie 2 - jednostek pieniężnych – optymalny rozdział inwestycji: przeznaczyć po jednostce na rynki I i II.

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Dalej należy przeprowadzić analogiczne rozważania rachunkowe dla $A = 3,4,...,10$. Ostateczne wyniki podaje tabela poniżej:

Nakł. Inwest. (A)	Zysk pot. ze strefy				$F_{12}(A)$	Strat. Opt.	$F_{123}(A)$	Strat. Opt.	$F_{1234}(A)$	Strat. Opt.	$\Delta F_{1234} = F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ (Przyrosty Zysku)
	f_1	f_2	f_3	f_4							
0	0	0	0	0	0	$\langle 0,0 \rangle$	0	$\langle 0,0,0 \rangle$	0	$\langle 0,0,0,0 \rangle$	---
1	0,28	0,25	0,15	0,20	0,28	$\langle 1,0 \rangle$	0,28	$\langle 1,0,0 \rangle$	0,28	$\langle 1,0,0,0 \rangle$	0,28
2	0,45	0,41	0,25	0,33	0,35	$\langle 1,1 \rangle$	0,53	$\langle 1,1,0 \rangle$	0,53	$\langle 1,1,0,0 \rangle$	0,25
3	0,65	0,55	0,40	0,42	0,70	$\langle 2,1 \rangle$	0,70	$\langle 2,1,0 \rangle$	0,73	$\langle 1,1,0,1 \rangle$	0,20
4	0,78	0,65	0,50	0,48	0,90	$\langle 3,1 \rangle$	0,90	$\langle 3,1,0 \rangle$	0,90	$\langle 3,1,0,0 \rangle$ $\langle 2,1,0,1 \rangle$	0,17
5	0,90	0,75	0,62	0,53	1,06	$\langle 3,2 \rangle$	1,06	$\langle 3,2,0 \rangle$	1,10	$\langle 3,1,0,1 \rangle$	0,20
6	1,02	0,80	0,73	0,56	1,20	$\langle 3,3 \rangle$	1,21	$\langle 3,2,1 \rangle$	1,26	$\langle 3,2,0,1 \rangle$	0,16
7	1,13	0,85	0,82	0,58	1,33	$\langle 4,3 \rangle$	1,35	$\langle 3,3,1 \rangle$	1,41	$\langle 3,2,1,1 \rangle$	0,15
8	1,23	0,88	0,90	0,60	1,44	$\langle 5,3 \rangle$	1,48	$\langle 4,3,1 \rangle$	1,55	$\langle 3,3,1,1 \rangle$	0,14
9	1,32	0,90	0,96	0,60	1,57	$\langle 6,3 \rangle$	1,60	$\langle 5,3,1 \rangle$ $\langle 3,3,3 \rangle$	1,68	$\langle 4,3,1,1 \rangle$ $\langle 3,3,1,2 \rangle$	0,13
10	1,38	0,90	1,00	0,60	1,68	$\langle 7,3 \rangle$	1,73	$\langle 4,3,3 \rangle$	1,81	$\langle 4,3,1,2 \rangle$	0,13

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wniosek:

Dodatkowy zysk: $\Delta F_{1234} = F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ przy zainwestowaniu na tych czterech rynkach dodatkowej jednostki (1 000000 $) maleje wraz ze wzrostem nasycenia rynków w środki inwestycyjne - A (jest to zjawisko naturalne i prawo ekonomiczne rynku).

Sens praktyczny tego wniosku ilustruje następujący wykres: