LINIOWE MODELE OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Istnieje bardzo wiele sytuacji decyzyjnych, których nie możemy opisać używając tylko wyłącznie zmiennych ciągłych.

Wynika to z nieciągłości pewnych rozważanych procesów ekonomicznych:

- pracownika można przydzielić tylko do jednego z kilku dostępnych stanowisk pracy;
- projekt inwestycyjny będzie przyjmowany do realizacji lub nie;
- zakład produkcyjny będzie lokalizowany w jednym z możliwych punktów lokalizacji lub też nie;

We wszystkich przytoczonych sytuacjach decyzyjnych wymagamy, aby wszystkie (lub choć jedna zmienna decyzyjna), spośród tych które mamy wyznaczyć przyjmowały wartości tzw. ***dyskretne*** (np. ze zbioru liczb całkowitych: $x \in Z$, lub ze zbioru liczb binarnych: $x \in \{0,1\}$).

Zagadnienia decyzyjne, w których przynajmniej jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości dyskretne nazywamy – ***dyskretnym zagadnieniem decyzyjnym***, a ich matematyczne modele – ***dyskretnym zadaniem decyzyjnym*** (DZD).

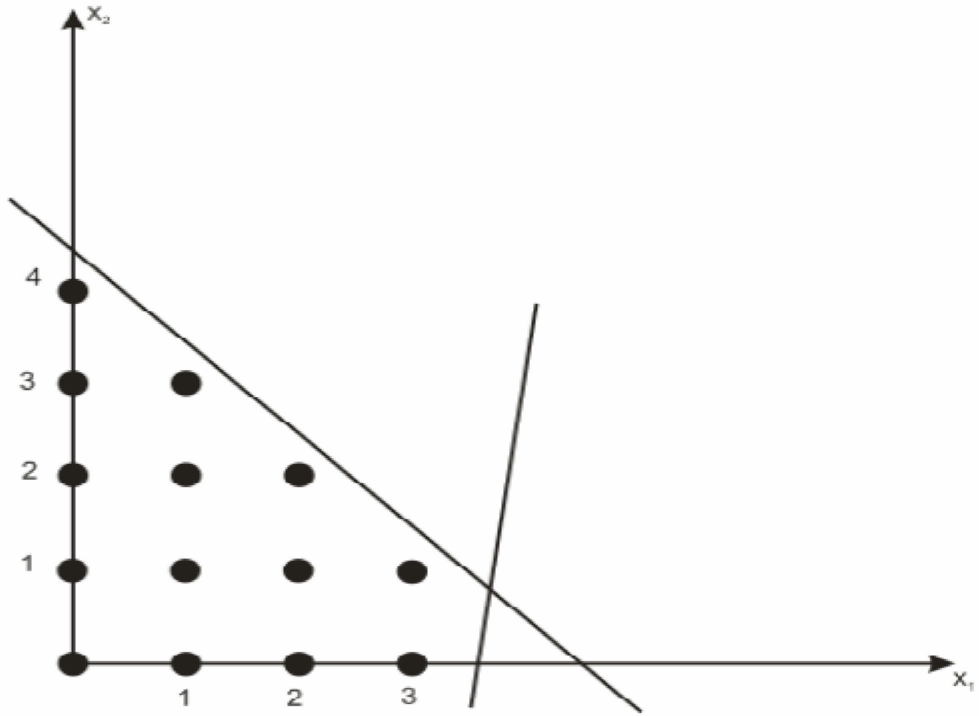
❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Interesować nas będą obecnie tylko takie dyskretne problemy decyzyjne, w których zarówno funkcja celu jak i warunki ograniczające są postaci liniowej – *zadania programowania dyskretnego - liniowego* (PDL). Wśród tego typu zadań wyróżnia się trzy podstawowe grupy:

- zadania *programowania całkowitoliczbowego - liniowego* (PCL)
- zadania *programowania binarnego – liniowego* (PBL)
- zadania *programowania mieszanego – liniowego* (PML)

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – wprowadzenie w tematykę zagadnień

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych „*D*" zadania programowania dyskretnego – liniowego jest zawsze zbiorem niespójnym (np. dla zadania programowania całkowitoliczbowego z dwoma zmiennymi - będzie to zbiór punktów o współrzędnych całkowitych znajdujących się w pewnym wieloboku). Nieciągłość zmiennych decyzyjnych powoduje, że zadania tego typu są trudniejsze do rozwiązania, niż zwykłe zadania programowania liniowego.



❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

- **Zagadnienie optymalnego przydziału**

Istnieje możliwość obsadzenia „n" – stanowisk roboczych (i = 1,2,...,n) przez „n" – osób (pracowników) (j = 1,2,...,n). Znane są efekty pracy j – tego robotnika na i – tym stanowisku pracy (macierz efektów pracy - $W_{i,j} = [w_{i,j}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$).

Efekty te mogą być oceniane pozytywnie (wydajność pracy, wartość produkcji w przeliczeniu na jednostkę czasu) lub negatywnie (liczba braków, czas wykonania pracy, koszty związane z pracą).

Należy dokonać takiego przydziału pracowników do poszczególnych stanowisk pracy, tak aby zminimalizować negatywne lub zmaksymalizować pozytywne efekty pracy dla całego zespołu (zakładu pracy).

Zakłada się ponadto, że każde stanowisko pracy może być obsadzone tylko przez jednego pracownika, a tym samym każdy pracownik może pracować tylko na jednym stanowisku.

Oznaczenia:

Oznaczmy przez $X_{i,j} = [x_{i,j}]_{i,j} = 1,2,\ldots,n$ - macierz zmiennych decyzyjnych, która jest postaci:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{gdy j - ty pracownik jest przydzielony do i - tego stanowiska} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Model matematyczny:

Problem ten można przedstawić za pomocą następującego liniowego zadania programowania binarnego (PBL):

(funkcja celu)

$$f(x_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \cdot x_{i,j} \rightarrow \max(\min)$$

(warunki ograniczające)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

(każde stanowisko jest obsadzone tylko przez 1 pracownika)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$$

(każdy pracownik jest przydzielony tylko do 1 stanowiska)

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \mathrm{i, j=1,2,\ldots,n.}$$

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne (tym samym optymalne) to macierze postaci (dla n=5):

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie jest tylko jedna jedynka).

Zadanie optymalnego przydziału, mimo że jest klasycznym problemem **programowania dyskretnego**, to może być rozwiązane metodami programowania liniowego – **algorytmem simpleks** (co jest bardzo pracochłonne). Istnieje jednak stosunkowo prosty i skuteczny algorytm postępowania – **algorytm węgierski** (oparty na twierdzeniu węgierskiego matematyka - **Denesa Königa**), który można zastosować do rozwiązywania zadań optymalnego przydziału.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Przykład: W pewnym magazynie pracuje 3 pracowników magazynowych: P1, P2, P3, którzy mogą wykonywać 4 rodzaje zadań: Z1, Z2, Z3, Z4, z różną wydajnością. W tabeli poniżej podana jest wydajność pracowników przy wykonywaniu poszczególnych zadań:

Pracownicy	Wydajność pracowników (szt./godz.) przy wykonywaniu zadań magazynowych			
	Z1	Z2	Z3	Z4
P1	15	4	5	2
P2	3	6	3	10
P3	12	4	6	3

Zakładając specjalizację w ciągu dnia pracowników przy wykonywaniu tylko jednego zadania, przydzielić zadania poszczególnym pracownikom, tak aby zmaksymalizować łączną wydajność ich pracy.

Ponieważ w problemie optymalnego przydziału zakłada się, że liczba stanowisk pracy jest taka sama jak liczba pracowników, to w naszym przykładzie musimy wprowadzić czwartego fikcyjnego pracownika. Oczywiście wydajność jego pracy dla poszczególnych zadań będzie równa 0.

Macierz wydajności pracy (współczynników funkcji celu) jest więc postaci:

$$W = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \\ 12 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Matematyczny model zadania:

$$F(x_{i,j}) = 15x_{1,1} + 4x_{1,2} + 5x_{1,3} + 2x_{1,4} + 3x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3} + 10x_{2,4} + $$
$$+ 12x_{3,1} + 4x_{3,2} + 6x_{3,3} + 3x_{3,4} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} & = & 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & = & 1 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} & = & 1 \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} & = & 1 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} & = & 1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} & = & 1 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} & = & 1 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_{i,j} = 0 \ \text{ lub } \ x_{i,j} = 1; \\ i, j = 1,\ldots,4; \end{matrix}$$

Rozwiążemy zadanie korzystając z wersji algorytmu węgierskiego, która zakłada, że funkcja celu jest postaci - minimum. Dlatego w rozwiązaniu będziemy minimalizować funkcję przeciwną do funkcji celu: $-F(x_{i,j})$, dla której macierz współczynników jest postaci:

$$W = \begin{bmatrix} -15 & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & -10 \\ -12 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 1: Przekształcenie macierzy: **W** – tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie znalazło się co najmniej jedno zero;

$$W = \begin{bmatrix} \boxed{-15} & -4 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -3 & \boxed{-10} \\ \boxed{-12} & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element najmniejszy

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & \boxed{13} \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-2 - (-15) = 13

Krok 2: Skreślenie w przekształconej macierzy współczynników funkcji celu wierszy oraz kolumn zawierających zero możliwie najmniejszą liczbą linii;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

trzy linie – zatem przechodzimy do kroku 4

Jeżeli najmniejsza liczba linii konieczna do pokrycia wszystkich zer jest równa wymiarowi macierzy (**czyli - n**), to rozwiązanie, które otrzymamy na podstawie tak przekształconej macierzy współczynników będzie optymalne – przechodzimy do **kroku 3**. Jeżeli jest ona mniejsza niż wymiar macierzy – **W**, to przechodzimy do **kroku 4**.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykład dyskretnego problemu decyzyjnego

Krok 3: Ustalić tak rozwiązanie optymalne, aby w macierzy $\left[x^*_{i,j}\right]$ jedynki znalazły się tylko na tych miejscach, gdzie są zera w przekształconej macierzy – **W** (musimy dbać także, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie była tylko jedna jedynka).

Krok 4: Gdy liczba linii pokrywających zera jest mniejsza od wymiaru macierzy współczynników, to w bieżącej (przekształconej) macierzy współczynników należy znaleźć element najmniejszy oraz:

- odjąć go od elementów nieskreślonych;
- dodać go do elementów podwójnie skreślonych;
- elementy skreślone jedną linią (raz) pozostawiamy bez zmian;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & \boxed{6} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element minimalny

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{5 \quad 4 \quad 7} \\ \boxed{13} & 4 \quad 7 \quad 0 \\ 0 & \boxed{2 \quad 0 \quad 3} \\ \boxed{6} & 0 \quad 0 \quad 0 \end{bmatrix}$$

elementy odjęte

Powrót do **kroku 2** i powtórzenie procedury, aż do uzyskania rozwiązania optymalnego.

elementy dodane

$$W = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 5 & 4 & 7 \\ 13 & 4 & 7 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & \boxed{0} & 3 \\ 6 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cztery linie
zatem rozwiązanie optymalne
(krok 3)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(x_{i,j}) = 15 + 10 + 6 =$$
$$= 31 \text{ [szt./godz.]}$$

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Zagadnienie rozwózki:

Często mamy do czynienia z sytuacją, gdy pewien jednorodny produkt musi zostać przewieziony od producenta do wielu jego odbiorców. Dla przykładu z cukrowni rozwozi sie wyprodukowany cukier, z mleczarni np. masło i mleko, z browaru piwo itd.

Niekiedy mamy sytuację odwrotną, zwłaszcza w przemyśle spożywczym zakupiony surowiec od wielu jego producentów (np. mleko) należy przewieźć do zakładu (np. zakładów mleczarskich) w którym odbywa się dalsza jego przeróbka.

Tego typu zagadnienia nazywają się ogólnie zagadnieniami rozwózkowo-przywozowymi. Dla uproszczenia w dalszym ciągu będziemy rozważać tylko zagadnienie rozwózki.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Zakładamy, że dane są:

- baza będąca miejscem produkcji jednorodnego towaru oraz postoju parku transportowego;

- dana jest liczba pojazdów o jednakowej ładowności;

- znamy popyt każdego odbiorcy;

- oraz macierz odległości (lub kosztu przewozu, czasu przewozu) pomiędzy wszystkimi punktami odbioru;

- popyt każdego odbiorcy jest mniejszy od ładowności pojazdów, a łączne zapotrzebowanie wszystkich punktów odbioru jest mniejsze od ładowności całego parku transportowego;

- towar jest dostarczany do odbiorcy w okresie planowanym (w dniu, tygodniu) przez jeden pojazd.

Należy ustalić taki zbiór marszrut (trasę dostaw towaru) aby:

1. popyt każdego odbiorcy był zrealizowany przez jeden pojazd.

2. ładowność każdego pojazdu nie była przekroczona

3. długość wszystkich marszrut była minimalna

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Wprowadzamy oznaczenia:

n - liczba odbiorców towaru (punktów odbioru)

P - zbiór indeksów wszystkich punktów odbioru $P = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\overline{P}$ - zbiór indeksów wszystkich punktów odbioru i dostawy $\overline{P} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

m - liczba pojazdów

V - zbiór wszystkich połączeń pomiędzy punktami (możliwych marszrut)

$V = \{\langle i, j \rangle : i, j \in \overline{P} \wedge i \neq j\}$

w - jednakowa ładowność wszystkich pojazdów

b_j - popyt j-tego odbiorcy

c_{ij} - odległość od punktu i do punktu j (długość trasy $\langle i, j \rangle$)

Zgodnie z przyjętymi założeniami dane te muszą spełniać warunki:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq m \cdot w \text{ oraz } b_j < w, j \in P$$

Dla każdego pojazdu wyznaczamy jedną marszrutę (łącznie będzie ich m).

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Przyjmiemy następujące zmienne decyzyjne:

x_{ij} - ilość towaru (dobra) przewożona na trasie $\langle i, j \rangle$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy pojazd pokonuje trasę } \langle i, j \rangle \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

Zadanie decyzyjne (PML) będzie miało postać: Znaleźć takie wartości zmiennych x_{ij} oraz y_{ij}, aby:

Funkcja celu: $\sum_{\langle i,j \rangle \in V} c_{ij} \cdot y_{ij} \to min$

przy warunkach ograniczających:

(1) $\sum_{i \in P} y_{ij} = 1$, dla $(j \in P)$

(2) $\sum_{i \in P} y_{ji} = 1$, dla $(j \in P)$

warunki (1) i (2) oznaczają, że dla każdego odbiorcy wjeżdża i z każdego wyjeżdża jeden pojazd

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

(3) $\sum_{i \in P} y_{i0} = m$

(4) $\sum_{i \in P} y_{0i} = m$

warunki (3) i (4) wymuszają, aby z bazy wyjechało i do niej wróciło dokładnie m - pojazdów

(5) $\sum_{i \in P} x_{ij} - \sum_{i \in P} x_{ji} = b_j, \ (j \in P)$

warunek (5) oznacza, że w każdym punkcie zostawiamy tyle ile wynosi jego popyt

(6) $\sum_{j \in P} x_{0j} = \sum_{j \in P} b_j$

warunek (6) pozwala wywieźć z bazy tyle towaru ile wynosi łączny popyt odbiorców

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

(7) $x_{ij} \le w \cdot y_{ij}, \ \left(\langle i, j \rangle \in V\right)$

warunek (7) zapewnia, że na każdej trasie przewieziemy towaru nie więcej niż wynosi ładowność pojazdu. Jeśli danej trasy pojazd nie pokonuje, to przewóz towaru na tej trasie jest zerowy.

(8) $x_{ij} \ge 0, \ \left(\langle i, j \rangle \in V\right)$

(9) $y_{ij} \in \{0,1\}, \ \left(\langle i, j \rangle \in V\right)$

Zadanie rozwózki jest zadaniem o dużych wymiarach.

liczba zmiennych, to: $L(z) = 2n(n+1)$

liczba warunków: $L(w) = 3n + n(n+1) + 3$

Dla n=30 odbiorców mamy 8450 zmiennych i 483 warunki.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Zagadnienie komiwojażera - klasyczny problem optymalizacji dyskretnej

Komiwojażer (dawny sprzedawca objeżdżający domy i oferujący produkty) wyrusza z pewnego miasta (z bazy), ma odwiedzić kilka miejscowości i wrócić do punktu startu. każde z miast może być odwiedzone tylko raz i w dowolnej kolejności.

Dany jest zbiór miast (i=1,2,....,n) oraz nieujemna, kwadratowa macierz odległości (kosztu lub czasu przejazdu) $C = \left[c_{ij}\right] i = 1,\dots,n; j = 1,\dots,n$. Należy znaleźć taką drogę zamkniętą, przechodzącą przez wszystkie miejscowości, która jest minimalna.

Droga zamknięta jest zwana dalej marszrutą i składa się z n odcinków, które będziemy nazywać trasami. Ponieważ marszruta nie może zawierać trasy $\langle i, i \rangle$, więc przyjmujemy, że $c_{ii} = \infty$ dla i=1,2,...,n. Łączna liczba marszrut w problemie komiwojażera jest równa $(n-1)!$. Dla n=10 mamy $9! = 362800$ różnych rozwiązań. Przegląd zupełny zbioru rozwiązań w celu znalezienia optymalnego jest efektywny tylko dla małych $n(n \le 8)$.

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Oznaczmy przez:

$V = \{\langle i, j\rangle : i \neq j; i, j = 1,2,\ldots,n\}$ - niech będzie zbiorem wszystkich możliwych tras

Zmienne decyzyjne:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy marszruta zawiera trasę } \langle i, j\rangle \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$ - zmienna binarna

z_j - zmienna całkowita, która każdemu miastu j-temu przyporządkowuje cechę - kolejność odwiedzenia tego miasta (przy założeni że dla punktu startu - bazy $z_{j_B} = 0$)

Jeżeli n=5 miast oraz $j_B = 1$ (miasto o numerze 1-baza), to przykładowa marszruta może być postaci: $(1,4,5,3,2,1)$, a zmienne kolejności odwiedzeń: $z_1 = 0, z_4 = 1, z_5 = 2, z_3 = 3, z_2 = 4$ (oczywiście miasto startu posiadające cechę $z_1 = 0$ nie może mieć drugiej cechy równej 5)

❑ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

Problem komiwojażera sprowadza się do następującego zadania decyzyjnego (PML):

Wyznaczyć takie wartości zmiennych: x_{ij} oraz z_j, aby:

funkcja celu: $\sum_{\langle i,j \rangle \in V} c_{ij} x_{ij} \to \min$

przy warunkach ograniczających:

(1) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, dla $(j = 1, 2, \ldots, n)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, dla $(i = 1, 2, \ldots, n)$

warunki (1) i (2) oznaczają, że komiwojażer przez każdy punkt przejeżdża tylko jeden raz

Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – przykłady dyskretnych problemów decyzyjnych

(3) $z_i - z_j + nx_{ij} \le n-1$, dla $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 2,3,\ldots,n;\ i \ne j)$

niestety (1) i (2) nie gwarantują, że z wybranych n tras tworzymy tylko jedną marszrutę zamkniętą. Warunek (3) wyklucza możliwość powstawania tzw. podcykli w tworzonej marszrucie.

$z_j \ge 0, z_j \in C,\ (j = 1,2,\ldots,n)$

$x_{ij} \in \{0,1\},\ (\langle i,j \rangle \in V)$

Zadanie komiwojażera jest zadaniem o dużych rozmiarach.

Liczba zmiennych to: $L(z) = n + n(n-1) = n^2$

Liczba warunków to: $L(w) = 2n + n(n-1) - (n-1) = 2n + (n-1)^2$

Dla n=10 mamy 100 zmiennych oraz 101 warunków.

WYBRANE ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA I ANALIZY SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Literatura:

[1] Bogusław Filipowicz, Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych, Analiza i synteza systemów obsługi i sieci kolejkowych, PWN Warszawa 1996.

[2] Jan Mikuś, Metody wspomagania procesu zarządzania, Modele sieciowe i obsługi masowej, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1993.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

1. Uwagi wstępne.

Przez ***„system obsługi masowej”*** rozumie się różnego rodzaju urządzenia ze ***stanowiskami obsługi (kanałami obsługi)***, do których zgłaszają się w stałych lub losowych odstępach czasu ***klienci***, którzy chcą być obsłużeni.

Przykładami tego rodzaju systemów może być:

Numer systemu obsługi	***Klient***	***Stanowisko obsługi Kanał obsługi***	***Rodzaj obsługi***
1	statek	nabrzeże portowe	załadunek lub rozładunek statku
2	pacjent	gabinet lekarski	badanie stanu zdrowia pacjenta
3	abonent telefoniczny	centrala telefoniczna	połączenie z wybranym numerem
4	samochód	stacja benzynowa	tankowanie paliwa
5	samochód	stacja obsługi samochodów	naprawa samochodu (badanie stanu technicznego)
6	maszyna	konserwator maszyn	naprawa uszkodzonej maszyny
7	widz kinowy	kasa biletowa	sprzedaż biletu do kina
8	kupujący w supermarkecie	kasa supermarketu	pobieranie należności za towar

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte, to zgłaszający się klient ma dwie możliwości:

- zrezygnować z obsługi
- ustawić się w kolejce (nie jest to skutkiem złej organizacji pracy, lecz faktem obiektywnym wynikającym z losowego czasu przybywania klientów do stanowisk obsługi oraz losowego czasu trwania ich obsługi)

Uwaga:

Całkowita likwidacja kolejek (przez znaczne zwiększenie liczby stanowisk obsługi) jest rozwiązaniem nie tylko ekonomicznie najgorszym ***(najbardziej kosztownym)***, ale także fizycznie ***niemożliwym*** (zmniejszeniu się liczby klientów oczekujących na obsługę towarzyszyć będzie znaczny wzrost liczby niewykorzystanych stanowisk obsługi oczekujących na klientów - powstaje zatem ***inny rodzaj kolejki***).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Aby skrócić czas oczekiwania klientów w kolejce na obsługę menadżer systemu może:

- zwiększyć ilość stanowisk obsługi,
- skrócić czas obsługi klientów przez wszystkie kanały obsługi lub tylko ich część,

Uwaga:

Oba rozwiązania wymagają poniesienia ***dodatkowych kosztów*** na inwestycje oraz powodują, że ***wydłuży się czas*** w którym wszystkie stanowiska obsługi lub ich część ***będą niewykorzystane*** (system ponosi wtedy niepotrzebne straty). Menadżer systemu musi podjąć decyzje, które są pewnym ***kompromisem*** pomiędzy ***interesami klientów*** (brak kolejek, szybszy czas obsługi) oraz ***interesami zarządzającego systemem*** (niższe koszty funkcjonowania systemu, brak strat).

Zakres zastosowań ***teorii masowej obsługi*** obejmuje różne dziedziny działalności ludzkiej. Teoria ta znalazła zastosowanie m.in. przy rozwiązywaniu bardzo wielu ***problemów ekonomicznych***. Do zadań z teorii masowej obsługi należą również zadania z zakresu ***teorii niezawodności,*** oraz ***zarządzania zapasami***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

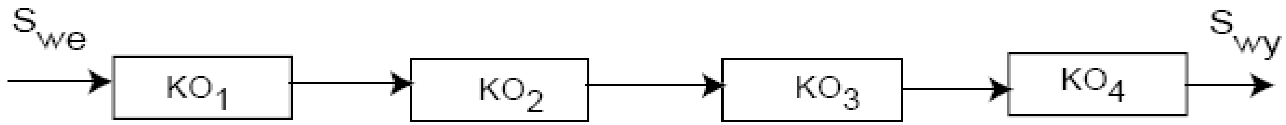
2. Struktura systemów obsługi i ich podstawowe elementy.

Systemy masowej obsługi (jak np. wielkie przedsiębiorstwa, systemy zaopatrzeniowo – magazynowe, systemy transportu miejskiego) poza dużą różnorodnością indywidualnych właściwości posiadają wiele wspólnych cech. Główną ich wspólną cechą jest występowanie w nich trzech podstawowych elementów:

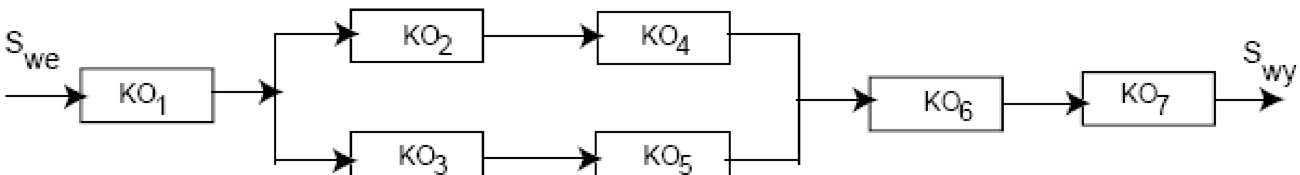
- ***Źródło zgłoszeń*** **-** zbiór potencjalnych ***zgłoszeń*** (klienci, życzenia, potrzeby, przedmioty) do systemu, które czekają na ***obsługę*** (sprzedaż, przegląd, obróbkę) przez urządzenia obsługujące.
- ***Urządzenia obsługujące*** (***kanały obsługi***) **-** realizują obsługę na podstawie zgłoszeń wchodzących do systemu. Mogą to być zarówno obsługujący zgłoszenia ***ludzie*** jak i ***maszyny.***
- ***Kolejka*** (powstaje, gdy liczba wolnych kanałów obsługi jest mniejsza od liczby zgłoszeń). Nie jest to jedynie ***zbiór oczekujących na obsługę***, ale także pewna struktura podlegająca pewnemu zbiorowi reguł – ***regulamin kolejki***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

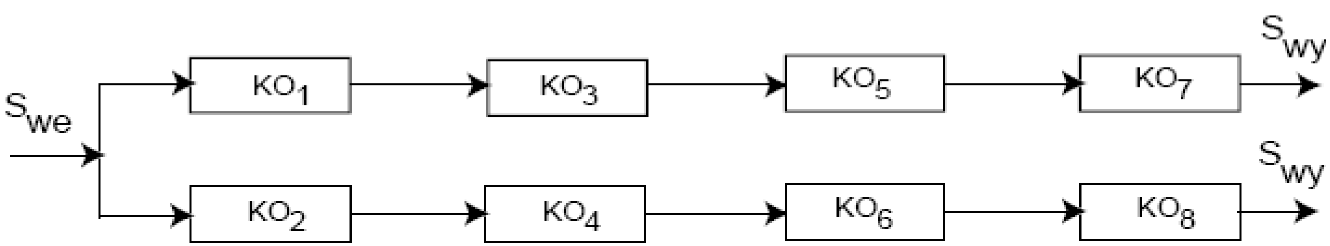
Schemat funkcjonowania przykładowych systemów masowej obsługi przedstawia poniższy rysunek:



a) szeregowa struktura wielofazowego systemu obsługi masowej



b) szeregowo - równoległa struktura wielofazowego systemu obsługi masowej



c) równoległa struktura wielofazowego systemu obsługi masowej

Powstałe w źródle zgłoszenia pojawiają się w stałych lub losowych chwilach czasu i tworzą tzw. ***wejściowy strumień zgłoszeń (*S_{we}*)***. Każde zgłoszenie przechodzi kolejno przez kilka kanałów (faz) i przed każdym może czekać w kolejce (obsługa kończy się po przejściu wszystkich faz). Wszystkie obsłużone zgłoszenia tworzą ***strumień wyjściowy (*S_{wy}*)***. Obsługa zgłoszeń przez oddzielny kanał obsługi podlega określonym prawidłowościom – tzw. ***mechanizm obsługi*** (zależy on m.in. od systemu, celu obsługi, kanału obsługi).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka wejściowego strumienia zgłoszeń.

Zgłoszenia wchodzące do systemu (pojedynczo lub grupowo) tworzą tzw. ***wejściowy strumień zgłoszeń***. Strumień zgłoszeń jest ***określony*** - jeśli znane są prawidłowości rządzące powstawaniem zgłoszenia w przedziale czasu $[t, t+T]$ od chwili „t" – powrotu jego do źródła do chwili „t+T" ponownego jego pojawienia się w systemie (znana jest ***probabilistyczna charakterystyka*** zmiennej losowej „T") oraz ***liczba zgłoszeń*** „N".

Jeżeli w wejściowym strumieniu zgłoszeń nie występują przypadki pojawienia się dwóch lub większej liczby zgłoszeń (tzw. ***strumień pojedynczy***), to jest on w pełni charakteryzowany za pomocą długości przedziału czasu „ξ_n" pomiędzy kolejnym (n – „tym", n=1,2,3,...) oraz poprzednim (n-1 – „szym") zgłoszeniem.

Wejściowy strumień zgłoszeń może być ***strumieniem regularnym*** (zgłoszenia wpływają w jednakowych odstępach czasu: $\xi_n = const$). W praktyce przypadek ten bardzo rzadko występuje (czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami zależy od bardzo wielu czynników przypadkowych). Zatem najczęściej wejściowy strumień zgłoszeń jest ***strumieniem losowym*** (ξ_n - są zmiennymi losowymi o określonych funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa).

Jeżeli długości przedziałów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami nie wpływają wzajemnie na siebie (zmienne losowe ξ_n - są niezależne), to strumień nazywa się ***strumieniem bez następstw*** (***bez pamięci***). W szczególności, gdy zmienne losowe ξ_n mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa to taki strumień nazywa się ***strumieniem rekurencyjnym***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W zależności od typu rozkładu zmiennych losowych ξ_n strumienie rekurencyjne posiadają pewne specyficzne nazwy. Często w systemach obsługi masowej rozpatruje się wejściowy rekurencyjny strumień zgłoszeń będący tzw. ***strumieniem Poissona.***

Dla wejściowego strumienia zgłoszeń ***typu Poissona*** zmienne losowe $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ (n=1,2,...) określające czas pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, a zatem posiadają rozkład prawdopodobieństwa określony za pomocą dystrybuanty postaci:

$$F(t) = P(\xi_n < t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}; \quad \lambda > 0, t \geq 0.$$

Wynika to z poniższego twierdzenia

Twierdzenie:

Jeśli proces zgłoszeń do systemu jest ***procesem Poissona*** z intensywnością $\lambda > 0$, to odstępy czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami (zmienne losowe ξ_n) posiadają ten sam ***rozkład wykładniczy*** z parametrem $\lambda > 0$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Niech $X(t)$ - będzie ***sygnałowym procesem Poissona*** (proces jednorodny o przyrostach niezależnych i pojedynczy) oraz oznacza ilość sygnałów (zgłoszeń) jakie pojawiły się w przedziale czasu [0,t].

Dla strumienia wejściowego będącego ***strumieniem Poissona*** prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale [0,t] pojawiło się „k" – zgłoszeń (sygnałów) wynosi:

$$P(X(t)=k)=e^{-\lambda \cdot t}\frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!};k=0,1,2,...$$

Oczekiwana (średnia) ilość zgłoszeń (sygnałów) w przedziale czasu [0,t] wynosi zatem: $E[X(t)]=\lambda \cdot t$. Stąd parametr „$\lambda > 0$" – interpretujemy jako ilość zgłoszeń w jednostce czasu, a więc jako ***intensywność zgłoszeń*** dla strumienia typu Poissona.

W praktycznych zastosowaniach rozważa się także wejściowy strumień zgłoszeń ***typu Erlanga*** (rzędu „k"). W tym przypadku strumień napływających zgłoszeń może być ***strumieniem Poissona***, lecz do obsługi dopuszcza się tylko jedno (ostatnie) z każdych „k" – kolejno napływających zgłoszeń.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W dotychczasowych rozważaniach wejściowy strumień zgłoszeń charakteryzował się tym, że kolejne zgłoszenia pojawiały się pojedynczo. W praktyce występują również takie przypadki, gdzie zgłoszenia pojawiają się ***grupowo*** w dowolnych chwilach czasu i liczba tych zgłoszeń może być ***losowa***.

W zależności od tego czy struktura probabilistyczna (rozkład) strumienia wejściowego ***zmienia się w czasie czy też nie,*** strumienie dzielimy na ***niestacjonarne*** oraz ***stacjonarne*** (znacznie prostsze do analizy).

Oznaczmy przez:

N_t - liczba zgłoszeń, które weszły do systemu od chwili początkowej „$t_0 = 0$” do chwili czasu „t>0”, $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ kolejne chwile pojawiania się zgłoszeń, zaś przez $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - liczba zgłoszeń (liczba serii zgłoszeń) pojawiająca się w tych chwilach.

Uwaga: Strumień wejściowy uważa się za określony jeśli znany jest rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego:

$$\left(\xi_1 = t_1 - t_0, \ldots, \xi_n = t_n - t_{n-1}; X_1, \ldots, X_n\right),$$

gdzie: $\xi_j = t_j - t_{j-1};\ j = 1,2,\ldots,n$ - czas pomiędzy pojawieniem się „j-tej” serii zgłoszeń.

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Analiza strumienia zgłoszeń wpływającego do systemu obsługi określa jego typ:

- Jeżeli zmienne losowe $\xi_1,\ldots,\xi_n; X_1,\ldots,X_n$ są niezależne to strumień wejściowy nazywamy z ***ograniczonymi następstwami*** (z ograniczoną pamięcią). Strumień taki określa się za pomocą następujących rozkładów:

$$F_n(t) = P(\xi_n < t);\ \text{n=1,2,...} \qquad A_n(k) = P(\{X_n = k\});\ \text{k=0,1,...;}\ \text{n=1,2,...}$$

$$P(\{\xi_1 < t_1^0,\ldots,\xi_n < t_n^0; X_1 = k_1^0,\ldots,X_n = k_n^0\}) = F_1(t_1^0)\cdot\ldots\cdot F_n(t_n^0)\cdot A_1(k_1^0)\cdot\ldots\cdot A_n(k_n^0)$$

- Jeżeli praktycznie niemożliwe jest pojawienie się dwóch lub więcej zgłoszeń w jednej i tej samej chwili, to strumień wejściowy nazywamy ***strumieniem pojedynczym*** (np. strumień Poissona).
- Jeżeli prawdopodobieństwo pojawienia się „k" zgłoszeń w przedziale czasu [t,t+T) nie zależy od tego ile zgłoszeń i w jaki sposób pojawiło się w czasie poprzedzającym ten przedział to strumień taki nazywa się ***strumieniem bez następstw*** (bez pamięci). Jeżeli $N_{t,t+T}$ - oznacza liczbę zgłoszeń, które pojawiły się w przedziale czasu [t,t+T), to warunek braku następstw dla strumienia wejściowego możemy zapisać następująco:

$$P(\{N_{t,t+T} = k \mid N_t = n\}) = P(\{N_{t,t+T} = k\}),\quad \text{k,n – całkowite nieujemne.}$$

<u>**Inaczej:**</u> brak pamięci określa wzajemną niezależność liczby zgłoszeń, które wpływają w rozłącznych przedziałach czasu

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Jeżeli dla dowolnej skończonej liczby rozłącznych przedziałów czasu: $[t_1, t_1 + \Delta_1), \ldots, [t_r, t_r + \Delta_r)$ prawdopodobieństwo pojawienia się w tych przedziałach odpowiednio: $k_1, \ldots, k_r$ - zgłoszeń zależy tylko od długości tych przedziałów, a nie od położenia względem pozostałych przedziałów, to strumień wejściowy nazywa się ***strumieniem stacjonarnym***.
- Jeżeli strumień wejściowy jest: stacjonarny, pojedynczy oraz bez następstw, to jest tzw. ***strumieniem prostym***.

Charakterystyka mechanizmu obsługi.

Teoria masowej obsługi bada procesy, w których z jednej strony powstaje zapotrzebowanie na wykonanie pewnych prac (usług), a z drugiej powstaje konieczność zaspokojenia tych potrzeb. Związane jest to z odpowiednim mechanizmem obsługi, który ***określa sposoby postępowania ze zgłoszeniami***, ale ***od strony kanału obsługi***.

Do podstawowych charakterystyk kanału obsługi należą:

- ***Czas trwania obsługi.***
- ***Zdolność przepustowa systemu***
- ***Dostępność systemu***

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Czas trwania obsługi - to przedział czasu niezbędny dla realizacji obsługi dla pojedynczego zgłoszenia.

Przyjmuje się, że czasy trwania obsługi dla poszczególnych zgłoszeń są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach.

Jeżeli jednak występuje ***kilka rodzajów zgłoszeń***, to każdy rodzaj ma ***własny czas trwania*** obsługi. Podobnie każdy ***kanał obsługi*** (jeśli jest ich wiele) może posiadać własny czas trwania obsługi.

Typ rozkładu czasu trwania obsługi określa nazwę odpowiedniej obsługi (możemy mieć do czynienia z obsługą: ***wykładniczą, deterministyczną, Erlanga, dowolną***). Badania systemów obsługi masowej pokazują, że najczęściej rozkład czasu trwania obsługi jest ***rozkładem wykładniczym***.

Niech η_k - oznacza czas konieczny do obsługi „k-tego" zgłoszenia (k=1,2,...) Zakładając ponadto, że zmienne losowe $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, to rozkład prawdopodobieństwa dla wykładniczego czasu trwania obsługi „k – tego" zgłoszenia określa dystrybuanta: $B(t) = P(\eta_k < t) = 1 - e^{-\nu \cdot t}$.

Stąd otrzymujemy, że ***średni czas trwania obsługi*** dla jednego zgłoszenia (w przypadku rozkładu wykładniczego) wynosi: $t_{śr} = E[\eta_k] = \frac{1}{\nu}$. Odwrotność średniego czasu obsługi nazywamy ***intensywnością obsługi***: $\nu = \frac{1}{t_{śr}}$ (liczba zgłoszeń obsłużona w jednostkowym przedziale czasu).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Jeżeli system obsługi jest systemem wieloetapowym (każde zgłoszenie jest obsługiwane przez jeden kanał w ***„m”*** etapach), zaś czas trwania obsługi dla każdego etapu ma identyczny rozkład wykładniczy, to rozkład pełnego czasu trwania obsługi (po zakończeniu wszystkich etapów) jest ***rozkładem Erlanga***

postaci: $B(t) = P(\eta < t) = 1 - e^{-\nu t}\left[1 + \frac{\nu t}{1!} + \frac{(\nu t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\nu t)^m}{m!}\right]$

Zdolność przepustowa systemu – to ***maksymalna liczba zgłoszeń***, które mogą być jednocześnie obsługiwane przez system.

W zależności od liczby jednocześnie obsługiwanych zgłoszeń rozróżniamy systemy: ***jednokanałowe*** (tylko jedno zgłoszenie w tym samym czasie obsługiwane) oraz ***wielokanałowe*** (więcej niż jedno zgłoszenie może być jednocześnie obsługiwane).

W praktyce spotyka się również tzw. ***systemy wielofazowe*** (każde zgłoszenie musi przejść przez kilka kanałów obsługi i przy każdym z nich może czekać w kolejce).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Dostępność systemu – określa dostęp zgłoszeń do różnych kanałów obsługi. System jest w ***pełni dostępny***, gdy każde zgłoszenie może być obsłużone przez dowolny kanał. Jeżeli jest to niemożliwe, to system należy do grupy systemów ***niepełnodostępowych***.

Najczęściej w systemach masowej obsługi zgłoszenia są obsługiwane zgodnie z ***kolejnością*** ich napływania. Mogą jednak zdarzyć się takie systemy obsługi, w których niektóre zgłoszenia są ***uprzywilejowane*** (systemy z ***priorytetem***).

Mogą być to systemy z ***priorytetem bezwzględnym*** (przerywana jest obsługa zgłoszeń o niższym priorytecie) oraz o ***priorytecie względnym*** (zgłoszenie o wyższym priorytecie musi czekać na zakończenie rozpoczętej obsługi zgłoszenia o niższym priorytecie). Możliwe zasady obsługi zgłoszeń zawiera ***regulamin*** (dyscyplina) obsługi.

Uwaga: Do charakterystyk mechanizmu obsługi należy również ***niezawodność kanału obsługi*** (określa się ją za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla ***przedziału czasu sprawnej - niezawodnej pracy*** kanału obsługi oraz dla ***przedziału czasu trwania jego odnowy*** – naprawy w sytuacji awarii).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka regulaminu kolejek.

Regulamin kolejki – to reguła wyboru zgłoszenia, które ma zostać obsłużone, gdy tylko zakończy się obsługa poprzedniego.
Jeżeli zgłoszenia ustawiają się w kolejce w kolejności ich przybywania to taki porządek tworzenia kolejki nazywa się ***naturalnym***.
Występują też inne zasady w ***regulaminie kolejki***: wybór zgłoszenia, którego obsługa zajmuje najmniej czasu, ***losowy*** wybór zgłoszeń, ***priorytetowy*** (względny lub bezwzględny) wybór zgłoszeń oraz ***mieszany*** wybór zgłoszeń.
Regulamin kolejki obejmuje również:

- Ograniczenia liczby oczekujących zgłoszeń (***systemy z odmową*** lub ze stratą).
- Ograniczenia dotyczące czasu oczekiwania na obsługę oraz pobytu zgłoszenia w systemie (mogą być to wielkości stałe lub zmienne losowe).
- Przepisy regulujące możliwości przechodzenia z jednej kolejki do drugiej.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

3. Klasyfikacja systemów masowej obsługi.

Najczęściej systemy masowej obsługi charakteryzowane są za pomocą kodu zaproponowanego przez D. G. Kendalla (jednego z twórców teorii). Oznaczenie systemu masowej obsługi ma postać: $X \mid Y \mid n \mid N \mid f_i^j$, gdzie:

„X" – oznacza typ strumienia wejściowego,

„Y" – oznacza typ rozkładu czasu trwania obsługi,

Przyjmuje się kod X=M – oznaczający Poissonowski (Markowski) strumień zgłoszeń (wykładniczy rozkład czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami), Y=M – wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi, X=D – deterministyczne (regularne) zgłoszenia klientów do systemu, Y=D – stały czas obsługi, X=G – dowolny proces zgłoszeń klientów do systemu, Y=G – dowolny rozkład prawdopodobieństw czasu trwania obsługi, $X=E_k$ – rozkład Erlanga (z parametrami λ, k) odstępów czasu między zgłoszeniami, $Y=E_k$ - rozkład Erlanga (z parametrami ν, k) prawdopodobieństw czasu trwania obsługi.

„n" – liczba kanałów w systemie (system z nieograniczoną liczbą kanałów obsługi oznacza się $n = \infty$),

„N" – maksymalna liczba miejsc oczekiwania (systemy z odmową mają N=0, dla nieograniczonej kolejki $N = \infty$),

f_i^j - regulamin obsługi (wskaźnik „i") i regulamin kolejki (wskaźnik „j")

Znaczenie indeksów: „i=0" – ***niepriorytetowa*** obsługa (porządek naturalny FIFO lub odwrotny LIFO), „i=1" ***względny*** priorytet obsługi, „i=2" – ***bezwzględny*** priorytet obsługi, „j=0" – priorytet w kolejce ***nie obowiązuje*** (zgłoszenie, które zastaje wszystkie miejsca zajęte w kolejce odchodzi), „j=2" – ***bezwzględny*** priorytet zgłoszeń (zgłoszenie z wyższym priorytetem usuwa z kolejki jedno zgłoszenie z niższym priorytetem).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

4. Przykłady systemów masowej obsługi i ich podstawowe charakterystyki.

Bardzo ważną charakterystyką systemów masowej obsługi jest prawdopodobieństwo: $P_k(t) = P(V_t = k)$ - losowo wchodzące do systemu zgłoszenie w chwili „t" zastaje w nim „k" innych zgłoszeń (jako „k-te" ustawia się w kolejce). Rozkład tego prawdopodobieństwa zależy od czasu. W praktyce można jednak zauważyć, że dla pewnych systemów (***systemy stabilne***) wpływ czasu na charakterystyki zmniejsza się wraz z jego upływem. Jest to ważna własność ustalania się tzw. ***trybu stacjonarnego systemu***. Wariant stacjonarny interpretuje się jako graniczny wariant systemu niestacjonarnego: $\lim_{t \to \infty} P_k(t) = P_k$.

Nie dla każdego systemu ***wariant stacjonarny istnieje***. Systemy z ograniczoną liczbą miejsc oczekiwania zawsze mają wariant stacjonarny, gdy intensywności zgłoszeń (parametr λ) oraz obsługi (parametr ν) są skończone. Dla systemów z nieograniczoną liczbą miejsc oczekiwania wariant regularny istnieje tylko wtedy, gdy tzw. ***współczynnik obciążenia*** (zajętości systemu) $\frac{\lambda}{n\nu} < 1$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|1|\infty$ - jest to jednokanałowy system obsługi, z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanał obsługi posiada wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa zgodnie z kolejnością przybyć do systemu (porządek naturalny). Dla takiego systemu ***wariant regularny*** istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda<\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych). Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\frac{\lambda}{\nu}$ (dla tego systemu jest to ***obciążenie systemu***), to prawdopodobieństwo $P_k=(1-\rho)\rho^k$, k=0,1,2,...

  Prawdopodobieństwo, że w systemie w kolejce oczekuje więcej niż r_0 zgłoszeń wynosi:
  $$P(r>r_0)=P_{r_0+2}+P_{r_0+3}+\ldots=(1-\rho)\rho^{r_0+2}+(1-\rho)\rho^{r_0+3}+\ldots=$$
  $$=(1-\rho)\rho^{r_0+2}\left[1+\rho+\rho^2+\ldots\right]=\rho^{r_0+2}$$

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w systemie obsługi wynosi: $E[V]=\sum_{k=0}^{\infty}kP_k=\frac{\rho}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń w systemie obsługi wynosi:

$$D^2[V]=E[V^2]-E[V]^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P_k-\left(\sum_{k=0}^{\infty}kP_k\right)^2=\frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce wynosi: $\sum_{k=1}^{\infty}kP_{k+1}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2P_{k+1}-\left(\sum_{k=1}^{\infty}kP_{k+1}\right)^2=\frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \rho e^{-(\nu-\lambda)t_0}$$

Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce (na obsługę) oraz jego wariancja wynoszą: $E[T] = \dfrac{\rho}{\nu - \lambda}$, $D^2[T] = \dfrac{\rho(2-\rho)}{(\nu-\lambda)^2}$,

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie przebywać w systemie dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(Z > t_0) = e^{-(\nu-\lambda)t_0}$$

Średni całkowity czas przebywania zgłoszenia w systemie oraz jego wariancja wynoszą: $E[Z] = \dfrac{1}{\nu - \lambda}$, $D^2[Z] = \dfrac{1}{(\nu-\lambda)^2}$,

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M\,|\,M\,|\,n\,|\,\infty$ - jest to system obsługi składający się z „n” kanałów obsługi z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). Zgłoszenia czekają w kolejce tylko wtedy, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (***w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału***) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (***porządek naturalny***). Dla takiego systemu ***wariant regularny*** istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda<n\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych przez wszystkie kanały). Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\dfrac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo: $P_k=\dfrac{\rho^k}{k!}P_0$, dla k=0,1,2,...,n, oraz $P_k=\dfrac{\rho^k}{n!\,n^{k-n}}P_0$, dla k=n+1,n+2,..., gdzie: $P_0=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\rho^k}{k!}+\dfrac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}\right)^{-1}$.

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie obsłużone bez czekania*** (w systemie znajduje się co najwyżej n-1 zgłoszeń) wynosi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right)$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie oczekiwało w kolejce*** wynosi:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{n}{n-\rho} P_n$$

Prawdopodobieństwo, że $1 \le s_0 \le n-1$ ***kanałów obsługi jest zajętych***

wynosi: $P(S = s_0) = P_{s_0} = \frac{\rho^{s_0}}{s_0\,!} P_0$

Prawdopodobieństwo, że ***długość kolejki wynosi*** $r_0 \ge 0$ obliczamy ze wzoru:

$$P(R = r_0) = P_{n+r_0} = \frac{\rho^{n+r_0}}{n!n^{r_0}} P_0$$

Prawdopodobieństwo, że ***w kolejce oczekuje więcej*** niż $r_0 \ge 0$ zgłoszeń wynosi:

$$P(R > r_0) = P_{n+r_0+1} + P_{n+r_0+2} + \ldots = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \left[1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \frac{n}{n-\rho} = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0}(n-\rho)} P_0$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w kolejce wynosi: $\sum_{r=0}^{\infty} rP_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}P_0$

Średnia liczba zajętych kanałów (istotna informacja dla zarządzającego systemem) wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k = \rho = \frac{\lambda}{\nu}$. Zatem ***średnia liczba wolnych kanałów*** wynosi: $n-\rho = n - \frac{\lambda}{\nu} = n\left(1-\frac{\lambda}{n\nu}\right)$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \rho + P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \frac{n}{n-\rho} P_n e^{-(n-\rho)\nu \cdot t_0}$$

Średni czas oczekiwania na obsługę (w kolejce) oraz jego ***wariancja*** wynoszą: $E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$; $D^2[T] = \frac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu-\lambda} = \frac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M\,|\,M\,|\,n\,|\,N$ - jest to system obsługi składający się z „n" kanałów obsługi z odmową (ograniczona liczba „$N<\infty$" miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). W omawianym systemie może znajdować się jednocześnie najwyżej „n+N" zgłoszeń, z których „n" - będzie obsługiwanych, zaś „N" – będzie czekać w kolejce. Napływające w tym czasie zgłoszenia otrzymują ***odmowę*** i odchodzą nie obsłużone. Przyjete zgłoszenia albo od razu są obsługiwane (jeśli jest wolny kanał) lub czekają w kolejce (jeśli wszystkie kanały są zajęte). Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (***w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału***) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (***porządek naturalny***). Dla takiego systemu ***wariant regularny (system jest stabilny)*** istnieje zawsze. Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\dfrac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo:

$P_k=\dfrac{\rho^k}{k!}P_0$, dla k=0,1,2,...,n, oraz $P_k=\dfrac{\rho^k}{n!\,n^{k-n}}P_0$, dla k=n+1,n+2,...,n+N,

gdzie: $P_0=\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}+\dfrac{\rho^n}{n!}\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^k\right)^{-1}$.

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte (dostanie odmowę)***, czyli ***prawdopodobieństwo straty zgłoszenia*** wynosi:

$$P_{n+N} = \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^N P_0$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** do obsługi (procentowa przepustowość systemu – ***g***) wynosi: $g = 1 - P_{n+N}$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie będzie obsłużone bez czekania*** wynosi: $\sum_{k-0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k-0}^{n-1}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie musiało czekać w kolejce*** wynosi: $\sum_{k=0}^{N-1} P_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:
$$\sum_{k=1}^{N} kP_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$$

Średnia liczba zajętych kanałów wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=1}^{N} nP_{n+k} = \rho(1-P_{n+N})$.

Średnia ***liczba wolnych kanałów*** (z powodu braku zgłoszeń) wynosi: $n-\rho(1-P_{n+N})$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie (równa średniej liczbie zajętych kanałów obsługi plus średniej liczbie zgłoszeń czekających w kolejce) wynosi:
$$E[V] = \rho(1-P_{n+N}) + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$$

Średnia liczba zgłoszeń, które ***otrzymały odmowę*** wynosi: λP_{n+N} (w jednostce czasu). Średni ***odstęp czasu między dwoma kolejnymi zgłoszeniami***, które otrzymały odmowę wynosi: $\frac{1}{\lambda P_{n+N}}$.

Średnia ***liczba wolnych miejsc w kolejce*** jest równa: N - E[V].

Średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi (oczekiwania w kolejce) wynosi: $E[T] = \frac{n\nu P_n}{(n\nu-\lambda)^2}\left[1-(N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N + N\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|0$ - jest to szczególny przypadek systemu poprzedniego, w którym występuje ***strata zgłoszeń*** (każde zgłoszenie, które przychodzi i zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte odchodzi nie obsłużone). Dla tego systemu prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!}P_0, \text{ dla k=0,1,2,...,n, gdzie: } P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)\right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte*** (stracone) wyraża się wzorem: $P_n = \frac{\rho^n}{n!}P_0$, zaś prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** (a tym samym ***obsłużone bez czekania***) wynosi:

$$1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!}P_0.$$

Średnia ***liczba zajętych kanałów obsługi*** (tym samym średnia ***liczba zgłoszeń w systemie***) wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{n} nP_k = \rho\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)P_0 = \rho(1 - P_n).$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Przykład praktyczny:

Do stacji technicznej obsługi samochodów mającej n=4 identycznie wyposażone kanały zgłaszają się klienci. Strumień zgłoszeń jest typu Poissona z intensywnością $\lambda = 3$ zgłoszenia na godzinę. Intensywność obsługi przez każdy kanał obsługi (z wykładniczym czasem trwania obsługi) wynosi $\nu = 2$ klientów na godzinę. Zakładamy, że jest to system bez odmowy (nieograniczona ilość miejsc w kolejce).

- Sprawdzić czy system jest stabilny ? (stacjonarny):

  Warunkiem koniecznym aby system był stabilny jest by: $\lambda < n\nu$. W naszym przykładzie $\lambda = 3 < 4 \cdot 2 = 8$. Zatem system jest stabilny.

- Obliczyć: średni (w procentach) *czas przestoju wszystkich kanałów* obsługi systemu - P_0, średnią liczbę *zajętych kanałów obsługi*, prawdopodobieństwo, że *klient będzie czekał w kolejce*, średnią *liczbę klientów w kolejce* oraz średni *czas oczekiwania klienta* na rozpoczęcie obsługi.

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Procentowy (średni) czas przestoju wszystkich kanałów obsługi

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{-1} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{1.5^k}{k!} + \frac{1.5^4}{4!} \left(1 - \frac{1.5}{4}\right)^{-1} \right)^{-1} = 0,22$$

bo $\rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{3}{2} = 1.5$

Średnia liczba zajętych kanałów obsługi wynosi: $\rho = 1.5$

Prawdopodobieństwo, że klient będzie czekał w kolejce wynosi:

$$\Pi = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{1.5^4}{3!(4-1.5)} 0.22 = 0,074 \, .$$

Średnia liczba klientów w kolejce wynosi:

$$P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{(n-\rho)^2} = 0.22 \frac{1.5^5}{3!} \frac{1}{(4-1.5)^2} = 0,045$$

- kolejka praktycznie nie istnieje

Średni czas oczekiwania klienta na rozpoczęcie obsługi wynosi:

$$E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{0.074}{4 \cdot 2 - 3} = 0,015[h] \text{ (0,9 minuty).}$$

System jest wyraźnie niedociążony (obciążenie systemu: $\frac{\lambda}{n\nu} = \frac{3}{8}$).