



WIELOKRYTERIALNE ZAGADNIENIA OPTYMALIZACYJNE

□ PLAN PREZENTACJI WYKŁADU

1. Wprowadzenie do zagadnień wielokryterialnych.
2. Budowa rankingu obiektów w świetle ocen wielokryterialnych.
3. Metody wielokryterialnego programowania liniowego:
 - przykład wielokryterialnego problemu decyzyjnego,
 - zbieżność kryteriów w zagadnieniach wielokryterialnych,
 - optimum w sensie Pareto (rozwiązanie sprawne),

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE - przykład

Przykład:

Firma produkuje dwa wyroby W1 i W2. Dysponuje surowcami S1, S2, S3 w ograniczonych ilościach, odpowiednio 24 tys. jedn., 14 tys. jedn. i 12 tys. jedn. Jednostkowe zużycie poszczególnych surowców przy produkcji wyrobów podano w tabeli. Ceny wyrobów W1 i W2 wynoszą odpowiednio 3 zł i 2 zł za sztukę.

Ustalić plan produkcji, który z jednej strony maksymalizuje przychody ze sprzedaży wyrobów, a z drugiej strony maksymalizuje wielkość produkcji wyrobu W2.

Wyroby	Jednostkowe zużycie surowców		
	S1	S2	S3
W1	3	1	2
W2	3	2	1

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE - przykład

Model matematyczny

x_1 – wielkość produkcji wyrobu W1 (w tys. sztuk),

x_2 – wielkość produkcji wyrobu W2 (w tys. sztuk) ($= K_2$),

K_1 – przychód ze sprzedaży wyrobów (w tys. zł).

$$K_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow \max$$

$$(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 24,$$

$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – zbieżność kryteriów

Ze względu na **zbieżność kryteriów** rozróżniamy 3 przypadki:

- kryteria K_1 i K_2 są **zgodne**, gdy:

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \leq K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \leq K_2(\bar{x}_2);$$

- kryteria K_1 i K_2 **nie** są **zgodne**, gdy:

$$\exists \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \leq K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \geq K_2(\bar{x}_2);$$

- kryteria K_1 i K_2 są **przeciwstawne**, gdy:

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \leq K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \geq K_2(\bar{x}_2);$$

gdzie:

\bar{x}_1, \bar{x}_2 – decyzje dopuszczalne,

D – zbiór decyzji dopuszczalnych.

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – zbieżność kryteriów

$$K_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 24,$$

$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rozwiązanie optymalne: C(4,4).

$$K_1^0 = K_1(C) = 20.$$

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow \max$$

$$(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 24,$$

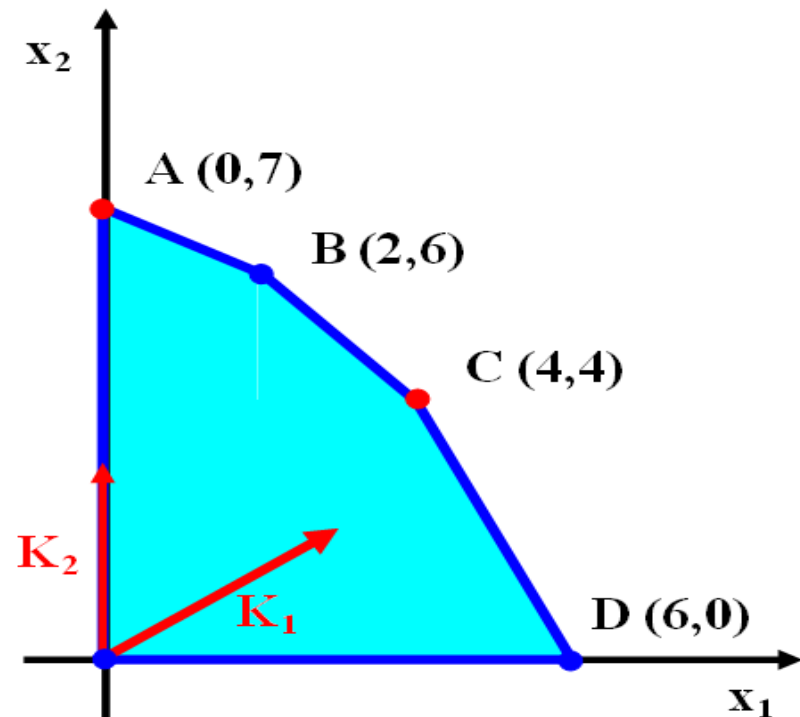
$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rozwiązanie optymalne: A(0,7).

$$K_2^0 = K_2(A) = 7.$$



W **przykładzie** kryteria K_1 i K_2 nie są zgodne gdyż:
 $K_1(A)=14 < K_1(D)=18$, zaś $K_2(A)=7 > K_2(D)=0$

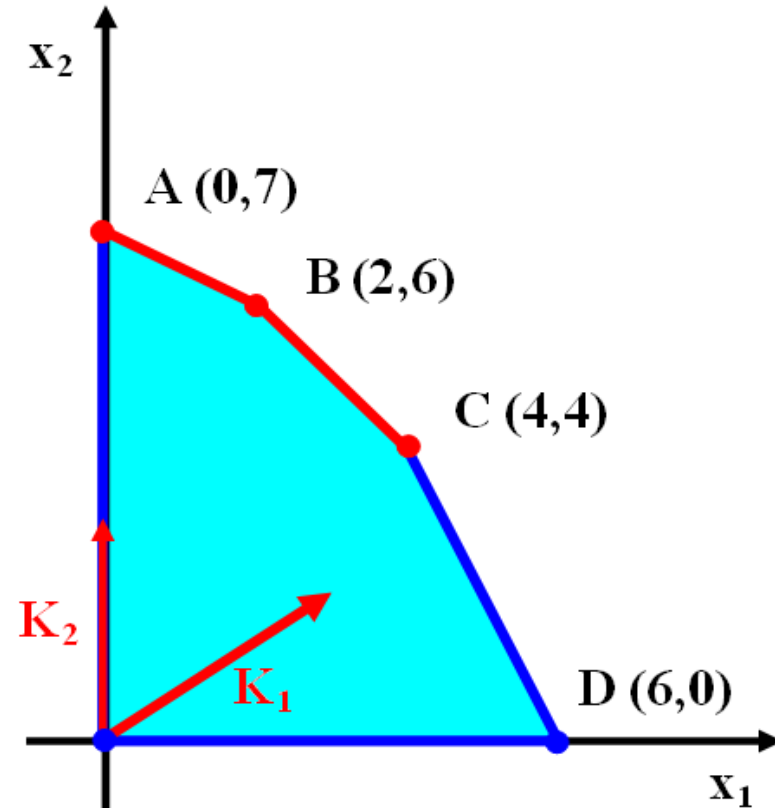
□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – optimum w sensie PARETO

Rozwiązanie: $\bar{x}^* \in D$ nazywamy **optymalnym w sensie PARETO**

(sprawnym), jeżeli w zbiorze decyzji dopuszczalnych D nie istnieje taka decyzja \bar{x} , że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$:

$$K_i(\bar{x}) \geq K_i(\bar{x}^*),$$

i co najmniej dla jednego kryterium warunek ten jest spełniony z nierównością ostrą.



□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

METAKRYTERIUM – LINIOWA KOMBINACJA WYPUKŁA KRYTERIÓW

Przy konstrukcji metakryterium w postaci liniowej kombinacji wypukłej należy:

- zapewnić wykonywalność operacji matematycznych (uwaga na jednostki!),
- wyeliminować efekty skali,
- preferencje dotyczące celów uwzględnić w postaci wag.

$$MK(\bar{x}) = \sum_i \alpha_i K_i^*(\bar{x}) \rightarrow \max$$

gdzie: α_i – wagi, $\alpha_i > 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$,

$$K_i^*(\bar{x}) = \frac{K_i(\bar{x})}{K_i^0(\bar{x})}, \quad K_i^0 = \max_{\bar{x} \in D} \{K_i(\bar{x})\}.$$

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

$$\begin{aligned} MK(x_1, x_2) &= \\ &= 0,6 * \frac{1}{20} (3x_1 + 2x_2) + 0,4 * \frac{1}{7} x_2 = \\ &= \frac{1}{700} (63x_1 + 82x_2) \rightarrow \max \end{aligned}$$

$$(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 24,$$

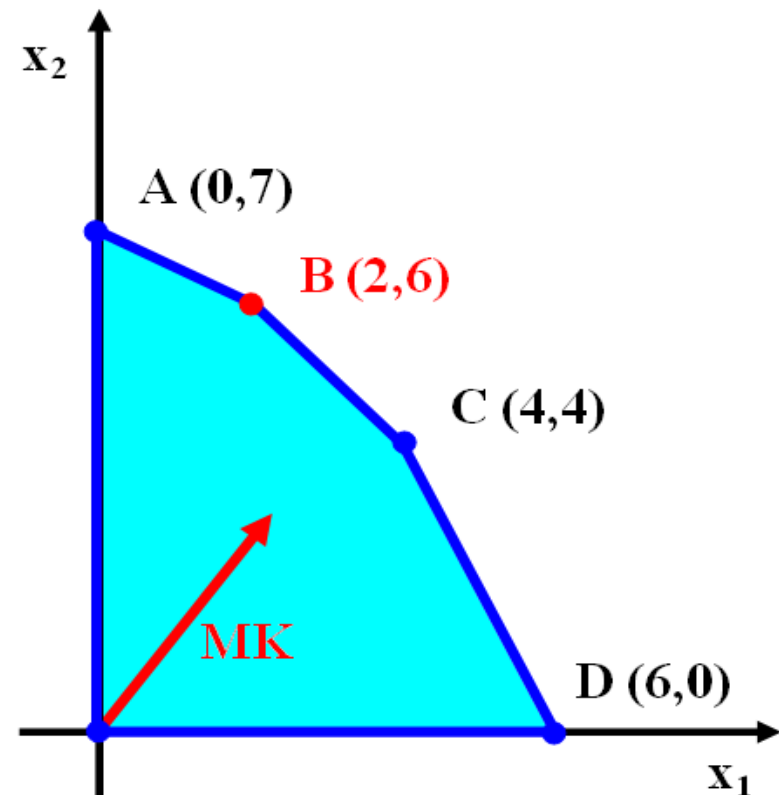
$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rozwiązanie optymalne: B(2,6).

$$MK(B) = 618/700 = 0,88.$$



□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

METAKRYTERIUM – MINIMALIZACJA ODCHYLEŃ KRYTERIÓW

Poszukuje się rozwiązania, które minimalizuje odchylenie wszystkich kryteriów od ich wartości optymalnych.

$$MK(u) = u \rightarrow \min$$

$$(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 24,$$

$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

$$(K_1) \quad 1 - \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2) \leq u,$$

$$(K_2) \quad 1 - \frac{1}{7}x_2 \leq u.$$

Rozwiązanie optymalne:

F(1,75; 6,125).

MK(F) = 0,125.

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Przykład: Organizacja kampanii reklamowej.

Organizowana jest kampania reklamowa, adresowana do ustalonej grupy docelowej. Kampania będzie prowadzona w tygodnikach A, B, C, D i E. Dysponuje się informacjami dotyczącymi:

Cechy	Tygodnik				
	A	B	C	D	E
cena 1 ogłoszenia [setki zł]	30	28	23	19	18
Prestiż (skala 1-10)	2	1	4	5	3
Jednostkowy zasięg [%]	7.5	7	5.75	4.75	4.5
Jednostkowa częstotliwość czytelnictwa	0.16	0.15	0.12	0.10	0.10

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Organizator kampanii chce, aby jej zasięg był nie mniejszy niż 70[%] (grupy docelowej), natomiast łączna częstotliwość czytelnictwa nie powinna być mniejsza niż 2. Jednocześnie chce (co dla niego jest najważniejsze), aby kampania była możliwie najtańsza i cechowała się najwyższym możliwym prestiżem.

ROZWIĄZANIE:

Zadanie jest dwukryterialnym problemem hierarchicznym.

Gdy potrafimy, ze względu na preferencje podejmującego decyzje, uporządkować liniowo wszystkie kryteria, to możemy zastosować metody hierarchizacji.

Zalóżmy, że uporządkowano cele począwszy od najważniejszego: K_1, K_2, \dots, K_n .

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Cel 1: Minimalizacja kosztu kampanii

Cel 2: Maksymalizacja efektu prestiżu

MODEL - ZMIENNE DECYZYJNE:

X_1 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku A

X_2 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku B

X_3 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku C

X_4 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku D

X_5 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku E

MODEL - FUNKCJE CELU:

$$K_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 30x_1 + 28x_2 + 23x_3 + 19x_4 + 18x_5 \rightarrow \min \text{ (1 CEL)}$$

$$K_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 \rightarrow \max \text{ (2 CEL)}$$

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

MODEL - WARUNKI OGRANICZAJĄCE

$$7,5x_1 + 7x_2 + 5,75x_3 + 4,75x_4 + 4,5x_5 \geq 70 - \text{całkowity zasięg}$$

$$0,16x_1 + 0,15x_2 + 0,12x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 \geq 2 - \text{całkowita częstotliwość}$$

MODEL - WARUNKI BRZEGOWE

$$0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 4;$$

$$0 \leq x_4 \leq 4; 0 \leq x_5 \leq 4;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - \text{całkowite}$$

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

ROZWIĄZANIE – ŚCISŁA HIERARCHIZACJA CELÓW

Z hierarchizacją ścisłą (ostrą) mamy do czynienia wtedy, gdy chcemy nade wszystko osiągnąć optymalną wartość najważniejszego kryterium K_1 , potem (w miarę możliwości) K_2, \dots , na końcu (...) K_n .

Idea algorytmu.

1. Rozwiązujemy zadanie PM z pierwszym niezbadanym kryterium.
2. Jeżeli uzyskujemy tylko jedno rozwiązanie optymalne, to jest to rozwiązanie optymalne zadania wielokryterialnego z hierarchizacją ostrą. Koniec.
3. Jeżeli są co najmniej 2 rozwiązania optymalne, to traktujemy je jako zbiór rozwiązań dopuszczalnych i wracamy do punktu 1.

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Dwa rozwiązania optymalne: (dla I poziomu hierarchii)

$$x_1^{(1)} = 3; x_2^{(1)} = 4; x_3^{(1)} = 1; x_4^{(1)} = 4; x_5^{(1)} = 4;$$

$$x_1^{(2)} = 4; x_2^{(2)} = 4; x_3^{(2)} = 3; x_4^{(2)} = 0; x_5^{(2)} = 4;$$

$$K_1(\bar{x}^{(1)}) = K_1(\bar{x}^{(2)}) = 373$$

Ponieważ wartość funkcji prestiżu $K_2(\bar{x}^{(1)}) = 46 > K_2(\bar{x}^{(2)}) = 36$,

to jako rozwiązanie zadania należy wybrać rozwiązanie (1).

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

ROZWIĄZANIE - RELAKSACJA HIERARCHIZACJI CELÓW (QUASI HIERARCHIA)

W zadaniach wielokryterialnych z relaksacją hierarchizacji celów dąży się do osiągnięcia wartości (prawie) optymalnych przez kolejne (coraz mniej ważne) kryteria. Istotne jest tu spełnienie kryterium w stopniu dostatecznie wysokim.

Algorytm rozwiązywania zadań z relaksacją hierarchizacji celów jest bardzo podobny do poprzedniego, z tym że dodawane są warunki w postaci nierówności.

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

PIERWSZY POZIOM HIERARCHII – etap obliczeń jak poprzednio.

DRUGI POZIOM HIERARCHII:

Zalóżmy, że podejmujący decyzje postanowił zwiększyć kwotę na reklamę z poziomu minimalnego (373 – I poziom hierarchii) o 10[%], czyli maksymalnym akceptowalnym poziomem kosztów będzie wartość 410.

Otrzymujemy zadanie:

$$K_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$7,5x_1 + 7x_2 + 5,75x_3 + 4,75x_4 + 4,5x_5 \geq 70 - \text{całkowity zasięg}$$

$$0,16x_1 + 0,15x_2 + 0,12x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 \geq 2 - \text{całkowita częstotliwość}$$

$$0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 4; 0 \leq x_4 \leq 4; 0 \leq x_5 \leq 4; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - \text{całkowite}$$

$$K_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 30x_1 + 28x_2 + 23x_3 + 19x_4 + 18x_5 \leq 410 - \text{koszt nieprzekraczający 410 [zł]}$$

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

PRZYKŁAD – PROGRAMOWANIE CELOWE

Firma rozpatruje możliwość wprowadzenia do produkcji 3 nowych wyrobów, które mają zastąpić obecnie wytwarzane modele.

Właściciel firmy uważa, że planując strategię długookresową należy uwzględnić:

- **zysk długookresowy,**
- **stabilność zatrudnienia,**
- **poziom nakładów inwestycyjnych.**

Dlatego zostały sformułowane 3 cele:

CEL 1: osiągnięcie zysku długookresowego równego przynajmniej 100 [mln zł]

CEL 2: utrzymanie zatrudnienia na poziomie 3000 osób

CEL 3: utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie wyższym niż 40 [mln zł]

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

Ponieważ osiągnięcie wszystkich 3 celów jednocześnie prawdopodobnie nie będzie możliwe, zarząd określił wartości poszczególnych współczynników kar (związanych z nieosiągnięciem poszczególnych celów).

Potrzebne informacje podaje tabela:

Cel	Zysk (produkty)			Założony poziom osiągnięcia celu	Współczynniki kary (niekorzystne dla firmy odchylenia)
	P ₁	P ₂	P ₃		
Zysk długookresowy	10	8	13	≥ 100 [mln zł]	6 (-)
Poziom zatrudnienia	4	2	3	$= 30$ [setki osób]	2 (+), 5 (-)
Nakłady inwestycyjne	5	7	8	≤ 40 [mln zł]	4 (+)

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL - ZMIENNE DECYZYJNE:

X_1 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_1

X_2 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_2

X_3 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_3

MODEL - ZMIENNE BILANSUJĄCE CELE:

Y_1^+ - wielkość o jaką osiągnięty zysk przekracza wartość 100 mln zł (**cel 1**)

Y_1^- - wielkość o jaką osiągnięty zysk jest mniejszy od 100 mln zł

Y_2^+ - wielkość o jaką zatrudnienie przekracza 30 setek osób (**cel 2**)

Y_2^- - wielkość o jaką zatrudnienie jest mniejsze od 30 setek osób

Y_3^+ - wielkość o jaką nakłady inwestycyjne przekraczają 40 mln zł (**cel 3**)

Y_3^- - wielkość o jaką zatrudnienie jest mniejsze od 30 setek osób

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – FUNKCJA CELU I WARUNKI OGRANICZAJĄCE:

(Minimalizacja sumy niekorzystnych odchyleń od ustalonych poziomów osiągnięcia celów)

$$6y_1^- + 2y_2^+ + 5y_2^- + 4y_3^- \rightarrow \min$$

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100 - \text{(CEL 1)}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30 - \text{(CEL 2)}$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40 - \text{(CEL 3)}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

ROZWIĄZANIE W PRZYPADKU HIERARCHIZACJI CELÓW

I POZIOM HIERARCHII:

CEL (2A):

nieprzekroczenie aktualnego poziomu zatrudnienia (3000 osób)

CEL 3:

utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie większym niż 40 mln zł

II POZIOM HIERARCHII:

CEL (1):

osiągnięcie zysku długookresowego na poziomie 100 mln zł.

CEL (2B):

nieobniżenie dotychczasowego poziomu zatrudnienia

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – ZADANIE PIERWSZEGO POZIOMU HIERARCHII:

$$2y_2^+ + 4y_3^+ \rightarrow \min \text{ (funkcja celu)}$$

Warunki ograniczające:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

□ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – ZADANIE DRUGIEGO POZIOMU HIERARCHII:

$$6y_1^- + 4y_2^- \rightarrow \min \text{ (funkcja celu)}$$

Warunki ograniczające:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

Dodajemy warunek:

$$2y_2^+ + 4y_3^+ = 0$$

warunki brzegowe:

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$