

# **Optymalizacja Dyskretna**

## **- metoda podziału i ograniczeń**

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dla dyskretnych zadań decyzyjnych uniwersalną metodą ich rozwiązywania jest metoda *podziału i ograniczeń*. Nie jest to ściśle ustalony algorytm postępowania jak np. algorytm „simpleks”, lecz raczej pewne podejście do rozwiązywania określonej klasy (*dyskretnych*) zadań optymalizacyjnych. Podejście to zostanie zaprezentowane na następującym przykładzie:

## Przykład:

Rozwiązać następujące zadanie programowania całkowitoliczbowego – liniowego (PCL):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \geq 11 \\ 5x_1 + 11x_2 \leq 55 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{całkowite} \end{cases} \end{aligned}$$

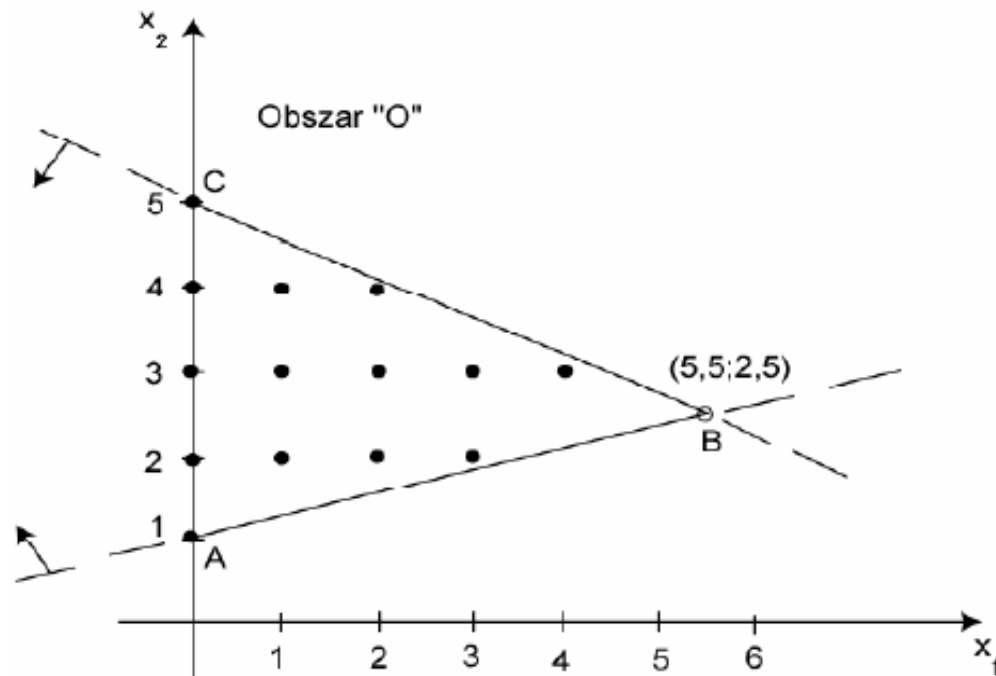
Jeżeli pominiemy warunek całkowitoliczbowości, to zadanie to jest zadaniem programowania liniowego (PL), które można rozwiązać (geometrycznie, algorytmem „simpleks”).

Jeżeli zadanie (PL) nie ma rozwiązania optymalnego, to nie posiada go także zadanie PCL.

Jeżeli otrzymane rozwiązanie optymalne dla (PL) spełnia ponadto warunek całkowitoliczbowości, to jest to oczywiście poszukiwane rozwiązanie zadania PCL, jeśli nie, to stosuje się wtedy metodę *podziału i ograniczeń*.

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Ponieważ nasze zadanie posiada tylko dwie zmienne decyzyjne, to spróbujemy go rozwiązać metodą geometryczną.



$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2$$

warstwica:  $x_2 = -2x_1$

$$f(A) = 2, \quad f(C) = 10$$
$$\max = f(B) = 27$$

Ponieważ nasze rozwiązanie maksymalne nie jest całkowitoliczbowe, to należy zastosować metodę podziału i ograniczeń.

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Zdefiniujemy tzw. funkcję ograniczającą z góry „ozn.  $w$ ” (*kres górny*) określoną na rodzinie  $2^O$  wszystkich podzbiorów obszaru „ $O$ ”, która spełnia warunki:

(1)  $x \in O_1 \subset O \Rightarrow f(x) \leq w(O_1)$  - kres górny zbioru nie może być mniejszy od maksymalnej wartości funkcji celu dla rozwiązań z tego zbioru.

(2)  $O_2 \subset O_1 \subset O \Rightarrow w(O_2) \leq w(O_1)$  - kres górny zbioru zawierającego jakiś swój podzbiór nie może być mniejszy od kresu górnego tego jego podzbioru.

(3)  $O_1 = \{x\} \subset D \Rightarrow w(O_1) = f(x)$  - jeżeli zbiór jest jednoelementowy, to jego kres górny jest równy wartości funkcji celu dla tego elementu.

Uwaga: W definicji kresu dolnego nierówności w warunkach (1) i (2) zmieniają się na przeciwne.

## Przykład:

Kresem górnym może być funkcja:

$$w(O) = 15, \quad O_1 \subset O = \{x^1, x^2\}, \quad f(x^1) = 8, \quad f(x^2) = 9, \quad w(O_1) = 10, \\ O_2 \subset O = \{x^3\}, \quad f(x^3) = 14, \quad w(O_2) = 14.$$

Nie może być to natomiast funkcja zdefiniowana następująco:

$$w(O) = 15, \quad O_1 \subset O = \{x^1, x^2\}, \quad f(x^1) = 8, \quad f(x^2) = 9, \quad w(O_1) = 20, \\ O_2 \subset O = \{x^3\}, \quad f(x^3) = 14, \quad w(O_2) = 16$$

(nie są spełnione warunki (2) i (3))

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Dokonujemy podziału zbioru (obszaru) „O” na coraz mniejsze podzbiory. W wyniku „r” podziałów zbioru „O” uzyskujemy „2r” jego podzbiorów. Podziałów kolejnych podzbiorów dokonujemy dla tzw. *podzbiorów perspektywicznych*.

Podzbiorem perspektywicznym  $O_p$  w „r - tym” kroku obliczeń (dla zadań na maksimum) jest taki zbiór, dla którego  $w(O_p) = \max\{w(D_l) : D_l \in G^r\}$ , gdzie

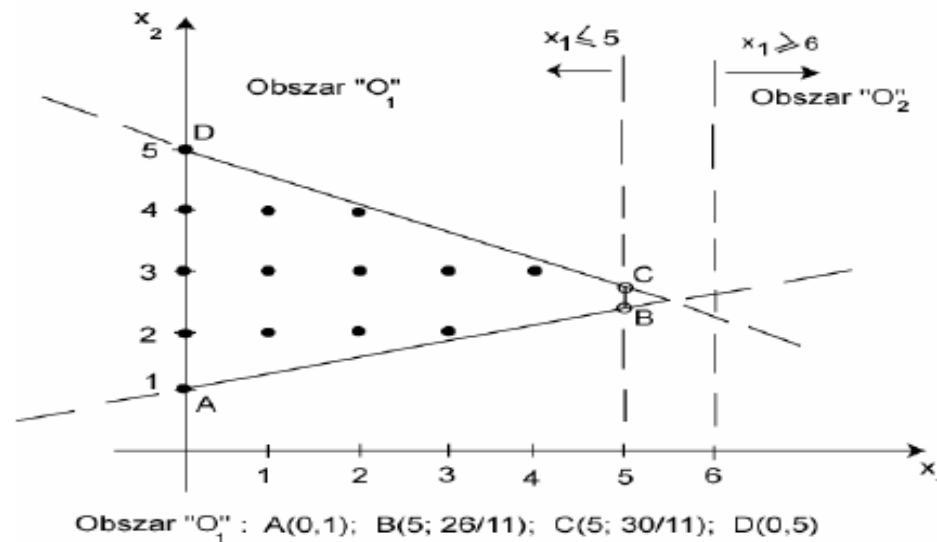
$G^r$  - rodzina podzbiorów *aktywnych* (które nie zostały jeszcze podzielone). Dla zadań na minimum w warunku tym pojawia się (minimum oraz kres dolny).

Podstawę podziału zbiorów aktywnych – perspektywicznych stanowi pierwsza zmienna w rozwiązaniu optymalnym (dla zbioru perspektywicznego) -  $x^p$ , która nie spełnia warunku całkowitoliczbowości. Jeżeli będzie to zmienna  $x_k^p$  - wtedy dzielimy go na dwa podzbiory:

$$(4) \\ O_{2r+1} = \{x : x \in O_p \wedge x_k \leq N(x_k^p)\}, O_{2r+2} = \{x : x \in O_p \wedge x_k \geq N(x_k^p) + 1\}$$

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

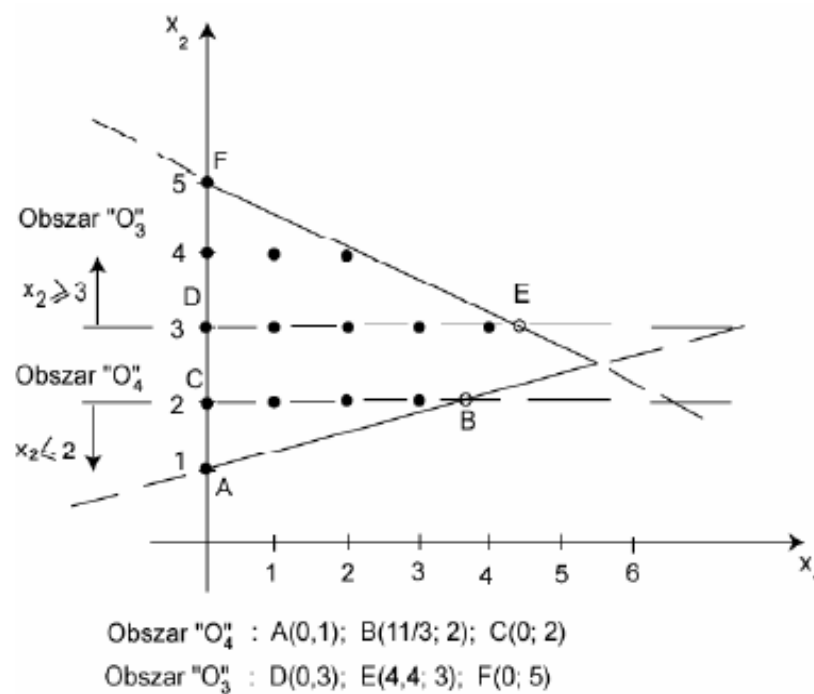
Dla naszego przykładu początkowym zbiorem aktywnym perspektywnym jest zbiór „O”. Kres górny tego zbioru wynosi:  $w(O) = f(B) = 27$ . Obie zmienne decyzyjne w stowarzyszonym rozwiązaniu optymalnym (PL) nie są całkowite, więc dokonujemy podziału „O” na dwa podzbiory:  $O_1, O_2$  względem zmiennej  $x_1$  zgodnie ze wzorem (4).



Obszar  $O_2$  - jest zbiorem pustym dlatego **zamykamy go** przypisując mu symboliczny kres górny:  $w(O_2) = -\infty$ . Obszar  $O_1$  jest zatem obszarem perspektywnym – aktywnym. Optymalna wartość funkcji celu dla stowarzyszonego zadania PL jest spełniona dla punktu „C” tego obszaru i wynosi:  $280/11=25,45$ . Jako kres górny możemy przyjąć:  $w(O_1) = 26$ .

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Ponieważ druga współrzędna optymalnego rozwiązania (PL) nie jest całkowita, więc zgodnie z (4) dzielimy  $O_1$  na dwa podzbiory aktywne:  $O_3, O_4$  względem zmiennej  $x_2$ .



Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze  $O_3$  jest spełniona dla punktu „E” tego obszaru oraz wynosi: 23,6.

Jako kres górny możemy przyjąć:  $w(O_3) = 24$ .

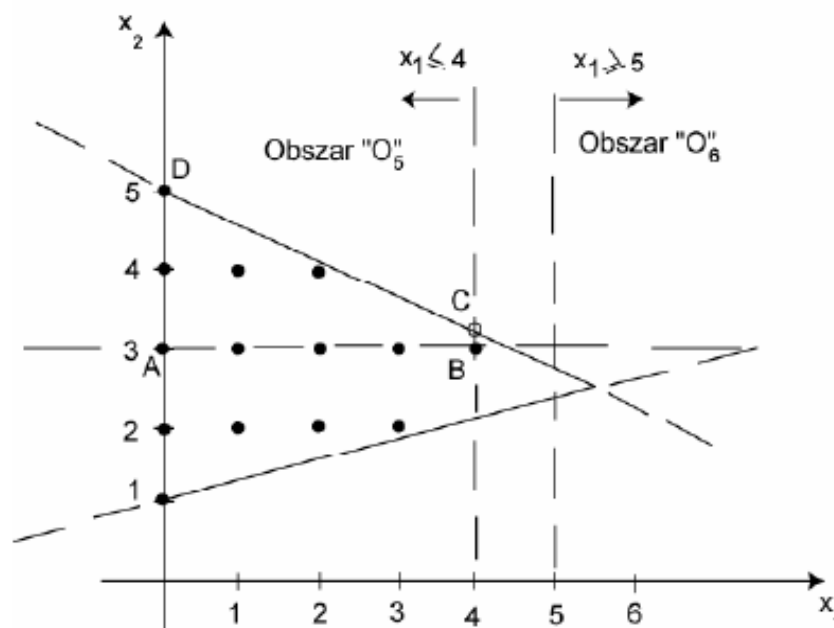
Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze  $O_4$  jest spełniona dla punktu „B” tego obszaru oraz wynosi:

56/3=18,67.

Za kres górny możemy przyjąć:  $w(O_4) = 19$ .

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Podzbiorem perspektywicznym jest zatem zbiór  $O_3$ . Ponieważ pierwsza współrzędna optymalnego rozwiązania (PL) nie jest całkowita, więc zgodnie z (4) dzielimy  $O_3$  na dwa podzbiory aktywne:  $O_5, O_6$  względem zmiennej  $x_1$ .



Obszar " $O_5$ " :  $A(0, 3)$ ;  $B(4, 3)$ ;  $C(4, 35/11)$ ;  $D(0, 5)$

Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze  $O_5$  jest spełniona dla punktu „C” tego obszaru oraz wynosi:  $246/11=22,36$ .

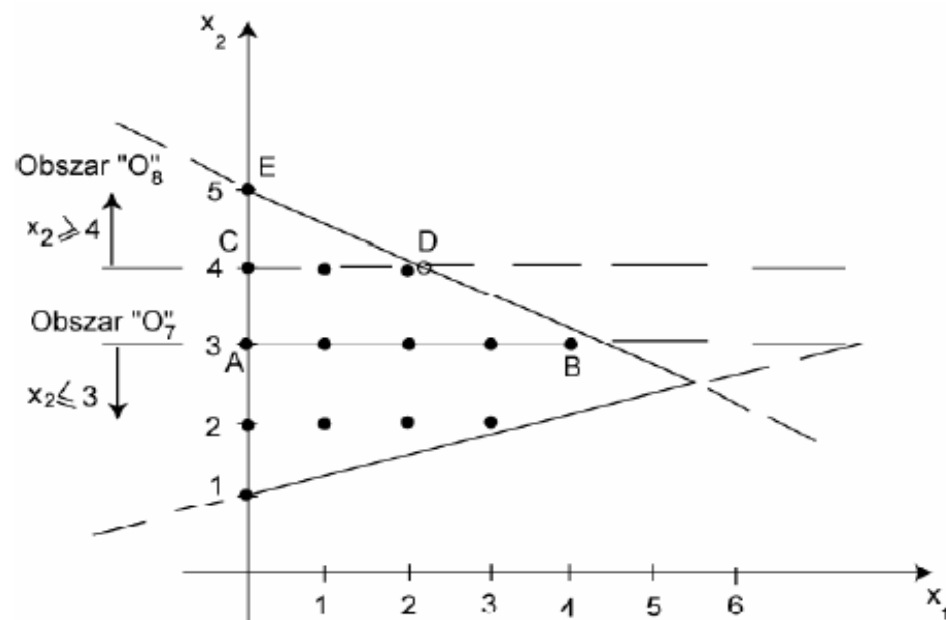
Jako kres górny możemy przyjąć:  $w(O_5) = 23$ .

Obszar  $O_6$  jest zbiorem pustym zatem zamykamy go przyjmując kres górny  $w(O_6) = -\infty$ .



# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Zbiór  $O_5$  jest perspektywiczny, więc znowu go dzielimy na dwa podzbiory  $O_7, O_8$  względem zmiennej posiadającej niecałkowite rozwiązanie optymalne dla zadania stowarzyszonego (PL) w tym obszarze. Będzie to zmienna -  $x_2$ .



Obszar " $O_7$ " : A(0,3); B(4,3)

Obszar " $O_8$ " : C(0,4); D(2,2; 4); E(0,5)

Opt. wart. funkcji celu dla zadania PL w obszarze  $O_7$  jest spełniona dla punktu „B” tego obszaru oraz wynosi: 22.

Ponieważ optymalne rozwiązanie PL dla obszaru  $O_7$  jest całkowitoliczbowe, to:

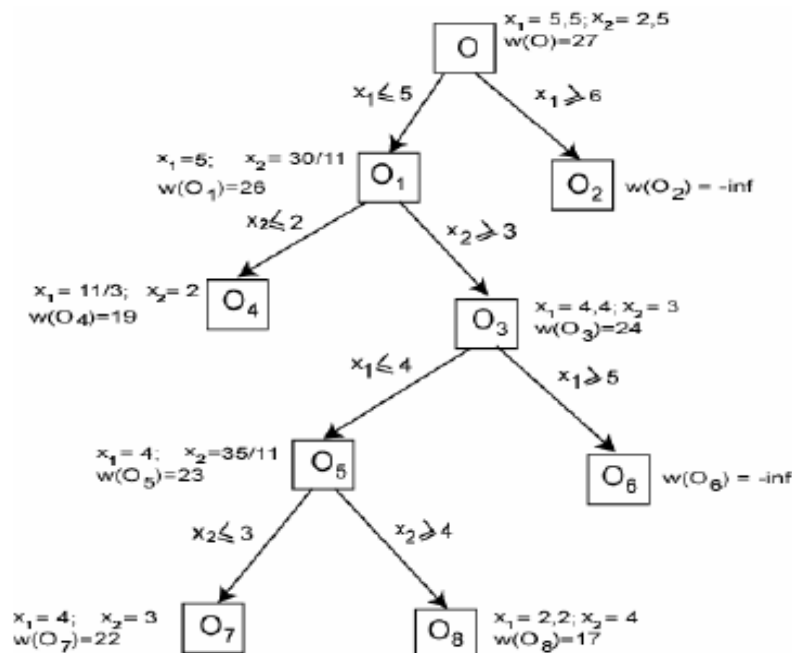
jest to również rozwiązanie optymalne wyjściowego zadania **PCL**.

# □ Liniowe Modele Optymalizacji Dyskretnej – metoda podziału i ograniczeń

Podział zbioru „ $O$ ” na coraz mniejsze podzbiory można przedstawić w postaci tzw. „*drzewa podziału*”. Z każdym jego wierzchołkiem (o numerze „ $k$  - tym”) jest związany:

- podzbiór  $O_k$
- zadanie programowania liniowego  $PL^k$  (dla tego podzbioru)
- jego rozwiązanie optymalne:  $x_k^*$
- kres górny (dolny) tego zbioru  $w(O_k)$

*Dla naszego zadania drzewo jest postaci:*





**ELEMENTY**

**TEORII GIER**

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## ELEMENTY TEORII GIER

**TEORIA GIER** jest to matematyczna teoria rozwiązywania sytuacji konfliktowych bądź współpracy, w których wynik uzyskany przez jedną osobę (gracza, uczestnika gry) zależy także od decyzji podejmowanych przez innych uczestników gry. Teoria gier nie bada przyczyn ani genezy konfliktów – interesują ją tylko optymalne ich rozwiązania.

Jak sama nazwa wskazuje, teoria gier wzięła swój początek z analizy rozgrywek gier karcianych, szachów itp. Obecnie jej zastosowanie jest o wiele szersze i obejmuje wiele dziedzin, w tym nauki o zarządzaniu.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## Podstawowe definicje i założenia

Pod nazwą **GRY** rozumieć będziemy pewien sformalizowany model sytuacji konfliktowej.

Słowo **GRACZ** oznacza pojedynczą osobę lub grupę osób tworzących koalicję (działających wspólnie, we wspólnym interesie).

Aby daną sytuację rozpatrywać z punktu widzenia teorii gier należy przyjąć pewne założenia odnośnie gry i stron konfliktu:

- istnieje co najmniej dwóch graczy,
- każdy z graczy posiada przynajmniej dwie **strategie** czyli drogi postępowania,
- w wyniku każdej gry każdy z graczy otrzymuje pewną wygraną (zwaną też **wypłatą**), której wysokość zależy od strategii zastosowanych przez wszystkich graczy. Wygraną (wypłatę) wyraża się dla wygody w liczbach.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## TYPY GIER

Gry można dzielić według wielu kryteriów, np. ze względu na:

- ilości graczy: gry **dwuosobowe** i **wielosobowe** (w przypadku niektórych gier wielosobowych może dochodzić do zawiązywania koalicji),
- kooperację między graczami: gry **kooperatywne** (w których gracze mogą porozumiewać się między sobą i zawierać koalicje) i **niekooperatywne** (w których jest to zabronione lub niemożliwe),
- charakter gry: gry **o sumie zerowej** (w których jeden z graczy otrzymuje dokładnie tyle ile drugi musi oddać) i gry **o sumie niezerowej** (możliwe jest np. że wszyscy gracze zyskują w wyniku rozgrywki),
- dostępną informację: gry **z pełną informacją** (gracz zna wszystkie strategie i cel swojego przeciwnika) i gry **z informacją niekompletną** (gracz nie wie jaki cel przyświeca przeciwnikowi),
- gry **strategiczne** i gry **ekstensywne**.

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W grach strategicznych gracze znają nawzajem swoje strategie, czyli wiedzą, jak mogą zachować się inni gracze. Wyboru strategii dokonują jednak jednocześnie, a dokładniej czynią to nie wiedząc, którą ze swoich strategii wybrali przeciwnicy. Co więcej, ustalają oni w ten sposób swój plan postępowania raz na zawsze i nie mogą go zmienić w trakcie rozgrywki. Prostym przykładem takiej gry jest dziecięca zabawa w "kamień-nożyce-papier".

W grach ekstensywnych istnieje pewna kolejność posunięć – gracze wykonują swoje ruchy (tj. dokonują wyboru strategii) na podstawie ruchów przeciwnika. Innymi słowy mamy tu do czynienia z ciągłym dopasowywaniem się graczy do zaistniałej sytuacji. Za przykład mogą posłużyć tu szachy.

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

## GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO

Z grami o sumie zerowej mamy do czynienia wszędzie tam, gdzie interesy graczy są dokładnie przeciwstawne, czyli tam, gdzie wygrana (zysk) jednego gracza jest równy przegranej (stracie) drugiego. Gry te służą więc do modelowania sytuacji czystego konfliktu, w których nie ma mowy o współpracy między graczami, ze względu na wyraźną sprzeczność ich interesów.

### Przykład

Dwie firmy (A i B) produkują pewien wyrób i konkurują ze sobą o rynek zbytu. Aby zwiększyć swą konkurencyjność, firmy podjęły pewne działania marketingowe. Obie firmy rozważają 3 możliwości (strategie):  $A_1$  ( $B_1$ ) – zastosować lepsze opakowanie produktu,  $A_2$  ( $B_2$ ) – zwiększyć nakłady na reklamę,  $A_3$  ( $B_3$ ) – nieznacznie obniżyć cenę. Oszacowane efekty tych działań w postaci procentowego zwiększenia udziału w rynku sprzedaży produktu dla firmy A umieszczone są w tabeli.



## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Wybrać optymalną strategię dla każdej z firm zakładając, że każda z nich podejmując decyzję nie zna wyboru konkurenta.

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	4	6	2
$A_2$	2	8	0
$A_3$	6	-4	-2

Gry dwuosobowe najłatwiej jest przedstawić w postaci **macierzy wypłat**. Tak przedstawioną grę nazywamy **grą w postaci normalnej**. Macierz wypłat zawiera wartości wypłat dla wszystkich możliwych kombinacji strategii obu graczy. W przypadku gier o sumie zerowej stosuje się zapis uproszczony – wystarczy macierz wypłat gracza A o elementach  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ;  $j=1,2,\dots,m$ ;  $n$  – liczba strategii gracza A,  $m$  – liczba strategii gracza B).

# □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Poszukiwanie rozwiązania gry najlepiej przeprowadzić w 3 krokach:

1. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.
2. Usunięcie strategii zdominowanych.
3. Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.

**Strategie czyste:**

- gracza A:  $A_1, A_2, A_3$ ,
- gracza B:  $B_1, B_2, B_3$ .

**Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii czystych.**

Ogólny sposób poszukiwania rozwiązania w zbiorze strategii czystych (punktu siodłowego) jest następujący:

- wypisać minima z każdego wiersza i wybrać największe z nich:

$$v_A = \max_i \{ \min_j \{ a_{ij} \} \} \quad (\text{wartość dolna gry})$$

## □ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

- wypisać maksima z każdej kolumny i wybrać najmniejsze z nich:

$$v_B = \min_j \{ \max_i \{ a_{ij} \} \} \quad (\text{wartość górna gry})$$

Jeżeli obie liczby są równe ( $v_A = v_B$ ), to gra posiada rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (punkt siodłowy). Gracze powinni stosować te strategie, które odpowiadają wyznaczonemu wierszowi i kolumnie. Jeżeli wybiorą inne strategie, narażą się na niepotrzebne straty.

W przykładzie istnieje punkt siodłowy (rozwiązanie w zbiorze strategii czystych). Gracz A powinien stosować strategię  $A_1$ , gracz B –  $B_3$ . Wartość gry wyniesie wtedy:  $v = v_A = v_B = 2$ .

$a_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$\min a_{ij}$
$A_1$	4	6	2	2
$A_2$	2	8	0	0
$A_3$	6	-4	-2	-4
$\max a_{ij}$	6	8	2	