

Przykładowe zadania na ćwiczenia

Zagadnienia transportowe (algorytm transportowy)

Przykład 1. Cztery piekarnie należące do pewnej firmy zaopatrują się w mąkę w trzech młynach. Podaż mąki w młynie M1 wynosi 100 ton, w młynie M2 – 200 ton, w młynie M3 – 100 ton. Zapotrzebowanie piekarń na mąkę kształtuje się następująco: piekarnia I – 120 ton, piekarnia II – 70 ton, piekarnia III – 80 ton, piekarnia IV – 130 ton. Jednostkowe koszty transportu (w zł na tonę) podano w tabeli.

Młyny	Piekarnie			
	I	II	III	IV
M ₁	7	15	16	6
M ₂	12	11	8	4
M ₃	5	13	9	10

- a) Ustal optymalny plan dostaw mąki, minimalizujący koszt transportu
- b) Podaj minimalny koszt transportu,

Popyt piekarni trzeciej spadł o 30 jednostek. Jaki ma to wpływ na wartość kosztu transportu? Jaki byłby wpływ, gdyby ten spadek popytu dotyczył piekarni pierwszej?

Model matematyczny:

- Dane: podaż – możliwe wielkości dostaw dla młynów (dostawcy): $a_1 = 100, a_2 = 200, a_3 = 100$
- Dane: popyt piekarń - zapotrzebowanie (odbiorcy): $b_1 = 120, b_2 = 70, b_3 = 80, b_4 = 130$.
- Zadanie jest zbilansowane (zamknięte zagadnienie transportowe), gdyż globalna podaż i popyt się równoważą - $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = 100 + 200 + 100 = 120 + 70 + 80 + 130 = 400$.
- Zmienne decyzyjne: $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, x_{ij} \geq 0$ – wielkość dostaw z i-tego młyna ($i=1, \dots, m=3$) do j-tej piekarni ($j=1, \dots, n=4$).
- Funkcja celu: $F(X = X_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} * X_{ij} =$

$$7 * x_{11} + 15 * x_{12} + 16 * x_{13} + 6 * x_{14} +$$

$$12 * x_{21} + 11 * x_{22} + 8 * x_{23} + 4 * x_{24} +$$

$$5 * x_{31} + 13 * x_{32} + 9 * x_{33} + 10 * x_{34} \rightarrow \min$$

gdzie: $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 6 \\ 12 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ - macierz kosztów jednostkowych dostaw

- Warunki ograniczające:

Warunki podażowe: $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \end{cases}$ – suma dostaw mąki z młynów $i=1,2,3$ do wszystkich 4 piekarń jest równa podaży mąki we młynach.

Warunki popytowe: $\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130 \end{cases}$ – suma dostaw mąki ze wszystkich młynów $i=1,2,3$ do każdej z piekarń $j=1,2,3,4$ jest równa zapotrzebowaniu na mąkę w tych piekarniach.

Warunki brzegowe $x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3; j = 1,2,3,4$.

Rozwiązanie (wykorzystanie algorytmu transportowego): - zob. materiały wykład

- **I etap** – znalezienie początkowego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Mającego $m+n-1$ zmiennych bazowych ($3+4-1=6$)

Metoda najmniejszego elementu macierzy kosztów (zob. materiały wykład)

Oznaczmy $I = \{1,2,3\}$ (aktualnie) – zbiór indeksów dostawców (młyny), których zasoby w danym kroku iteracyjnym wyboru zmiennych nie zostały jeszcze w pełni rozdysponowane.

Oznaczmy $J = \{1,2,3,4\}$ (aktualnie) – zbiór indeksów odbiorców (piekarnie), których zasoby w danym kroku iteracyjnym wyboru zmiennych nie zostały jeszcze w pełni rozdysponowane.

Jako kolejne zmienne bazowe $x_{r,k}^{(p)}$ - w kolejnych krokach iteracyjnych (iteracji p) wybieramy zmienne o takich numerach, które minimalizują koszty jednostkowe: $c_{r,k}^{(p)} = \min\{c_{ij}: (i,j) \in I \times J\}$, a więc dla których w macierzy kosztów jednostkowych jest najmniejszy element z jeszcze dostępnych w iteracji (p).

Wygodnie proces wyboru zmiennych jest przedstawić w postaci tablicy przewozów:

$a_i^{(p)}$ – oznacza zmodyfikowany wektor podaży dla i-tego dostawcy w iteracji „p”

$b_j^{(p)}$ – oznacza zmodyfikowany wektor popytu dla j-tego odbiorcy w iteracji „p”

Tablica przewozów:

i/j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$	$a_i^{(6)}$
1	$x_{1,1}^{(3)}$ = 20	$x_{1,1}^{(5)}$ = 70	$x_{1,3}^{(6)}$ = 10		100	100	100	80	80	10	0
2			$x_{2,3}^{(4)}$ = 70	$x_{2,4}^{(1)}$ = 130	200	70	70	70	0	0	0
3	$x_{3,1}^{(2)}$ = 100				100	100	0	0	0	0	0
$b_j^{(0)}$	120	70	80	130	$\sum a_i =$ $\sum b_j = 400$						
$b_j^{(1)}$	120	70	80	0							
$b_j^{(2)}$	20	70	80	0							
$b_j^{(3)}$	0	70	80	0							
$b_j^{(4)}$	0	70	10	0							
$b_j^{(5)}$	0	0	10	0							
$b_j^{(6)}$	0	0	0	0							

(p=1 – iteracja 1):

Aktualna pełna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 6 \\ 12 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(1)} = \min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}\} = c_{2,4} = 4$, zatem jako (1) zmienną bazową wybieramy $x_{2,4}^{(1)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego (zob. materiały wykład): $x_{2,4}^{(1)} = \min\{a_2^{(0)}, b_4^{(0)}\} = \min\{200, 130\} = 130$.

Dokonyjemy korekty wektorów podaży dla $r=2$ (drugiego) dostawcy: $a_2^{(1)} = a_2^{(0)} - x_{2,4}^{(1)} = 200 - 130 = 70$, oraz podobnie dla $k=4$ (czwartego) odbiorcy: $b_4^{(1)} = b_4^{(0)} - x_{2,4}^{(1)} = 130 - 130 = 0$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (w tym wypadku początkowej – zerowej). Zatem: $a_i^{(1)} = \{100,70,100\}$, zaś $b_j^{(1)} = \{120,70,80,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów odbiorców odbiorcę ($j=4$), bo wyzerowało się jego zapotrzebowanie $J = \{1,2,3\}$. Koniec iteracji ($p=1$)

(p=2 – iteracja 2):

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 \\ 12 & 11 & 8 \\ 5 & 13 & 9 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(2)} = \min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}\} = c_{3,1} = 5$, zatem jako (2) zmienną bazową wybieramy $x_{3,1}^{(2)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{3,1}^{(2)} = \min\{a_3^{(1)}, b_1^{(1)}\} = \min\{100,120\} = 100$.

Dokonyjemy korekty wektorów podaży dla $r=3$ (trzeciego) dostawcy: $a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - x_{3,1}^{(2)} = 100 - 100 = 0$, oraz podobnie dla $k=1$ (pierwszego) odbiorcy: $b_1^{(2)} = b_1^{(1)} - x_{3,1}^{(2)} = 120 - 100 = 20$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (pierwszej). Zatem: $a_i^{(2)} = \{100,70,0\}$, zaś $b_j^{(2)} = \{20,70,80,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów dostawców ($i=3$) trzeci młyn, bo wyzerowała się jego podaż $I = \{1,2\}$. Koniec iteracji ($p=2$)

(p=3 – iteracja 3):

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 \\ 12 & 11 & 8 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(3)} = \min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}\} = c_{1,1} = 7$, zatem jako (3) zmienną bazową wybieramy $x_{1,1}^{(3)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{1,1}^{(3)} = \min\{a_1^{(2)}, b_1^{(2)}\} = \min\{100,20\} = 20$.

Dokonyjemy korekty wektorów podaży dla $r=1$ (pierwszego) dostawcy: $a_1^{(3)} = a_1^{(2)} - x_{1,1}^{(3)} = 100 - 20 = 80$, oraz podobnie dla $k=1$ (pierwszego) odbiorcy: $b_1^{(3)} = b_1^{(2)} - x_{1,1}^{(3)} = 20 - 20 = 0$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (drugiej). Zatem: $a_i^{(3)} = \{80,70,0\}$, zaś $b_j^{(3)} = \{0,70,80,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów odbiorców ($j=1$) pierwszą piekarnię, bo wyzerował się jego popyt $J = \{2,3\}$. Koniec iteracji ($p=3$).

(p=4 – iteracja 4):

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(4)} = \min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2\} \times \{2,3\}\} = c_{2,3} = 8$, zatem jako (4) zmienną bazową wybieramy $x_{2,3}^{(4)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{2,3}^{(4)} = \min\{a_2^{(3)}, b_3^{(3)}\} = \min\{70,80\} = 70$.

Dokonyjemy korekty wektorów podaży dla $r=2$ (drugiego) dostawcy: $a_2^{(4)} = a_2^{(3)} - x_{2,3}^{(4)} = 70 - 70 = 0$, oraz podobnie dla $k=3$ (trzeciego) odbiorcy: $b_3^{(4)} = b_3^{(3)} - x_{2,3}^{(4)} = 80 - 70 = 10$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (trzeciej). Zatem: $a_i^{(4)} = \{80,0,0\}$, zaś $b_j^{(4)} = \{0,70,10,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów nadawców ($i=2$) drugi młyn, bo wyzerowała się jego podaż $I = \{1\}$. Koniec iteracji ($p=4$).

($p=5$ – iteracja 5):

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = [15 \ 16]$, $c_{r,k}^{(5)} = \min\{c_{ij} : (i,j) \in \{1\} \times \{2,3\}\} = c_{1,2} = 15$, zatem jako (5) zmienną bazową wybieramy $x_{1,2}^{(5)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{1,2}^{(5)} = \min\{a_1^{(4)}, b_2^{(4)}\} = \min\{80, 70\} = 70$.

Dokonyjemy korekty wektorów podaży dla $r=1$ (pierwszego) dostawcy: $a_1^{(5)} = a_1^{(4)} - x_{1,2}^{(5)} = 80 - 70 = 10$, oraz podobnie dla $k=2$ (drugiego) odbiorcy: $b_2^{(5)} = b_2^{(4)} - x_{1,2}^{(5)} = 70 - 70 = 0$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (czwartej). Zatem: $a_i^{(5)} = \{10, 0, 0\}$, zaś $b_j^{(5)} = \{0, 0, 10, 0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów nadawców ($j=2$) drugą piekarnię, bo wyzerowało się jej zapotrzebowanie $J = \{3\}$. Koniec iteracji ($p=5$)

($p=6$ – iteracja 6) - ostatnia:

Pozostało tylko 10 ton towaru we młynie $i=1$, które oczywiście należy dostarczyć do $j=3$ (trzeciej piekarni), zatem ostatnią zmienną bazową jest $x_{1,2}^{(6)} = 10$. Zerują się oczywiście wektory podaży i popytu (zob. tabela przewozów).

- **II etap algorytmu** (sprawdzenie optymalności rozwiązania początkowego).

Aktualne początkowe rozwiązanie bazowe jest następujące:

$X_B^{(0)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 70 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 130 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, zaś wartość łącznych kosztów dostaw wynosi $F(X) = 20 * 7 + 70 * 15 + 10 * 16 + 70 * 8 + 130 * 4 + 100 * 5 = 2930$ [zł].

Wyznaczamy tzw. koszty zastępcze \hat{C}_{ij} , dla 6 zmiennych bazowych koszty zastępcze są równe kosztom właściwym: $\hat{c}_{11} = c_{11} = 7$, $\hat{c}_{12} = c_{12} = 15$, $\hat{c}_{13} = c_{13} = 16$, $\hat{c}_{23} = c_{23} = 8$, $\hat{c}_{24} = c_{24} = 4$, $\hat{c}_{31} = c_{31} = 5$.

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & \\ & & 8 & 4 \\ 5 & & & \end{bmatrix}$$

Natomiast wartości pozostałych kosztów zastępczych znajdujemy zgodnie z procedurą: znaleźć takie dwa wiersze lub takie dwie kolumny dla których można wyznaczyć stałą wspólną różnicę np. pomiędzy wierszem 1 i 2 możemy wyznaczyć wspólną różnicę $16-8=8$ i zakładając, że ona ma być niezmienna dla wszystkich elementów z danej kolumny w tych wierszach znajdujemy wartości pozostałych brakujących kosztów zastępczych rozwiązując proste równania: $7 - \hat{c}_{21} = 8 \rightarrow \hat{c}_{21} = -1$, $15 - \hat{c}_{22} = 8 \rightarrow \hat{c}_{22} = 7$, $\hat{c}_{14} - 4 = 8 \rightarrow \hat{c}_{14} = 12$. Teraz możemy wyznaczyć np. różnicę pomiędzy kolumną 2 i 1, która wynosi: $15-7=8$, zatem: $\hat{c}_{32} - 5 = 8 \rightarrow \hat{c}_{32} = 13$. Podobnie np. różnica pomiędzy 3 i 2 kolumną wynosi 1, zatem $\hat{c}_{33} - 13 = 1 \rightarrow \hat{c}_{33} = 14$. Wspólna różnica pomiędzy 3 i 2 wierszem wynosi 6, zatem $\hat{c}_{34} - 4 = 6 \rightarrow \hat{c}_{34} = 10$.

Ostateczna postać macierzy kosztów zastępczych jest następująca:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 12 \\ -1 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 14 & 10 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy teraz macierz różnic postaci:

$$R = [r_{ij}] = C - \hat{C} = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 6 \\ 12 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 12 \\ -1 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 14 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 13 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

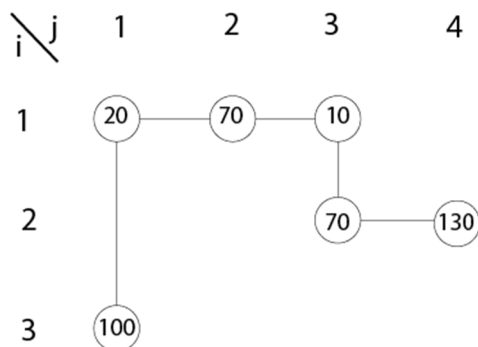
Kryterium optymalności: aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, gdy wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są nieujemne.

W naszym przypadku są dwie różnice ujemne -6 i -5 (zatem rozwiązanie początkowe, spełniające warunki ograniczające nie jest optymalne).

- **III etap algorytmu** (poprawa rozwiązania).

Iteracja (p=1) poprawy rozwiązania:

Każde rozwiązanie bazowe zadania transportowego możemy przedstawić w postaci grafu (ilustracji graficznej)



Rys. 1. Ilustracja początkowego rozwiązania bazowego - graf

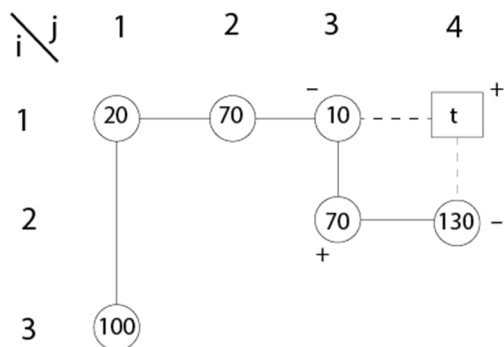
Jest to graf tzw. spójny (czyli każdy wierzchołek jest połączony krawędzią – możemy łączyć tylko w poziomie i pionie jak na rysunku) oraz nie posiadający obszarów zamkniętych (konturów) – graf tzw. bezkonturowy.

Musimy ustalić w celu poprawy rozwiązania bazowego, którą ze zmiennych nie będących bazowymi wprowadzimy do bazy (kryterium wejścia do bazy):

Kryterium wejścia: do bazy wprowadzamy taką zmienną (niebazową), dla której w macierzy różnic mamy największy element (co do wartości bezwzględnej) z ujemnych wartości R_{ij} (czyli najmniejszy ujemny).

W naszym przypadku są dwa elementy ujemne, a najmniejszy ujemny jest -6 dla zmiennej niebazowej x_{14} . Zatem tą zmienną wprowadzimy do bazy ($k=1, l=4$) – to jej indeksy.

Wprowadzając tą zmienną do bazy (graf - rys. 1) otrzymujemy w tym grafie kontur - rys. 2. Pomiędzy wierzchołkami $(1,3); (1,4); (2,4); (2,3)$. Interesują nas węzły narożne tego konturu (zbiór G). W tym wypadku są to wszystkie 4 węzły powstałego konturu. $G = \{(1,3); (1,4); (2,4); (2,3)\}$ – będzie ich zawsze parzysta liczba (tutaj 4). Następnie stosujemy odpowiednią procedurę cechowania wierzchołków: wierzchołek wprowadzany do bazy otrzymuje cechę (+), następnie na przemian (np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara) pozostałe węzły narożne konturu cechujemy (-/+). Tym samym przy parzystej liczbie - pomiędzy sąsiednimi węzłami narożnymi nie będzie 2 wierzchołków mających tą samą cechę (rys. 2).



Rys. 2. Ilustracja początkowego rozwiązania bazowego – graf z cechowaniem wierzchołków narożnych w konturze.

Taka procedura cechowania rozbiła nam zbiór G na dwa podzbiory: $G^+ = \{(1,4); (2,3)\}$ – ocechowanych na plus (+) oraz $G^- = \{(1,3); (2,4)\}$ – ocechowanych na minus (-)

Obliczamy jaką wartość transportu należy przypisać zmiennej wprowadzanej do nowego rozwiązania bazowego zgodnie z kryterium wejścia stosując wzór iteracyjny dla kolejnych iteracji (p): $x_{kl}^{(p)} = \min_{(i,j) \in G^-} x_{ij}^{(p-1)}$.

W naszym przypadku dla p=1 iteracji poprawy rozwiązania mamy: $x_{14}^{(1)} = \min_{(i,j) \in G^- = \{(1,3); (2,4)\}} \{10; 130\} = 10$.

Modyfikujemy wartości pozostałych zmiennych narożnych ocechowanych na (+), w naszym przypadku dla zmiennej o indeksach (2,3): x_{23} zgodnie ze wzorem: $x_{(i,j) \in G^+; (i,j) \neq (k,l)}^{(p)} = x_{(i,j)}^{(p-1)} + x_{(k,l)}^{(p)}$ - poprzednia wartość zostaje zwiększona o wartość przypisaną zmiennej wprowadzanej do bazy. Dla naszej (p=1) pierwszej iteracji $x_{(2,3)}^{(1)} = 70 + 10 = 80$.

Tak samo modyfikujemy wartości zmiennych narożnych ocechowanych na (-) zgodnie ze wzorem: $x_{(i,j) \in G^-}^{(p)} = x_{(i,j)}^{(p-1)} - x_{(k,l)}^{(p)}$ - poprzednia wartość zostaje pomniejszona o wartość przypisaną zmiennej wprowadzanej do bazy. Dla naszej (p=1) pierwszej iteracji mamy dla $x_{(1,3)}^{(1)} = 10 - 10 = 0$ oraz dla $x_{(2,4)}^{(1)} = 130 - 10 = 120$.

Ze zbioru zmiennych bazowych usuwamy tą zmienną, dla której skorygowana wartość dla zmiennych ocechowanych na (-) jest najmniejsza (równa zero). W tym wypadku zmienną x_{13} (tzw. **kryterium wyjścia z bazy**).

Wartości pozostałych zmiennych w grafie nie będących narożnymi w konturze lub nie należących do konturu nie ulegają zmianie (przepisujemy z poprzedniej iteracji) – aktualnie z wartości początkowych rozwiązania bazowego.

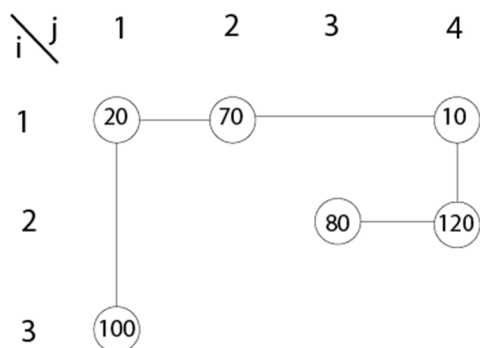
Otrzymujemy po (1) iteracji poprawy rozwiązania nowe drugie rozwiązanie bazowe postaci:

$$X_B^{(1)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 70 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 80 & 120 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ zaś wartość łącznych kosztów dostaw wynosi } F(X_B^{(1)}) = 20 * 7 + 70 * 15 + 10 * 6 + 80 * 8 + 120 * 4 + 100 * 5 = 2870 \text{ zł}$$

Uwaga: Warto zauważyć, że $F(X_B^{(1)}) = F(X_B^{(0)}) - |\hat{r}_{14}| * x_{1,4}^{(1)} = 2930 - 6 * 10 = 2870$ [zł] – poprzednia wartość funkcji celu dla początkowego rozwiązania bazowego pomniejszona o koszt wynikający ze zmniejszenia wartości funkcji celu wynikający z wprowadzenia nowej bardziej efektywnej zmiennej bazowej. Z interpretacji wskaźnika różnic wynika, że o 6 złotych możemy zmniejszyć koszt na 1 jednostce [1t] mąki, jeżeli będziemy transportować zgodnie z nowym rozwiązaniem tzn. wprowadzimy zmienną dla dostaw z 1 do 4.

Iteracja (p=2) sprawdzenie optymalności i poprawa rozwiązania:

Graf nowego rozwiązania bazowego jest następujący:



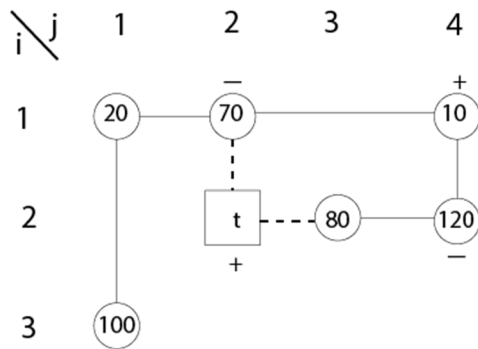
Rys. 3. Nowy graf aktualnego rozwiązania bazowego (p=2).

Macierz kosztów zastępczych oraz macierz różnic jest postaci:

$$\hat{C} = [\hat{c}_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 10 & 6 \\ 5 & 13 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 8 & 4 \end{bmatrix}, R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $r_{22} = -2 < 0$, zatem nie jest to rozwiązanie optymalne.

Poprawiamy rozwiązanie i wprowadzamy nową zmienną do nowej bazy x_{22} (jedyiny ujemny współczynnik różnic). Procedurę cechowania wierzchołków narożnych dla nowego konturu przedstawia (rys. 4).



Rys. 4. Graf aktualnego rozwiązania bazowego ($p=2$) z cechowaniem.

Obliczamy nowe wartości zmiennej wprowadzanej do bazy $x_{22}^{(2)} = \min\{70, 120\} = 70$.

Obliczamy skorygowane wartości dla ocechowanej na (+) drugiej zmiennej $x_{14}^{(2)} = 10 + 70 = 80$.

Obliczamy skorygowane wartości dla ocechowanych na (-) zmiennych narożnych konturu $x_{12}^{(2)} = 70 - 70 = 0$ oraz $x_{24}^{(2)} = 120 - 70 = 50$.

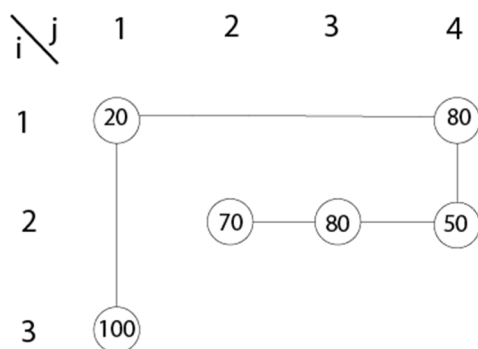
Pozostałe wierzchołki dla zmiennych bazowych się nie zmieniają.

Otrzymujemy trzecie rozwiązanie bazowe:

$$X_B^{(2)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 70 & 80 & 50 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ zaś wartość łącznych kosztów dostaw wynosi } F(X_B^{(2)}) = 20 * 7 + 80 * 6 + 70 * 11 + 80 * 8 + 50 * 4 + 100 * 5 = 2870 - 2 * 70 = 2730 \text{ zł.}$$

Iteracja ($p=3$) sprawdzenie optymalności i poprawa rozwiązania:

Graf nowego rozwiązania bazowego jest następujący:



Rys. 5. Nowy graf aktualnego rozwiązania bazowego ($p=3$).

Macierz kosztów zastępczych oraz macierz różnic dla nowego rozwiązania jest postaci:

$$\hat{C} = [\hat{c}_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 11 & 8 & 4 \end{bmatrix}, R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ponieważ wszystkie współczynniki różnic dla zmiennych nie będących bazowymi są ≥ 0 , to aktualne rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem optymalnym !!!

Zatem (koniec algorytmu):

$$X^{(*)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 70 & 80 & 50 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ zaś wartość minimalnych łącznych kosztów dostaw mąki do wszystkich piekarń wynosi } F_{min}^*(X^*) = 2730 \text{ zł.}$$

Przykład 2. (zagadnienie minimalizacji pustych przebiegów)

Do siedmiu stacji kolejowych nadchodzą i są odprawiane przesyłki całowagonowe. Wielkości przywozu p_i oraz wywozu w_i , a także odległości pomiędzy stacjami podano w tabeli:

Stacja kolejowa	1	2	3	4	5	6	7	p_i
1	0	56	38	132	21	55	24	18
2		0	27	46	31	10	99	15
3			0	22	44	33	77	16
4				0	18	9	66	15
5					0	90	11	19
6						0	44	12
7							0	5
w_i	12	13	22	22	10	12	9	Suma 100

Opracować plan dystrybucji (przemieszczania) pustych wagonów, tak aby łączny wagonokilometraż pustych przebiegów był możliwie najmniejszy.

Rozwiązanie:

Ustalenie numerów stacji, które są nadawcami pustych przebiegów ($w_i - p_i < 0$) – więcej wagonów pełnych z przesyłkami przyjeżdża do stacji niż pełnych z niej wyjeżdża, więc niektóre wyjeżdżają puste, oraz numerów stacji, które są odbiorcami pustych przebiegów wagonów ($w_i - p_i > 0$). Stacje, dla których ($w_i - p_i = 0$) pomijamy w obliczeniach (ze zbioru rozważanych punktów dostaw), gdyż problem pustych przebiegów dla nich nie występuje.

(i)	$(w_i - p_i)$	Nadawca/Odbiorca (N/O) pustych przebiegów
1	12-18 = -6	(N)
2	13-15 = -2	(N)
3	22-16 = 6	(O)
4	22-15 = 7	(O)
5	10-19 = -9	(N)
6	12-12 = 0	problem pustych przebiegów nie występuje
7	9-5 = 4	(O)

Model matematyczny (zapisany za pomocą zamkniętego zadania transportowego):

Dane: k=3 – liczba nadawców, l=3 – liczba odbiorców.

Zbiór indeksów nadawców $I = \{1 (i = 1), 2 (i = 2), 3 (i = 5)\}$. Zbiór indeksów odbiorców $J = \{1 (i = 3), 2 (i = 4), 3 (i = 7)\}$.

Wektor podaży na puste wagony dla stacji nadawców: $a = (a_1, a_2, a_3) = (6, 2, 9)$.

Wektor popytu na puste wagony dla stacji odbiorców: $b = (b_1, b_2, b_3) = (6, 7, 4)$.

Zadanie jest zbilansowane, bo $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^l b_j = 17$ wagonów pustych należy rozlokować.

Macierz współczynników funkcji celu (odległości pomiędzy stacjami nadawców i odbiorców) $d_{ij} =$

	stacja 3 (1)	stacja 4 (2)	stacja 7 (3)
stacja 1 (1)	38	132	24
stacja 2 (2)	27	46	99
stacja 5 (3)	44	18	11

Zmienne decyzyjne: $X \geq 0 = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ – liczba pustych wagonów przewożonych pomiędzy stacjami (i-nadawców) oraz (j-odbiorców).

Funkcja celu: (wagonokilometraż pustych przebiegów [wagonów*km]) $F(X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 d_{ij} * x_{ij} \rightarrow \min$

$$F(X) = 38 * x_{11} + 132 * x_{12} + 24 * x_{13} + 27 * x_{21} + 46 * x_{22} + 99 * x_{23} + 44 * x_{31} + 18 * x_{32} + 11 * x_{33} \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 6 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 9 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie algorytmem transportowym:

Początkowe rozwiązanie – metoda minimalnego elementu macierzy kosztów.

Tablica przewozów:

i/j	1	2	3	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1	$x_{1,1}^{(4)} = 4$	$x_{1,2}^{(5)} = 2$		6	6	6	6	2	0
2	$x_{2,1}^{(3)} = 2$			2	2	2	0	0	0
3		$x_{3,2}^{(2)} = 5$	$x_{3,3}^{(1)} = 4$	9	5	0	0	0	0
$b_j^{(0)}$	6	7	4	$\sum a_i =$					
$b_j^{(1)}$	6	7	0	$\sum b_j = 17$					
$b_j^{(2)}$	6	2	0						
$b_j^{(3)}$	4	2	0						
$b_j^{(4)}$	0	2	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0						

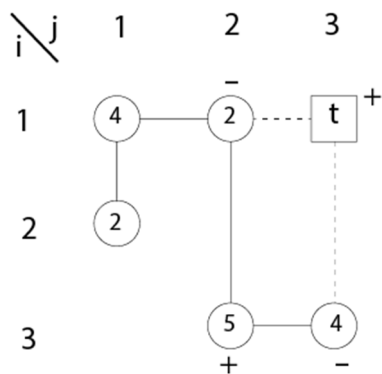
Pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne $X_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $F(X_B^{(1)}) = 4 * 38 + 2 * 132 + 2 * 27 + 5 * 18 + 4 * 11 = 604$ [wagonokilometrów]

Sprawdzenie optymalności:

Macierz kosztów zastępczych: $\hat{c}_{ij} = \begin{bmatrix} 38 & 132 & 125 \\ 27 & 121 & 114 \\ -76 & 18 & 11 \end{bmatrix}$

Macierz różnic: $r_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -101 \\ 0 & -75 & -15 \\ 120 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, zatem wprowadzamy nową zmienną bazową w celu poprawy rozwiązania: x_{13} (największy ujemny - minimalny element w macierzy różnic = -101).

Graf rozwiązania bazowego i procedura cechowania wierzchołków konturu $\{(1,3);(3,3);(3,2);(1,2)\}$



Obliczenie wartości zmodyfikowanych wierzchołków dla nowego rozwiązania bazowego:

dla zmiennej wprowadzanej do bazy (ocechowanej na +): $x_{13} = \min_{(i,j) \in G^+} \{x_{12}, x_{33}\} = \min\{2, 4\} = 2$

dla pozostałych wierzchołków ocechowanych na (+): $x_{32} = 5 + 2 = 7$

dla wierzchołków ocechowanych na (-): $x_{12} = 2 - 2 = 0$, $x_{33} = 4 - 2 = 2$

Pozostałe zmienne bazowe nie ulegają zmianie.

Ponieważ dla $x_{12} = 0$, to usuwamy tą zmienną z bazy.

Powstaje nowe rozwiązanie bazowe $X_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $F(X_B^{(2)}) = 604 - 2 * 101 = 402$ [wagonokilometrów]

Sprawdzenie optymalności nowego rozwiązania:

Macierz kosztów zastępczych: $\hat{c}_{ij} = \begin{bmatrix} 38 & 31 & 24 \\ 27 & 20 & 13 \\ 25 & 18 & 11 \end{bmatrix}$

Macierz różnic: $r_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 101 & 0 \\ 0 & 26 & 86 \\ 19 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ponieważ wszystkie różnice dla bazowych są nieujemne, to jest to rozwiązanie optymalne.

Rozwiązanie ostateczne optymalne: $x_{11}^* = 4$; $x_{13}^* = 2$; $x_{21}^* = 2$; $x_{32}^* = 7$; $x_{33}^* = 2$ - należy zatem ze stacji (1) dokonać alokacji 4 pustych wagonów do stacji (3) oraz 2 pustych wagonów do stacji (2), ze stacji (2) należy przesłać 2 puste wagony do stacji (3) oraz ze stacji (5) 7 pustych wagonów do stacji (4) i 2 puste wagony do stacji (7). Łączny minimalny wagonokilometrów pustych przebiegów wyniesie $F_{min}^* = 402$ [wagonokilometrów].

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zad. 1. W skład pewnego przedsiębiorstwa wchodzi 6 zakładów produkcyjnych. Rozprowadzanie surowców oraz wywóz wyrobów gotowych odbywa się przy wykorzystaniu taboru samochodowego. Wielkości przywozu i wywozu (wyrażone liczbą pełnych samochodów) oraz odległości pomiędzy zakładami (w km) podano w tabeli:

Punkty wytwórcze	1	2	3	4	5	6	Wywóz
1	0	8	12	21	30	14	9
2		0	20	8	10	7	11
3			0	18	11	10	10
4				0	7	12	18
5					0	19	14
6						0	18
Przywóz	1 5	18	17	9	14	7	80

Zbudować model matematyczny, który pozwoli ustalić plan przebiegu pustych ciężarówek pomiędzy punktami wytwórczymi. Podać minimalny samochodokilometrów pustych przebiegów.

Zad. 2. Trzy składnice surowców wtórnych: I, II, III dostarczają te surowce do pięciu wykorzystujących je zakładów produkcyjnych. W składnicach znajduje się kolejno 500, 700 i 900 ton surowca. Zdolności przerobowe zakładów produkcyjnych wynoszą: 400, 400, 700, 300 i 300 ton. W tabeli podano odległości pomiędzy składnicami a zakładami produkcyjnymi (w km).

Składnice	Zakłady produkcyjne				
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
I	130	250	330	170	400
II	290	190	400	260	160
III	150	350	240	190	210

Przy odległości do 200 km transport surowców odbywa się samochodem (koszt 1 tonokilometra wynosi wówczas 1,2 zł). Jeżeli odległość jest większa niż 200 km, korzysta się z transportu kolejowego, a koszt 1 tonokilometra wynosi wtedy 1 zł. Opracować plan transportu surowców wtórnych ze składnic do zakładów przetwarzających surowce, tak aby łączne koszty transportu były możliwie najniższe.