Wybrane metody planowania sieciowego w warunkach niepewności i ryzyka – metoda PERT

<u>Literatura:</u>
- *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach (K. Kukuła red.) – rozdział 5.3, str. 187*
- *Materiały (PDF) z wykładu*

Przykład. Dla wykonania pewnego projektu logistycznego opracowano dwa warianty techniczne A i B. Należy na podstawie analizy sieciowej (metodą PERT) dokonać wyboru wariantu, w którym jest większa szansa dotrzymania terminu dyrektywnego t_d=48 dni. Charakterystyki czasu trwania dla poszczególnych czynności obu wariantów podano w tabeli:

Wariant A czynności (i-j)	Wariant A czasy trwania			Wariant B czynności (i-j)	Wariant B czasy trwania		
	a	m	b		a	m	b
1-2	13	14	15	1-2	17	20	20
1-3	5	10	15	1-3	14	14	14
1-4	7	10	19	1-4	1	5	15
2-3	2	2	2	2-5	2	10	12
2-5	10	10	10	3-6	17	18	25
3-6	20	21	22	3-7	15	15	15
3-7	4	16	16	4-7	2	5	14
4-7	5	20	23	5-8	18	20	28
5-8	5	8	11	6-8	14	15	22
6-8	12	12	12	7-8	18	21	24
7-8	18	18	30				

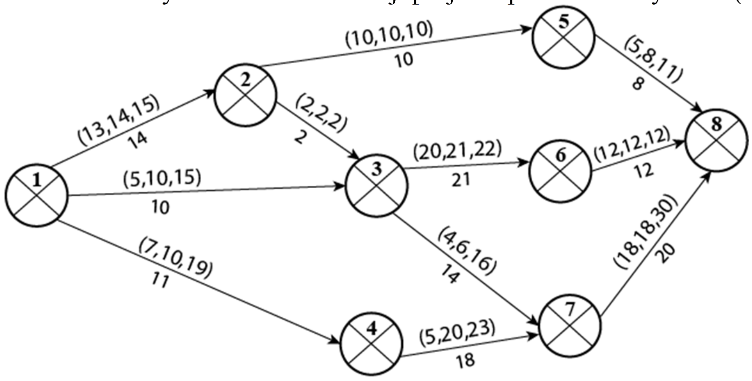
Dla obu wariantów projektu wyznaczyć ścieżkę krytyczną.

<u>Rozwiązanie:</u> (Analiza sieciowa dla wariantu A)

Dla każdej czynności wariantu „A" z losowymi czasami ich trwania wyznaczamy średnie (oczekiwane) czasy ich realizacji oraz ich zmienność (wariancję) ze wzorów: $E[t_{ij}] = \frac{a+4*m+b}{6}$ – czas średni, $D^2[t_{ij}] = \frac{(b-a)^2}{36}$ – wariancja czasu trwania.

Czynności (i-j)	Czas średni $E[t_{ij}] = \frac{a+4*m+b}{6}$	Wariancja czasu trwania $D^2[t_{ij}] = \frac{(b-a)^2}{36}$
(1-2)	$\frac{(13+4*14+15)}{6} = 14$	$\frac{(15-13)^2}{36} = 0{,}11$
(1-3)	$\frac{(5+4*10+15)}{6} = 10$	$\frac{(15-5)^2}{36} = 2{,}78$
(1-4)	$\frac{(7+4*10+19)}{6} = 11$	$\frac{(19-7)^2}{36} = 4$
(2-3)	$\frac{(2+4*2+2)}{6} = 2$	$\frac{(2-2)^2}{36} = 0$
(2-5)	$\frac{(10+4*10+10)}{6} = 10$	$\frac{(10-10)^2}{36} = 0$
(3-6)	$\frac{(20+4*21+22)}{6} = 21$	$\frac{(22-20)^2}{36} = 0{,}11$
(3-7)	$\frac{(4+4*16+16)}{6} = 14$	$\frac{(16-4)^2}{36} = 4$
(4-7)	$\frac{(5+4*20+23)}{6} = 18$	$\frac{(23-5)^2}{36} = 9$
(5-8)	$\frac{(5+4*8+11)}{6} = 8$	$\frac{(11-5)^2}{36} = 1$
(6-8)	$\frac{(12+4*12+12)}{6} = 12$	$\frac{(12-12)^2}{36} = 0$
(7-8)	$\frac{(18+4*18+30)}{6} = 20$	$\frac{(30-18)^2}{36} = 4$

Model sieciowy wariantu A realizacji projektu przedstawia rysunek (rys. 1).



Rys. 1. Model sieciowy dla wariantu A

Podobnie jak w metodzie ścieżki krytycznej możemy wyznaczyć dla zdarzeń oczekiwane (średnie) najwcześniejsze możliwe czasy realizacji dla zdarzeń. Wyznaczamy je ze wzoru rekurencyjnego:
$E\left[t_1 = T_1^{(w)}\right] = 0$, $E\left[t_i = T_i^{(w)}\right] = \max\limits_{k\in P(i)}\{E[t_k] + E[t_{ki}]\}$, dla $i = 2,3,\dots,n = 8$, gdzie: P(i) – zbiór zdarzeń poprzedzających zdarzenie „i".
Mając obliczone średnie najwcześniejsze możliwe czasy dla zdarzeń. Możemy także w dalszej kolejności (choć nie jest to wymagane) wyznaczyć średnie najpóźniejsze dopuszczalne czasy realizacji dla zdarzeń tego przedsięwzięcia ze wzoru:
$E\left[T_{n=8} = T_{n=8}^{(p)}\right] = E[t_{n=8}]$, $E\left[T_i = T_i^{(p)}\right] = \min\limits_{j\in N(i)}\{E[T_j] - E[t_{ij}]\}$, dla $i = 7,6,\dots,1$, gdzie: N(i) – zbiór zdarzeń następujących po zdarzeniu „i".
Następnie wyznaczamy wariancję dla najwcześniejszych możliwych terminów realizacji poszczególnych zdarzeń tego przedsięwzięcia ze wzoru:
$D^2[t_1] = 0, D^2[t_i] = \max\limits_{k\in P(i); E[t_i]=E[t_k]+E[t_{ki}]}\{D^2[t_k] + D^2[t_{ki}]\}$, dla $i = 2,3,\dots,n = 8$

<u>Obliczenia:</u>
$E[t_1] = 0, D^2[t_1] = 0$
$E[t_2] = E[t_1] + E[t_{12}] = 0 + 14 = 14.$ $D^2[t_2] = D^2[t_1] + D^2[t_{12}] = 0 + 0{,}11 = 0{,}11.$
Ścieżka krytyczna częściowa: 1-2.
$E[t_3] = \max\limits_{k\in\{1,2\}}\{E[t_k] + E[t_{k3}]\} = \max\{0 + 10; 14 + 2\} = 16.$ Ponieważ maksimum mieliśmy dla poprzedzającego (wchodzącego) wierzchołka (zdarzenia) k=2. Zatem mamy tylko jednoznaczną jedną ścieżkę maksymalną wchodzącą do (i=3) z (i=2), czyli $D^2[t_3] = D^2[t_2] + D^2[t_{23}] = 0{,}11 + 0 = 0{,}11.$
Ścieżka krytyczna częściowa: 1-2-3.

$E[t_4] = E[t_1] + E[t_{14}] = 0 + 11 = 11.$ $D^2[t_4] = D^2[t_1] + D^2[t_{14}] = 0 + 4 = 4.$

Ścieżka krytyczna częściowa: 1-4.

$E[t_5] = E[t_2] + E[t_{25}] = 14 + 10 = 24.$ $D^2[t_5] = D^2[t_2] + D^2[t_{25}] = 0{,}11 + 0 = 0{,}11.$

Ścieżka krytyczna częściowa: 1-2-5.

$E[t_6] = E[t_3] + E[t_{36}] = 16 + 21 = 37.$ $D^2[t_6] = D^2[t_3] + D^2[t_{36}] = 0{,}11 + 0{,}11 = 0{,}22.$

Ścieżka krytyczna częściowa: 1-2-3-6.

$E[t_7] = \max\limits_{k\in\{3,4\}}\{E[t_k] + E[t_{k7}]\} = \max\{16 + 14; 11 + 18\} = 30.$ Ponieważ znowu maksimum mieliśmy dla poprzedzającego (wchodzącego) wierzchołka (zdarzenia) k=3. Zatem mamy tylko jedną jednoznaczną ścieżkę maksymalną wchodzącą do (i=7) z (i=3), czyli $D^2[t_7] = D^2[t_3] + D^2[t_{37}] = 0{,}11 + 4 = 4{,}11.$
Ścieżka krytyczna częściowa: 1-2-3-7.
$E[t_8] = \max\limits_{k\in\{5,6,7\}}\{E[t_k] + E[t_{k8}]\} = \max\{24 + 8; 37 + 12; 30 + 20\} = 50.$ Ponieważ znowu maksimum mieliśmy dla poprzedzającego (wchodzącego) wierzchołka (zdarzenia) k=7. Zatem mamy tylko jedną jednoznaczną ścieżkę maksymalną wchodzącą do (i=8) z (i=7), czyli $D^2[t_8] = D^2[t_7] + D^2[t_{78}] = 4{,}11 + 4 = 8{,}11.$

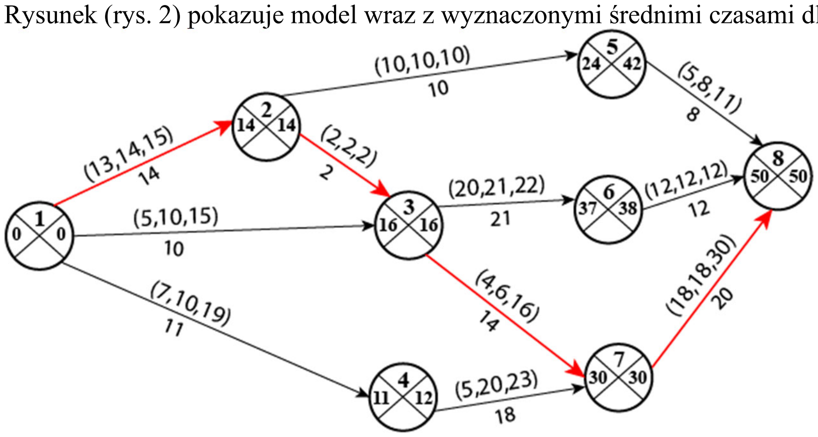
Mamy zatem tylko jedną ścieżkę krytyczną pełną: 1-2-3-7-8.

Zauważmy, że w przypadku jednej ścieżki krytycznej wariancja $\mathrm{D}^2[\mathrm{t}_8] = \mathrm{D}^2[\mathrm{t}_{12}] + \mathrm{D}^2[\mathrm{t}_{23}] + \mathrm{D}^2[\mathrm{t}_{37}] + \mathrm{D}^2[\mathrm{t}_{78}]$. Gdyby było więcej ścieżek krytycznych maksymalnych prowadzących z 1-8, to wtedy należałoby wziąć maksimum z sumy wariacji dla czynności tych ścieżek (maksymalna wariancja czasów przejścia na każdej ze ścieżek).

Podsumowanie wyników obliczeń (także dla średnich – oczekiwanych najpóźniejszych dopuszczalnych terminów realizacji) dla poszczególnych zdarzeń podaje tabela:

Zdarzenie i	Średni najwcześniejszy możliwy czas realizacji $\mathrm{E}[\mathrm{t}_i] =$	Średni najpóźniejszy dopuszczalny czas realizacji $\mathrm{E}[\mathrm{T}_i] =$	Wariancja najwcześniejszego możliwego czasu realizacji $\mathrm{D}^2[\mathrm{t}_i] =$
1	0	0	0
2	14	14	0,11
3	16	16	0,11
4	11	12	4
5	24	42	0,11
6	37	38	0,22
7	30	30	4,11
8	50	50	8,11

Rysunek (rys. 2) pokazuje model wraz z wyznaczonymi średnimi czasami dla zdarzeń oraz ścieżką krytyczną.



Rys. 2. Model ostateczny wariant A.

Prawdopodobieństwo dotrzymania terminu dyrektywnego $t_d = 48$ dni. Określające szansę, że w realizacji projektu z losowymi czasami trwania czynności nie przekroczymy tego planowanego terminu wyznacza się ze wzoru:
$P(t_8 \leq t_d = 48) \cong N_{(0,1)}\left(\frac{48-E[t_8]}{\sqrt{D^2[t_8]}}\right) = N_{(0,1)}\left(\frac{48-50}{\sqrt{8,11}}\right) = N_{(0,1)}(-0,7) = 0,24$ (24%), gdzie: $N_{(0,1)}$ – wartości dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego z tablic statystycznych.

Mamy zatem szansę ok. 24%, że w realizacji wariantu A projektu nie będzie on trwał dłużej niż 48 [dni].

Rozwiązanie: (Analiza sieciowa dla wariantu B) – obliczenia cząstkowe zrobić samodzielnie oraz narysować model sieciowy przedsięwzięcia !!!

Odpowiedzi:

$E[t_8] = 50$, $D^2[t_8] = 1$. Tylko jedna ścieżka krytyczną: 1-3-7-8.

Oszacowane prawdopodobieństwo dotrzymania terminu dyrektywnego $t_d = 48$ dni w wariancie B wynosi:
$P(t_8 \leq t_d = 48) \cong N_{(0,1)}\left(\frac{48-E[t_8]}{\sqrt{D^2[t_8]}}\right) = N_{(0,1)}\left(\frac{48-50}{\sqrt{1}}\right) = N_{(0,1)}(-2) = 0,023$ (2,3%).

Mamy zatem większą szansę dotrzymania terminu dyrektywnego 48 [dni] w wariancie A. Tym samym, jeżeli zdecydujemy się na jego realizację w tym wariancie, to mamy szansę ok. 24%, że projekt nie będzie trwał dłużej niż 48 [dni].