❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

1. Algorytm wyznaczania rozwiązań ZZT.

Idea poszukiwania rozwiązań ZZT jest podobna do idei algorytmu „simpleks".

Najpierw należy znaleźć jakiekolwiek początkowe rozwiązanie bazowe (ponieważ rząd macierzy rz(A)= n + m – 1), to rozwiązanie bazowe niezdegenerowane posiada n + m - 1 dodatnich wartości w wektorze zmiennych decyzyjnych – zmienne bazowe, pozostałe wartości to zera – dla zmiennych niebazowych.

Następnie sprawdza się, czy rozwiązanie bazowe aktualne jest optymalne, czy też nie. Jeśli nie to znajdujemy kolejne rozwiązanie nie gorsze od poprzedniego i znów sprawdzamy jego optymalność. Powyższe postępowanie kończymy, gdy wreszcie uzyskamy rozwiązanie bazowe optymalne.

Algorytmicznie otrzymywanie rozwiązań ZZT można przedstawić następująco:
ETAP I (wyznaczenie dopuszczalnego początkowego rozwiązania bazowego).
W literaturze opisanych jest wiele metod konstrukcji początkowego rozwiązania bazowego, np.:

- Metoda ***kąta północno – zachodniego*** (N-W) – prosta ale mało efektywna (wymagane jest zazwyczaj przeprowadzenie dużej liczby iteracji, aby uzyskać z niego końcowe rozwiązanie optymalne).
- Metoda ***minimalnego elementu*** macierzy kosztów transportu – na ogół bardziej efektywna od poprzedniej.
- Metoda VAM (***aproksymacyjna***) – nieco bardziej złożona od poprzednich, ale daje rozwiązania początkowe bliskie rozwiązaniom optymalnym.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów:

Oznaczmy przez (r , k) – numer zmiennej wybieranej w danej (p – tej) iteracji za zmienną bazową: $x_{r,k}^{(p)} > 0$. Oznaczmy przez: $\boldsymbol{I}$ – zbiór indeksów dostawców, których zasoby w danym kroku nie zostały jeszcze rozdysponowane, zaś przez $\boldsymbol{J}$ – zbiór indeksów odbiorców, których zapotrzebowanie w danym kroku nie zostało jeszcze zaspokojone. Numer zmiennej wprowadzanej do bazy w każdej iteracji wyznaczamy zgodnie z formułą:

$$c_{r,k} = \min\{c_{i,j} : (i,j) \in I \times J\}$$

Następnie przypisujemy (p – tej) - zmiennej bazowej aktualną wielkość transportu od dostawcy (r – tego) do odbiorcy (k – tego) zgodnie ze wzorem:

$$x_{r,k}^{(p)} = \min\{a_r^{(p-1)}, b_k^{(p-1)}\}; \; p = 1,2,\ldots, m+n-1;$$
$$a_r^{(p)} = a_r^{(p-1)} - x_{r,r}^{(p)}, b_k^{(p)} = b_k^{(p-1)} - x_{r,k}^{(p)}, \; p = 1,2,\ldots, m+n-1;$$
$$a_i^{(p)} = a_i^{(p-1)}, b_j^{(p)} = b_j^{(p-1)}, \quad \text{dla} \quad i \neq r, j \neq k, \; p = 1,\ldots, m+n-1;$$
$$a_i^{(0)} = a_i, b_j^{(0)} = b_j; i = 1,\ldots, n; \; j = 1,\ldots, m;$$

Eliminujemy z dalszych rozważań ze zbioru indeksów dostawców „$\boldsymbol{I}$" lub odbiorców „$\boldsymbol{J}$" ten indeks, dla którego $a_r^{(p)} = 0$ (zapasy tego dostawcy zostały wyczerpane) lub $b_k^{(p)} = 0$ (zapotrzebowanie tego odbiorcy zostało zrealizowane).

Powtarzamy tę procedurę i na ogół po (m + n - 1) krokach znajdujemy wartości wszystkich zmiennych bazowych dla rozwiązania początkowego.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tabela kosztów (macierz kosztów)

Magazyny (dostawcy)	Piekarnie (odbiorcy) 1	2	3	4
1	25	24	28	13
2	17	30	15	26

Tablica przewozów (kolejne iteracje):

i \ j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1		$x_{1,2}^{(4)} = 70$		$x_{1,4}^{(1)} = 60$	130	70	70	70	0	0
2	$x_{2,1}^{(3)} = 80$	$x_{2,2}^{(5)} = 50$	$x_{2,3}^{(2)} = 70$		200	200	130	50	50	0
$b_j^{(0)}$	80	120	70	60	330					
$b_j^{(1)}$	80	120	70	0						
$b_j^{(2)}$	80	120	0	0						
$b_j^{(3)}$	0	120	0	0						
$b_j^{(4)}$	0	50	0	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0	0						

Iteracja p=5: $I = \{2\}; J = \{2\};$ 5 zmienna bazowa: $x_{2,2}^{(5)} = \min\{50, 50\} = 50$

modyfikujemy: $a_1^{(4)} = a_1^{(3)} - x_{1,2} = 70 - 70 = 0$; $b_2^{(4)} = b_4^{(3)} - x_{1,2} = 120 - 70 = 50$;

pozostałe: $a_i^{(4)} = a_i^{(3)}$; $b_j^{(4)} = b_j^{(3)}$. Skreślamy ze zbioru nadawców 1 – nadawcę.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Tablica przewozów (ostateczna)

i \ j	1	2	3	4
1	0	70	0	60
2	80	50	70	0

Otrzymujemy zatem rozwiązanie bazowe początkowe postaci:

$f(x_{i,j}) = 80\cdot 17 + 70\cdot 24 + 50\cdot 30 + 70\cdot 15 + 60\cdot 13 = 6370$

ETAP II (sprawdzenie optymalności rozwiązania bazowego).

Wyznaczamy tzw. ***tablicę kosztów zastępczych*** $\hat{c}_{i,j}$ w następujący sposób:

- Koszty zastępcze dla aktualnych przewozów rozwiązania bazowego ($x_{i,j} > 0$) przyjmujemy równe kosztom wyjściowym podanym w tablicy: $c_{i,j}$.
- Znajdujemy parę takich wierszy lub kolumn dla których możemy wyznaczyć ich różnicę (w tej samej kolumnie lub wierszu są dwie zmienne bazowe).
- Znając ile wynosi taka różnica - wyznaczamy pozostałe elementy w macierzy kosztów zastępczych, których wartości jeszcze nie znamy, rozwiązując odpowiednie równania, tak aby zgadzała się wyznaczona różnica.

Po wyznaczeniu kosztów zastępczych wyznaczamy ***tablicę różnic***: $r_{i,j} = c_{i,j} - \hat{c}_{i,j}$.

Uwaga: Dla zmiennych bazowych $r_{i,j} = 0$.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium optymalności rozwiazania bazowego:

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, jeżeli wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie.

Dla naszego przykładu (w przypadku otrzymanego rozwiązania początkowego metodą minimalnego elementu macierzy kosztów) mamy:

Macierz kosztów zastępczych (początkowa)

i \ j	1	2	3	4
1		24		13
2	17	30	15	

Różnica np. między drugim i pierwszym wierszem wynosi: 6, zatem pozostałe elementy tej macierzy wyznaczamy rozwiązując równania: $17 - \hat{c}_{1,1} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,1} = 11$, $15 - \hat{c}_{1,3} = 6 \Rightarrow \hat{c}_{1,3} = 9$, $\hat{c}_{2,4} - 13 = 6 \Rightarrow \hat{c}_{2,4} = 19$.

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych (pełna)

i \ j	1	2	3	4
1	11	24	9	13
2	17	30	15	19

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	14	0	19	0
2	0	0	0	7

Ponieważ wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są dodatnie to otrzymane rozwiązanie początkowe jest optymalne.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

ETAP III (modyfikacja rozwiązania bazowego i poprawa wartości funkcji celu):

Z każdym zadaniem transportowym związany jest graf tego zadania odpowiadający aktualnemu rozwiązaniu bazowemu. Jeżeli rozwiązanie bazowe nie jest zdegenerowane, to taki graf jest grafem ***spójnym*** i ***bezkonturowym***.

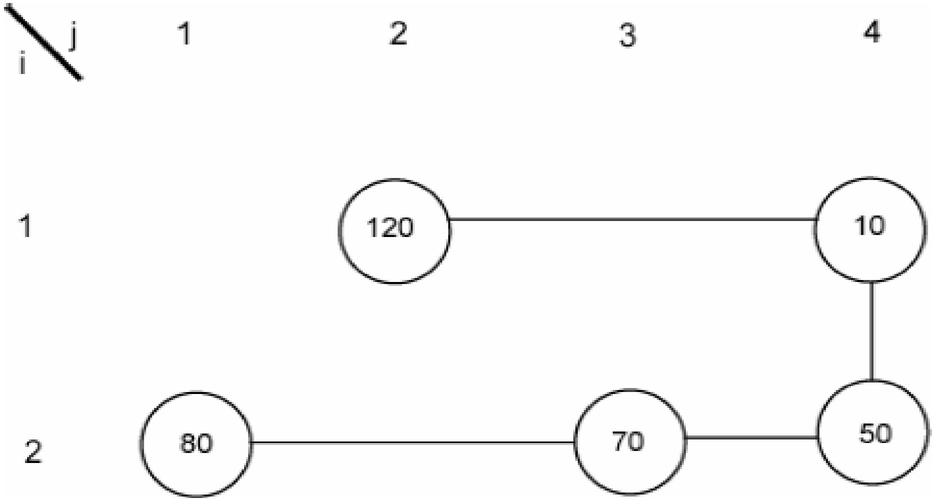
Np. dla naszego przykładu dla rozwiązania bazowego postaci:

Tablica przewozów

i \ j	1	2	3	4
1	0	120	0	10
2	80	0	70	50

Funkcja celu wynosi: $f(x_{i,j}) = 80 \cdot 17 + 120 \cdot 24 + 70 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 50 \cdot 26 = 6720$ (więcej niż dla rozwiązania optymalnego).

Graf tego rozwiązania jest postaci:



❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Macierz kosztów zastępczych:

i \ j	1	2	3	4
1	4	24	2	13
2	17	37	15	26

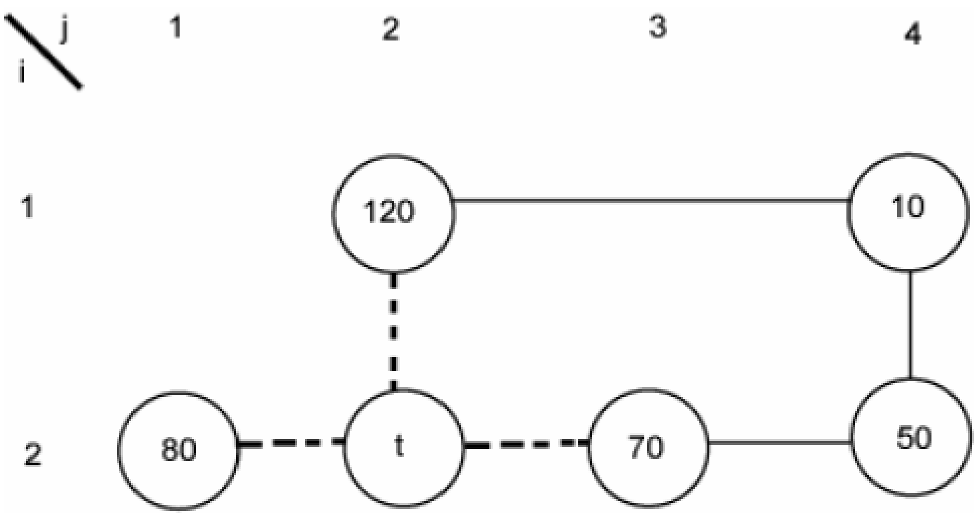
Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

Ponieważ $\hat{c}_{2,2} = -7$, to rozwiązanie to nie jest oczywiście optymalne. Należy go zatem poprawić.

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wejścia do bazy:
Do bazy wprowadzamy tę zmienną niebazową, dla której element macierzy różnic jest najmniejszy (z ujemnych). W naszym przypadku zmienną $x_{2,2}$. Wprowadzając tę zmienną (przypisując jej wielkość transportu „t>0" jednostek) poprawiamy rozwiązanie bazowe. Po wprowadzeniu tej zmiennej otrzymalibyśmy dla zadania graf konturowy postaci:
Węzły narożne konturu określają numery zmiennych, których wartości się zmieniają, gdy wprowadzamy do bazy nową zmienną.



Należy ustalić, zatem którą zmienną z aktualnej bazy (spośród narożnych konturu) należy usunąć. Określa to kryterium wyjścia dla zadania transportowego.

Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Kryterium wyjścia:

Niech $G = \{(k,l)\}$, gdzie: (k,l) - węzły narożne konturu. Zbiór ten ma parzystą liczbę wierzchołków (dla nas 4). Wierzchołki te cechujemy na przemian (+/-) poczynając od wierzchołka, który wprowadzamy do bazy (otrzymuje on cechę plus). Cechowanie dzieli ten zbiór na 2 rozłączne zbiory G^+ oraz G^-.

W naszym przykładzie: $G^+ = \{(2,2),(1,4)\}; G^- = \{(1,2),(2,4)\}$.

Wartość nowo wprowadzanej zmiennej bazowej w (p – tej) iteracji wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$x^{(p)}_{k,l} = \min_{(i,j)\in G^-} \{x_{i,j}^{(p-1)}\}$$

Nowe wartości zmiennych narożnych obliczamy zgodnie ze wzorami:

$$x_{i,j}^{p} = x_{i,j}^{(p-1)} - x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j) \in G^-;$$

$$x_{i,j}^{(p)} = x_{i,j}^{(p-1)} + x_{k,l}^{(p)} \quad \text{dla} \quad (i,j) \in G^+, (i,j) \neq (k,l);$$

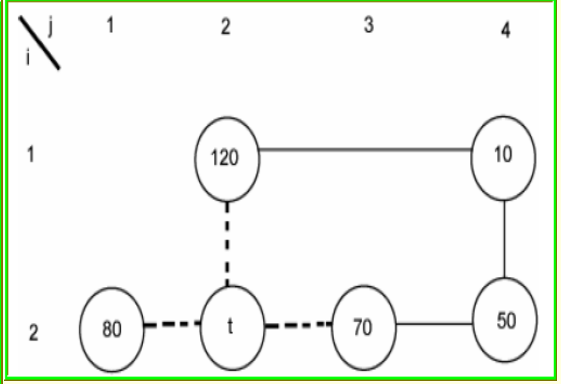
$$x_{i,j}^{0} = x_{i,j};$$

Pozostałe zmienne nie będące narożne w grafie nie zmieniają wartości.

W naszym przykładzie:

$$x_{2,2}^{(1)} = \min\{x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0}\} = \min\{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$

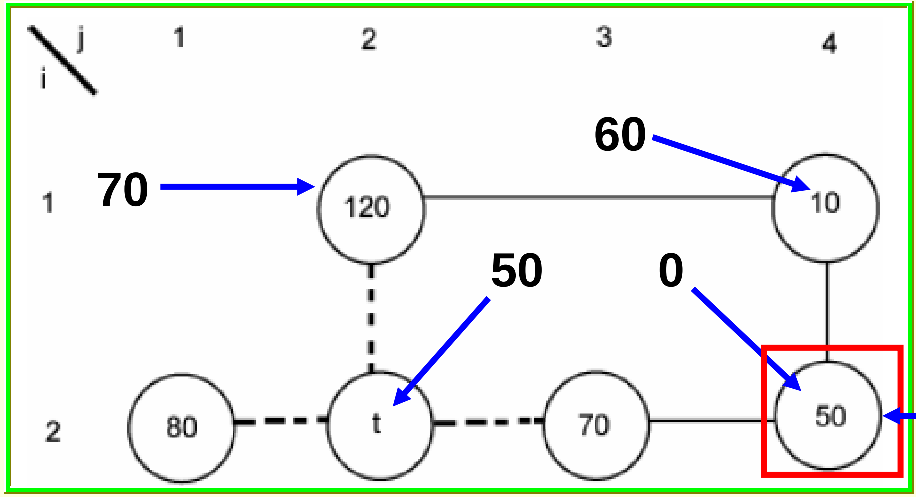


❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

__Treść kryterium wyjścia__: z bazy usuwamy tę zmienną ze zmiennych należących do zbioru indeksów G^-, dla której policzona nowa wartość (zgodnie ze wzorami redukcyjnymi) jest najmniejsza. Dla naszego przykładu usuwaną zmienną jest zmienna: $x_{2,4}$. Tak utworzone nowe rozwiązanie bazowe da wyznaczone już wcześniej rozwiązanie optymalne.

$$x_{2,2}^{(1)} = \min\left\{x_{1,2}^{0}, x_{2,4}^{0}\right\} = \min\{120, 50\} = 50; \quad x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 120 - 50 = 70;$$

$$x_{2,4}^{(1)} = x_{2,4}^{(0)} - x_{2,2}^{(1)} = 50 - 50 = 0; \quad x_{1,4}^{(1)} = x_{1,4}^{(0)} + x_{2,2}^{(1)} = 10 + 50 = 60.$$

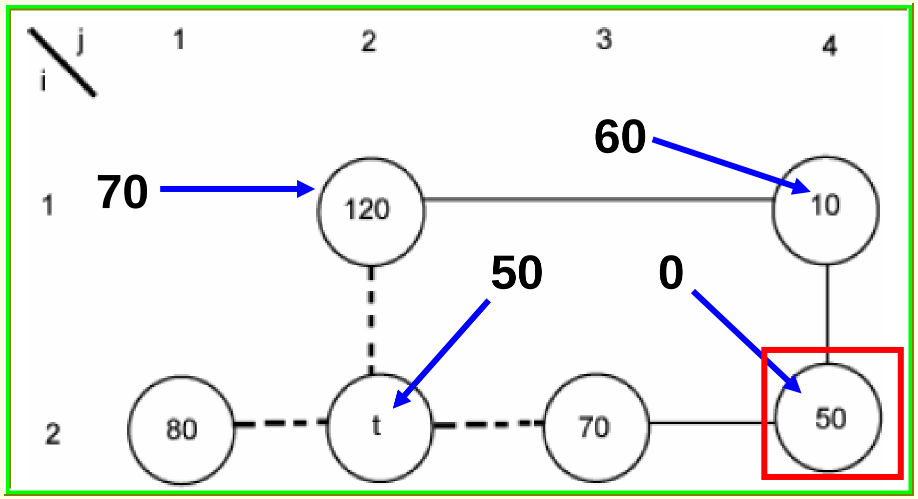


niebazowa

❑ Zagadnienia i Problemy Transportowe – Algorytm Transportowy

Interpretacja współczynnika różnic $r_{2,2} = -7$ (dla rozwiązania nieoptymalnego) prowadzi do wniosku, że nieoptymalne rozwiązanie aktualne można poprawić o wartość $(-7 \cdot 50 = -350)$ - tzn. zmniejszyć o 350 koszty transportu (tyle wynosi różnica f – celu rozwiązania bieżącego oraz optymalnego), dostarczając drugiemu odbiorcy nie 120 j. jego pełnego zapotrzebowania z magazynu 1-go, lecz w porcjach - 70 z 1-go i 50 z 2-go. Tym samym zamówienie 4-go odbiorcy mogło być zrealizowane (60 – jednostek) w całości z magazynu 1-go.

Uwaga:
Jeżeli w macierzy różnic rozwiązania optymalnego jest więcej zer niż zmiennych bazowych, to istnieje wiele rozwiązań optymalnych o tej samej wartości funkcji celu.



Macierz różnic

i \ j	1	2	3	4
1	21	0	26	0
2	0	-7	0	0

Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

1. Zagadnienie pośrednika:

Pośrednik (sprzedawca) nabywa towar od m - dostawców, przewozi go oraz sprzedaje n - odbiorcom.

Dane są:

a_i - maksymalna ilość towaru jaką można kupić u i-tego dostawcy (jego podaż)

b_j - maksymalna ilość towaru jaką można sprzedać j-temu odbiorcy (jego popyt)

k_i - cena zakupu u i-tego dostawcy

p_j - cena sprzedaży j-temu odbiorcy

c_{ij} - jednostkowy koszt transportu na trasie od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy

Należy ustalić taki plan zakupów, transportu i sprzedaży, aby dochód pośrednika był maksymalny (dochód = przychód ze sprzedaży - koszty zakupu - koszty transportu)

$d_{ij} = p_j - k_i - c_{ij}$ - dochód jednostkowy z trasy zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; \; j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

2. Zagadnienie transportowe z ograniczoną przepustowością tras:

Mamy m - dostawców pewnego towaru oraz n - jego odbiorców.

Znana jest:

a_i - podaż i-tego dostawcy

b_j - popyt j-tego odbiorcy

c_{ij} - jednostkowe koszty transportu na trasie $\langle i, j \rangle$ od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy

Zakładamy, że przepustowość niektórych lub wszystkich tras jest ograniczona (np. dostępną ładownością środków transportu).

Oznaczmy:

H - zbiór tras z ograniczoną przepustowością

h_{ij} - maksymalna przepustowość na trasie $\langle i, j \rangle$

Zakłada się również, że: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

Należy ustalić taki plan dostaw towarów od nadawców do odbiorców, aby łączny ich koszt był minimalny.

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - wielkość przewozu na trasie zaopatrzeń $\langle i, j \rangle$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1, \ldots, n) \\ x_{ij} \leq h_{ij} & \langle i, j \rangle \in H \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

4. Minimalizacja pustych przebiegów (dotyczy optymalnego krążenia środków transportu rozwożących towar):

Załóżmy, że istnieje n - miast pomiędzy którymi odbywa się wymiana towarowa.

Miasta te tworzą układ zamknięty, tzn. wymiana towarów odbywa się tylko pomiędzy nimi i każde z nich może być zarówno dostawca jak i odbiorcą towarów.

Do każdego miasta przywozi się i z każdego wywozi się określoną masę towarową nadającą się do przewozu określonym środkiem transportu (o określonej ładowności)

Znane są:

d_{ij} - odległości pomiędzy i-tym oraz j-tym miastem

a_{ij} - przewóz masy towarowej pomiędzy miastami - wyrażony liczbą pełnych środków transportu (samochodów, wagonów)

❑ Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

Dla każdego miasta określa się:

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do wywiezienia masy towarowej (wywóz) równą: $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Liczbę pełnych środków transportu niezbędnych do przywiezienia masy towarowej (przywóz) równą: $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Dla całego układu spełniona jest równość: $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Natomiast dla poszczególnych miast wywóz (w_i) wcale nie musi być równy przywozowi (p_i).

Miasta w których $w_i > p_i$ - są odbiorcami tzw. pustych przebiegów, a ich zapotrzebowanie na puste środki transportu wynosi: $b_i = w_i - p_i > 0$.

Miasta w których $w_i < p_i$ - są dostawcami pustych przebiegów, a ich podaż pustych środków transportu wynosi: $a_i = p_i - w_i > 0$.

Miasta w których $p_i = w_i$ eliminujemy z dalszych rozważań (bo nie występuje dla nich problem pustych przebiegów)

Wybrane zagadnienia i problemy transportowe

Problem decyzyjny jest następujący:

Znaleźć taki plan przebiegów pustych środków transportu pomiędzy miastami, aby łączny pojazdokilometraż (samochodokilometraż, wagonokilometraż) pustych przebiegów był minimalny.

Zmienne decyzyjne:

x_{ij} - liczba pustych środków transportu wysyłanych z miasta i do miasta j

$i = 1, 2, ..., k$ - indeks miast dostawców, dla których występuje problem pustych przebiegów

$j = 1, 2, ..., l$ - indeks miast odbiorców, dla których występuje problem pustych przebiegów

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left(d_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, ..., k) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, ..., l) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, ..., k; j = 1, ..., l) \end{cases}$$

OPTYMALIZACJA NIELINIOWA

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

1. Wprowadzenie:

Bardzo często w praktyce spotykamy się z taką sytuacją, gdzie analizowane procesy gospodarcze mają charakter nieliniowy.

Stąd też oprócz liniowych zadań decyzyjnych (spotykanych np.: w zagadnieniach transportowych, różnego rodzaju problemach optymalizacji dyskretnej, zagadnieniach optymalizacji sieciowej) formułujemy także **nieliniowe zadania decyzyjne**.

Zadanie decyzyjne nazywamy **nieliniowym** jeżeli **funkcja celu** lub chociaż **jeden z warunków ograniczających** jest postaci **nieliniowej**.

Zadania **nieliniowe rozpatruje się rzadziej** niż zadania liniowe, gdyż:

- brak jest danych aby oszacować analityczną postać nieliniowej zależności badanego zjawiska (pomimo, że wiemy iż będzie to zależność nieliniowa);
- zadania programowania nieliniowego rozwiązuje się zazwyczaj trudniej, niż zadania liniowe, gdyż nie ma ogólnej metody ich rozwiązywania;
- często z racji łatwości znalezienia rozwiązania formułujemy liniowe zadania decyzyjne, mimo że wiemy, iż jest to znaczne uproszczenie badanego problemu;

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

2. Własności zadań programowania nieliniowego:

Programowaniem nieliniowym nazywamy zadanie decyzyjne postaci:

$$f(x_1,\dots,x_n)\to \max(\min)$$

$$(1)\quad \begin{cases} g^j(x_1,\dots,x_n)\le c_j \text{ lub } g^j(x_1,\dots,x_n)\ge c_j \quad \text{dla} \quad (j=1,\dots,r); \\ g^j(x_1,\dots,x_n)=c_j \quad \text{dla} \quad (j=r+1,\dots,m); \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\dots x_n\ge 0. \end{cases}$$

gdy funkcja celu $f(X)=f(x_1,\dots,x_n)$ lub chociaż jeden z warunków ograniczających: $g_j(X)=g_j(x_1,\dots,x_n)$ jest **funkcją nieliniową**.

Jeżeli w programowaniu nieliniowym **wszystkie warunki ograniczające** (poza warunkami brzegowymi) są w **postaci równań**, to taką postać nazywamy postacią **kanoniczną**, zaś gdy wszystkie warunki ograniczające są **nierównościami** nazywamy ją postacią **standardową**.

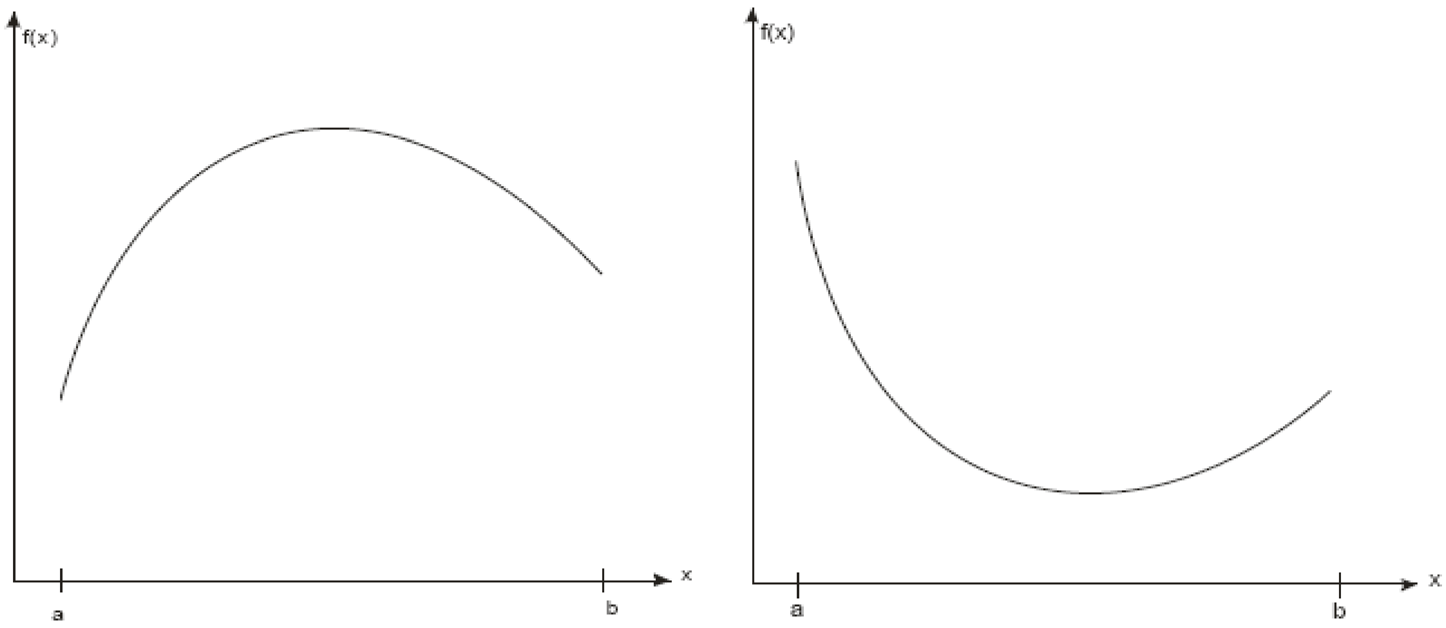
Uwaga: Warunki w postaci nierówności w ogólnej postaci zadania programowania nieliniowego możemy sprowadzić do równości wprowadzając dodatkowe zmienne swobodne (dodając je lub odejmując je do lewych stron nierówności). Tym samym uzyskujemy równoważną postać kanoniczną.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Można wyróżnić dwa podstawowe typy zadań programowania nieliniowego:

- zadania programowania **wypukłego**;
- zadania programowania **niewypukłego**;

Zadanie nieliniowe jest zadaniem **programowania wypukłego**, jeżeli **minimalizujemy wypukłą** lub **maksymalizujemy wklęsłą** funkcję celu, zaś zbiór **rozwiązań dopuszczalnych** jest **obszarem (wielościanem) wypukłym**.
Każde inne zadanie programowania nieliniowego nazywamy zadaniem programowania **niewypukłego**.



a) Funkcja wklęsła b) Funkcja wypukła

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Spośród zadań **programowania wypukłego** szczególne znaczenie mają zadania:

- **programowania kwadratowego** (funkcja celu jest **funkcją kwadratowa**, zaś warunki ograniczające są **postaci liniowej** i tworzą **wielościan wypukły**);

Natomiast spośród zadań **programowania niewypukłego** istotną rolę odgrywają zadania:

- **programowania wklęsłego** (**minimalizujemy wklęsłą**, bądź **maksymalizujemy wypukłą** funkcje celu, zaś zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest **wielościanem wypukłym**).

Identyfikacja typu zadania jest bardzo ważna, gdyż umożliwia określenie stopnia trudności przy poszukiwaniu rozwiązania optymalnego oraz umożliwia wybór odpowiedniej metody rozwiązania. Zadania programowania kwadratowego oraz wklęsłego są takimi typami zadań programowania nieliniowego, które często występują w praktyce i stosunkowo łatwo je rozwiązać.

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

3. Metoda czynników nieoznaczonych Lagrange'a:

Dla prostych zagadnień optymalizacji nieliniowej, z warunkami ograniczającymi w postaci równań (postać kanoniczna) możemy zastosować technikę – **podstawiania i eliminacji zmiennych**.

Dla przykładu rozpatrzmy konsumenta o prostej funkcji użyteczności postaci: $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1$, której dziedzina: $D = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Wyznaczając użyteczności krańcowe otrzymujemy:

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2 + 2 > 0, \text{ gdy} : x_2 \text{ - dodatnie};$$

$$U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1 > 0, \text{ gdy} : x_1 \text{ - dodatnie};$$

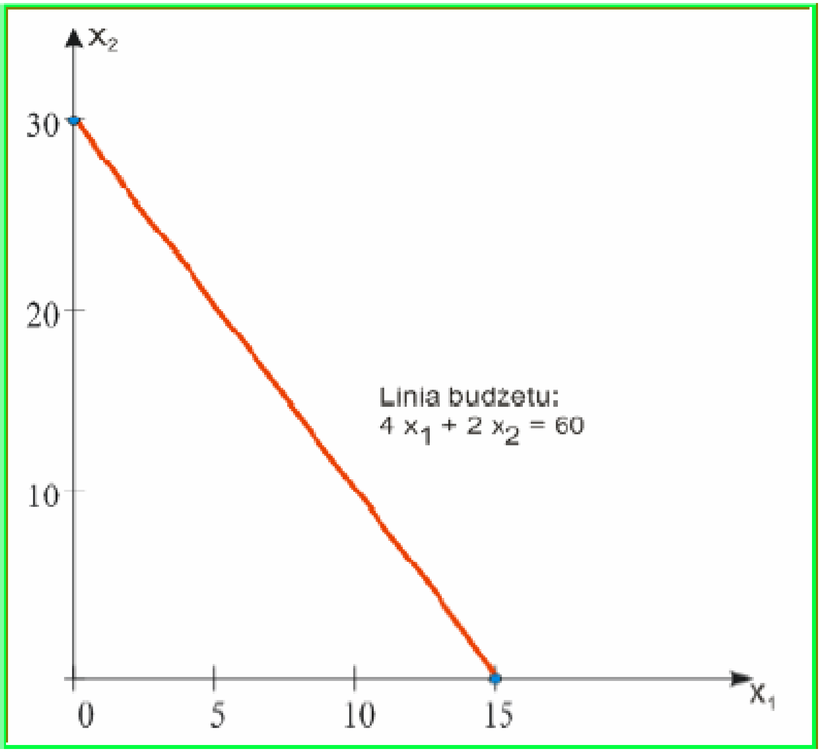
Chcąc zmaksymalizować użyteczność koszyka swoich dóbr bez żadnych ograniczeń, konsument powinien zatem nabywać nieskończone ilości obu dóbr – co w praktycznych rozważaniach nie ma sensu. Aby rozważane zagadnienie optymalizacyjne miało praktyczny sens należy uwzględnić siłę nabywczą konsumenta – czyli siłę nabywczą jego pieniędzy (tzw. ograniczenia budżetowe).

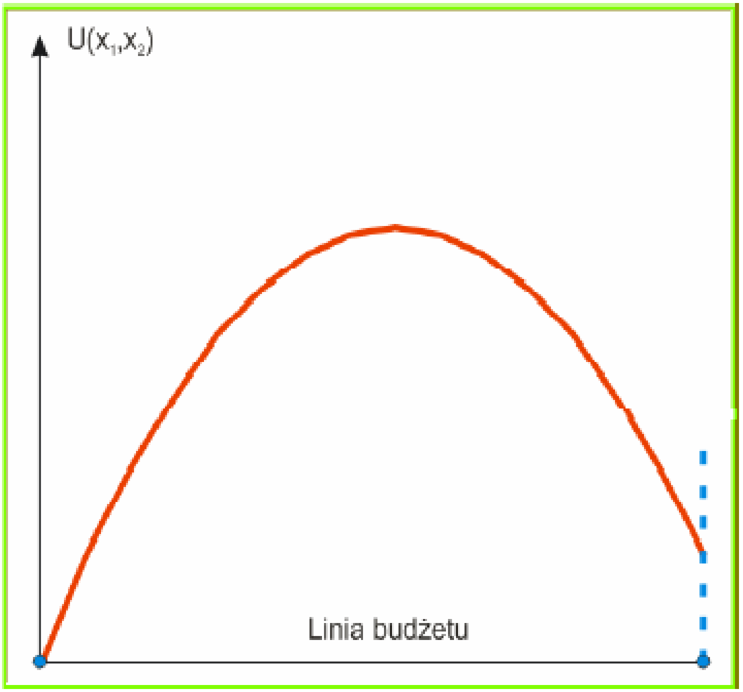
❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Ograniczenie budżetowe: $4x_1 + 2x_2 = 60$ [zł].

Powierzchnia użyteczności :

$$U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1$$





❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Metoda podstawiania i eliminacji zmiennych dla naszego przykładu polega na wyznaczeniu z warunku ograniczającego jednej ze zmiennych jako funkcji drugiej: $4x_1 + 2x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 30 - 2x_1$. Zależność tę możemy powiązać z funkcją celu: $U(x_1) = x_1(30 - 2x_1) + 2x_1 = 32x_1 - 2x_1^2$.

Ponieważ: $\frac{dU}{dx_1} = 32 - 4x_1 \Rightarrow \frac{dU}{dx_1} = 0 \Leftrightarrow x_1^* = 8$, zaś $\frac{d^2U}{dx_1} = -4 < 0$, zatem funkcja celu posiada maksimum w punkcie: $x_1^* = 8$, $x_2^* = 30 - 2x_1^* \Rightarrow x_2^* = 30 - 2 \cdot 8 = 14$.

Wartość tego maksimum wynosi: $U(8{,}14) = 8 \cdot 14 + 2 \cdot 8 = 128$.

Uwaga: zastosowanie tej metody jest ograniczone, gdy liczba warunków ograniczających jest bardzo duża, analityczna postać tych warunków bardzo skomplikowana lub gdy nie można rozwikłać z tych warunków jednej ze zmiennych i przedstawić jej w zależności od pozostałych.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Dla zadań optymalizacji nieliniowej w postaci kanonicznej (warunki ograniczające w postaci równości) możemy w ogólnym przypadku zastosować metodę tzw. czynników nieoznaczonych Lagrange'a. W metodzie tej zamiast poszukiwać ekstremum warunkowego postaci:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max(\min)$$

$$(2) \quad \begin{cases} g^j(x_1,\ldots,x_n) = c_j \ \text{ dla } \ (j=1,\ldots,m); \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0. \end{cases}$$

poszukujemy ekstremum bezwarunkowego dla tzw. funkcji Lagrange'a utworzonej w oparciu o wyjściową funkcje celu f(X) poprzez włączenie do tej funkcji warunków ograniczających z odpowiednimi (sztucznie wprowadzonymi) czynnikami nieoznaczonymi (zakładamy, że m<n).

Dla zadania programowania nieliniowego w postaci kanonicznej (2) funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(X;\lambda) = L(x_1,\ldots,x_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n)\right]$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) jest następujący: zerowanie się pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n) = 0; \ \text{ dla } \ (j=1,\ldots,m); \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \dfrac{\partial g^1}{\partial x_i} - \ldots - \lambda_m \dfrac{\partial g^m}{\partial x_i} = 0; \quad \text{dla} \quad (i=1,2,\ldots,n); \end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) w postaci kanonicznej jest następujący:

$$L = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n) \right]$$ **- Funkcja Lagrange'a (m<n)**

Hesjan obrzeżony

$$|\overline{H}| = \left| \begin{array}{cccc:cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \ldots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \ldots & g_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \ldots & g_n^m \\ \hdashline g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^m & L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{array} \right|$$

gdzie: $g_i^j = \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i}; L_{pq} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_q \partial x_p}$

$|\overline{H}_2|$

Dla maksimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby $|\overline{H}_{m+1}|, |\overline{H}_{m+2}|, \ldots, |\overline{H}_n| = |\overline{H}|$ **zmieniały znak (dla** $|\overline{H}_{m+1}|$ **znak taki jak** $(-1)^{m+1}$ **)**

Dla minimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby miały one ten sam znak (i to taki jak dla $(-1)^m$ **)**