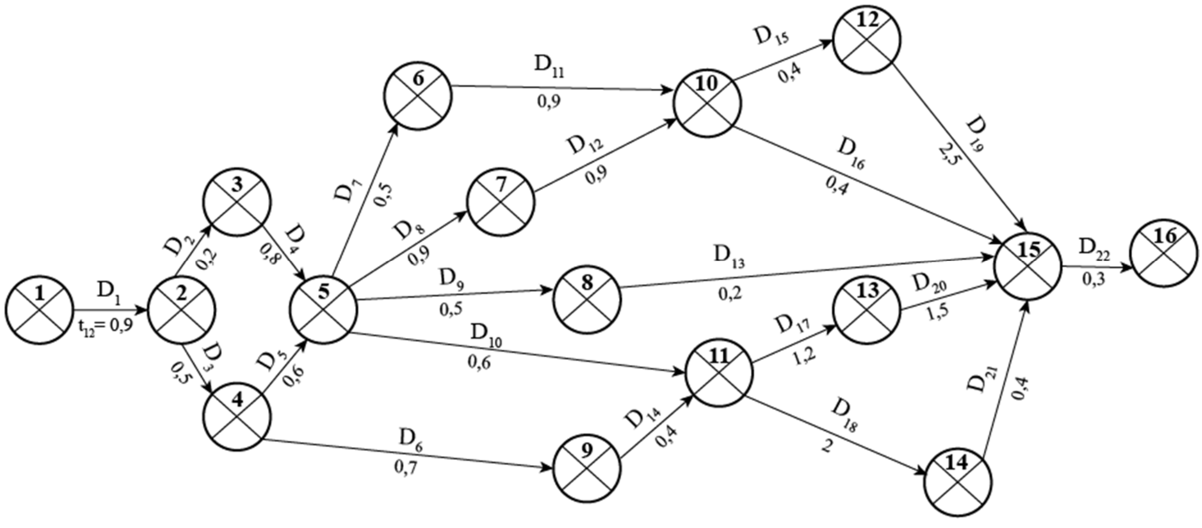
Wybrane metody planowania sieciowego – metoda CPM

Literatura: Badania operacyjne w przykładach i zadaniach (K. Kukuła red.) – rozdział 5.2, str. 182

Przykład. 1. Na rysunku (rys.1) przedstawiono sieć realizacji pewnego przedsięwzięcia (procesu logistycznego) składającego się z 22 czynności: $D_1, D_2, \dots, D_{22}$. Czynności w tym przedsięwzięciu są modelowane w sieci czynności łukami (i,j) – strzałki na modelu sieciowym. Każda czynność jest zatem reprezentowana jako łuk rozpoczynający się w zdarzeniu „i" i kończący się w zdarzeniu „j" tego przedsięwzięcia. Na łukach w modelu sieciowym zilustrowano czasy $t_{ij} \geq 0$ trwania poszczególnych czynności [w godzinach], np. dla czynności (1,2) $t_{12} = 0{,}9\ godziny$. Zdarzenie oznaczone „i=1" w którym zaczyna się realizacja całego procesu jest nazywane zdarzeniem początkowym sieci czynności, zaś zdarzenie „i=16", w którym kończy się realizacja wszystkich czynności nazywane jest zdarzeniem końcowym procesu (przedsięwzięcia).



Rys. 1. Sieć czynności przykładowego procesu (przedsięwzięcia) logistycznego

Każde zdarzenie ilustruje jakiś stan realizacji tego procesu (przedsięwzięcia). Np. w zdarzeniu „i=5" możemy znaleźć się w realizacji przedsięwzięcia, gdy zostanie zakończona czynność D_1 oraz wszystkie czynności na dwóch ścieżkach równoległych ($D_2 - D_4$ oraz $D_3 - D_5$).
Oznaczmy przez:
$V = \{1,2, \dots, n = 16\}$ – zbiór wszystkich zdarzeń w tym przedsięwzięciu.
$U = \{(i,j): i,j \in V\ oraz\ istnieje\ łuk\ łączacy\ \text{"i" z "j"}\} = \{(1,2) = D_1, D_2 = (2,3), \dots, (15,16) = D_{22}\}$ – zbiór czynności
t_{ij} – czas trwania czynności (i,j) [w h].

Dla przedsięwzięcia modelowanego taką deterministyczną siecią czynności (znane deterministyczne wzajemne powiązania pomiędzy poszczególnymi czynnościami, znana kolejność następstwa w czasie tych czynności i zdarzeń) stosując metodę ścieżki krytycznej (CPM – Critical Path Method) wyznaczyć:

a) Najwcześniejsze możliwe terminy realizacji dla zdarzeń tego przedsięwzięcia: T_i^w oraz najwcześniejszy możliwy termin dla zakończenia całego przedsięwzięcia (najwcześniejszy możliwy termin realizacji zdarzenia końcowego i=16).
b) Najpóźniejsze dopuszczalne terminy realizacji dla zdarzeń w tym przedsięwzięciu: T_i^p.
c) Zapasy czasu dla zdarzeń (tzw. luzy czasowe dla zdarzeń): $z(i) = T_i^p - T_i^w$ – o jakie możemy opóźnić realizację poszczególnych zdarzeń w tym przedsięwzięciu, bez niekorzystnych konsekwencji dla przekroczenia (niedotrzymania) terminu realizacji dla całego przedsięwzięcia.
d) Zapasy czasu całkowitego dla czynności w tym przedsięwzięciu: $Z_c(i,j)$ oraz podać ścieżkę krytyczną (bądź ścieżki krytyczne, gdy istnieje więcej) dla tego przedsięwzięcia.
e) Zapasy czasu swobodnego: $Z_s(i,j)$, niezależnego: $Z_n(i,j)$ oraz warunkowego: $Z_w(i,j)$ dla czynności tego przedsięwzięcia.
f) Odpowiedzieć na pytania:
- jak wpłynie na termin realizacji przedsięwzięcia wydłużenie czasu trwania czynności D_{12} (7,10) o 0,5 [h] ?
- jak wpłynie na termin realizacji przedsięwzięcia skrócenie czynności D_{19} (12,15) o 1,7 [h] ?

Rozwiązanie:
Ad. a)
Najwcześniejsze możliwe terminy realizacji dla zdarzeń tego przedsięwzięcia obliczamy następująco:
- Dla zdarzenia początkowego ustalamy termin ten równy zero (początek osi czasu): $T_1^w = 0$.
- Następnie dla kolejnych zdarzeń i=2,3,…,n=16 określamy tzw. zbiór zdarzeń „k” poprzedzających zdarzenie „i” $P_i = \{k: (k,i) \in U\}$, czyli takich zdarzeń dla których istnieje łuk zaczynający się w tym zdarzeniu „k” i kończący się w zdarzeniu „i” (istnieje czynność rozpoczynająca się w „k” i kończąca się w „i”).
- Najwcześniejsze możliwe terminy realizacji dla kolejnych zdarzeń wyznaczamy stosując wzór rekurencyjny: $T_i^w = \max\limits_{k \in P_i}\{T_k^w + t_{ki}\}, i = 2,3, \dots n = 16.$

Obliczenia:

i=2, $P_2 = \{1\}, T_2^w = \max\limits_{k\in\{1\}}\{T_1^w + t_{12}\} = \max\{0 + 0{,}9\} = 0{,}9;$

i=3, $P_3 = \{2\}, T_3^w = \max\limits_{k\in\{2\}}\{T_2^w + t_{23}\} = \max\{0{,}9 + 0{,}2\} = 1{,}1;$

i=4, $P_4 = \{2\}, T_4^w = \max\limits_{k\in\{2\}}\{T_2^w + t_{24}\} = \max\{0{,}9 + 0{,}5\} = 1{,}4;$

i=5, $P_3 = \{3{,}4\}, T_5^w = \max\limits_{k\in\{3,4\}}\{T_3^w + t_{35}; T_4^w + t_{45}\} = \max\{1{,}1 + 0{,}8; 1{,}4 + 0{,}6\} = 2;$

i=6, $P_6 = \{5\}, T_6^w = \max\limits_{k\in\{5\}}\{T_5^w + t_{56}\} = \max\{2 + 0{,}5\} = 2{,}5;$

i=7, $P_7 = \{5\}, T_7^w = \max\limits_{k\in\{5\}}\{T_5^w + t_{57}\} = \max\{2 + 0{,}9\} = 2{,}9;$

i=8, $P_8 = \{5\}, T_8^w = \max\limits_{k\in\{5\}}\{T_5^w + t_{58}\} = \max\{2 + 0{,}5\} = 2{,}5;$

i=9, $P_9 = \{4\}, T_9^w = \max\limits_{k\in\{4\}}\{T_4^w + t_{49}\} = \max\{1{,}4 + 0{,}7\} = 2{,}1;$

i=10, $P_{10} = \{6{,}7\}, T_{10}^w = \max\limits_{k\in\{6,7\}}\{T_6^w + t_{6\,10}; T_7^w + t_{7\,10}\} = \max\{2{,}5 + 0{,}9; 2{,}9 + 0{,}9\} = 3{,}8;$

i=11, $P_{11} = \{5{,}9\}, T_5^w = \max\limits_{k\in\{5,9\}}\{T_{11}^w + t_{5\,11}; T_9^w + t_{9\,11}\} = \max\{2 + 0{,}6; 2{,}1 + 0{,}4\} = 2{,}6;$

i=12, $P_{12} = \{10\}, T_{12}^w = \max\limits_{k\in\{10\}}\{T_{10}^w + t_{10\,12}\} = \max\{3{,}8 + 0{,}4\} = 4{,}2;$

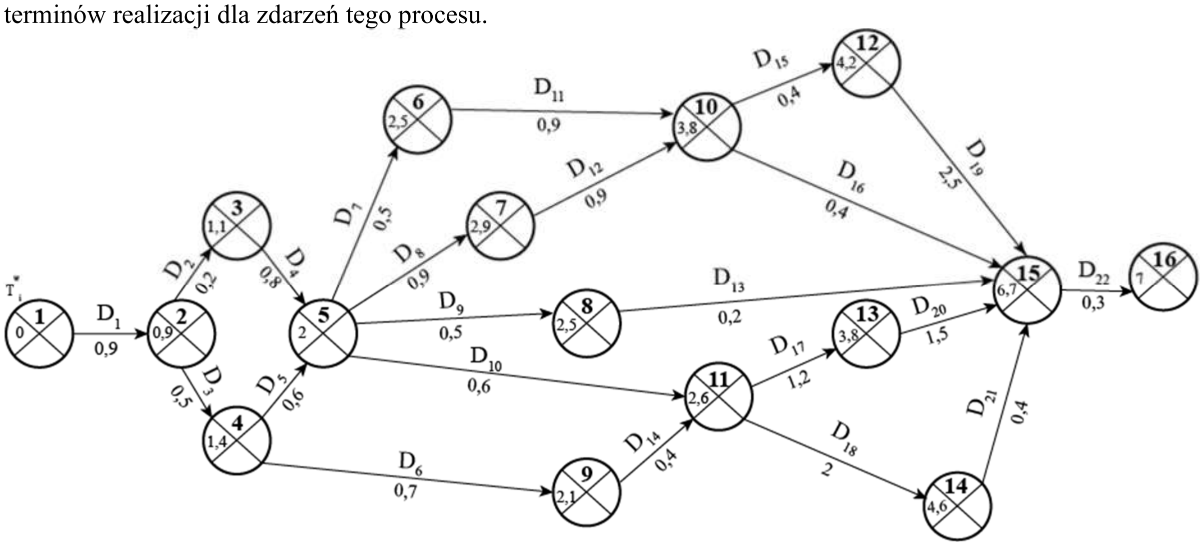
i=13, $P_{13} = \{11\}, T_{13}^w = \max\limits_{k\in\{11\}}\{T_{11}^w + t_{11\,13}\} = \max\{2{,}6 + 1{,}2\} = 3{,}8;$

i=14, $P_{14} = \{11\}, T_{14}^w = \max\limits_{k\in\{11\}}\{T_{11}^w + t_{11\,14}\} = \max\{2{,}6 + 2\} = 4{,}6;$

i=15, $P_{15} = \{8{,}10{,}12{,}13{,}14\}, T_{15}^w = \max\limits_{k\in\{8,10,12,13,14\}}\{T_8^w + t_{8\,15}; T_{10}^w + t_{10\,15}; T_{12}^w + t_{12\,15}; T_{13}^w + t_{13\,15}; T_{14}^w + t_{14\,15}\} = \max\{2{,}5 + 0{,}2; 3{,}8 + 0{,}4; 4{,}2 + 2{,}5; 3{,}8 + 1{,}5; 4{,}6 + 0{,}4\} = 6{,}7;$

i=16, $P_{16} = \{15\}, T_{16}^w = \max\limits_{k\in\{15\}}\{T_{15}^w + t_{15\,16}\} = \max\{6{,}7 + 0{,}3\} = 7.$

Rysunek (rys. 2) przedstawia model sieciowy przedsięwzięcia z wyznaczonymi czasami dla najwcześniejszych terminów realizacji dla zdarzeń tego procesu.



Rys. 2. Model sieciowy z obliczonymi czasami T_i^w dla najwcześniejszych czasów realizacji dla zdarzeń.

Interpretacja praktyczna np. dla czasu $T_{10}^w = 3{,}8\ [h]$ oznacza, że w zdarzeniu i=10 przedsięwzięcia możemy znaleźć się w jego realizacji nie wcześniej niż po czasie 3,8 [h], gdy zakończy się najdłuższa z 4 ścieżek równoległych do niego prowadzących: 1-2-3-5-6-10 lub 1-2-3-5-7-10 lub 1-2-4-5-6-10 oraz 1-2-3-5-7-10, a jest to ścieżka: 1-2-4-5-7-10 (czas trwania jej czynności: 0,9+0,5+0,6+0,9+0,9=3,8 h).
Zatem całe nasze przedsięwzięcie może zakończyć się najwcześniej dopiero po czasie nie krótszym niż 7 [godzin].

Ad. b)

Najpóźniejsze dopuszczalne terminy realizacji dla zdarzeń tego przedsięwzięcia obliczamy następująco:

- Dla zdarzenia końcowego ustalamy termin ten równy terminowi najwcześniejszemu możliwemu (nie możemy mieć poślizgu w zakończeniu całego przedsięwzięcia – najpóźniej i najwcześniej musi skończyć się w tym samym terminie): $T_{n=16}^{p} = T_{n=16}^{w} = 7$.
- Następnie dla kolejnych zdarzeń i=n-1=15,14,…,1 określamy tzw. zbiór zdarzeń „k" następujących po zdarzeniu „i" $N_i = \{k: (i,k) \in U\}$, czyli takich zdarzeń dla których istnieje łuk zaczynający się w tym zdarzeniu „i" oraz kończący się w zdarzeniu „k" (istnieje czynność rozpoczynająca się w „i" i kończąca się w następującym „k").
- Najpóźniejsze dopuszczalne terminy realizacji dla kolejnych zdarzeń wyznaczamy stosując wzór rekurencyjny: $T_i^p = \min_{k\in N_i}\{T_k^p - t_{ik}\}, i = (n-1) = 15,14, \dots 1.$

Obliczenia:

i=15, $N_{15} = \{16\}, T_{15}^p = \min_{k\in\{16\}}\{T_{16}^p - t_{15\,16}\} = \min\{7 - 0{,}3\} = 6{,}7;$

i=14, $N_{14} = \{15\}, T_{14}^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{14\,15}\} = \min\{6{,}7 - 0{,}4\} = 6{,}3;$

i=13, $N_{13} = \{15\}, T_{13}^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{13\,15}\} = \min\{6{,}7 - 1{,}5\} = 5{,}2;$

i=12, $N_{12} = \{15\}, T_{12}^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{12\,15}\} = \min\{6{,}7 - 2{,}5\} = 4{,}2;$

i=11, $N_{11} = \{13{,}14\}, T_{11}^p = \min_{k\in\{13,14\}}\{T_{13}^p - t_{11\,13}; T_{14}^p - t_{11\,14}\} = \min\{5{,}2 - 1{,}2; 6{,}3 - 2\} = 4;$

i=10, $N_{10} = \{12{,}15\}, T_{10}^p = \min_{k\in\{12,15\}}\{T_{12}^p - t_{10\,12}; T_{15}^p - t_{10\,15}\} = \min\{4{,}2 - 0{,}4; 6{,}7 - 0{,}4\} = 3{,}8;$

i=9, $N_9 = \{11\}, T_9^p = \min_{k\in\{11\}}\{T_{11}^p - t_{9\,11}\} = \min\{4 - 0{,}4\} = 3{,}6;$

i=8, $N_8 = \{15\}, T_8^p = \min_{k\in\{15\}}\{T_{15}^p - t_{8\,15}\} = \min\{6{,}7 - 0{,}2\} = 6{,}5;$

i=7, $N_7 = \{10\}, T_7^p = \min_{k\in\{10\}}\{T_{10}^p - t_{7\,10}\} = \min\{3{,}8 - 0{,}9\} = 2{,}9;$

i=6, $N_6 = \{10\}, T_6^p = \min_{k\in\{10\}}\{T_{10}^p - t_{6\,10}\} = \min\{3{,}8 - 0{,}9\} = 2{,}9;$

i=5, $N_5 = \{6{,}7{,}8{,}11\}, T_5^p = \min_{k\in\{6,7,8,11\}}\{T_6^p - t_{5\,6}; T_7^p - t_{5\,7}; T_8^p - t_{5\,8}; T_{11}^p - t_{5\,11}\} = \min\{2{,}9 - 0{,}5; 2{,}9 - 0{,}9; 6{,}5 - 0{,}5; 4 - 0{,}6\} = 2;$

i=4, $N_4 = \{5{,}9\}, T_4^p = \min_{k\in\{5,9\}}\{T_5^p - t_{4\,5}; T_9^p - t_{4\,9}\} = \min\{2 - 0{,}6; 3{,}6 - 0{,}7\} = 1{,}4;$

i=3, $N_3 = \{5\}, T_3^p = \min_{k\in\{5\}}\{T_5^p - t_{3\,5}\} = \min\{2 - 0{,}8\} = 1{,}2;$

i=2, $N_2 = \{3{,}4\}, T_2^p = \min_{k\in\{3,4\}}\{T_3^p - t_{2\,3}; T_4^p - t_{2\,4}\} = \min\{1{,}2 - 0{,}2; 1{,}4 - 0{,}5\} = 0{,}9;$

i=1, $N_1 = \{2\}, T_1^p = \min_{k\in\{2\}}\{T_2^p - t_{1\,2}\} = \min\{0{,}9 - 0{,}9\} = 0;$

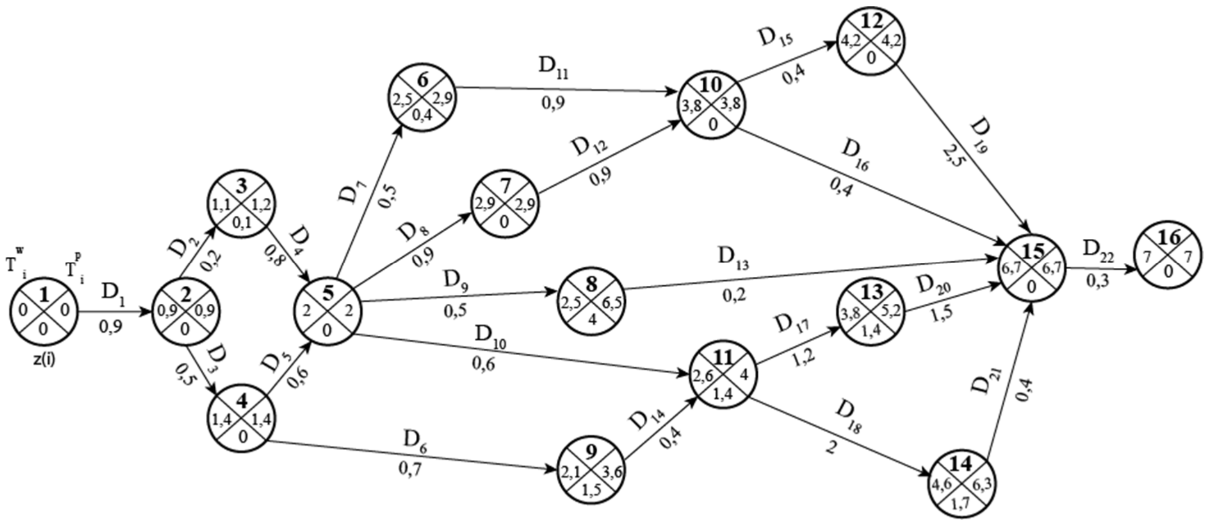
Ad. c)

Zapasy czasu dla czynności obliczymy wyznaczając luzy czasowe ze wzoru $z(i) = T_i^p - T_i^w$.

i	$z(i) = T_i^p - T_i^w$
1	Z(1)=0-0=0
2	Z(2)=0,9-0,9=0
3	Z(3)=1,2-1,1=0,1
4	Z(4)=1,4-1,4=0
5	Z(5)=2-2=0
6	Z(6)=2,9-2,5=0,4
7	Z(7)=2,9-2,9=0
8	Z(8)=6,5-2,5=4
9	Z(9)=3,6-2,1=1,5
10	Z(10)=3,8-3,8=0
11	Z(11)=4-2,6=1,4
12	Z(12)=4,2-4,2=0
13	Z(13)=5,2-3,8=1,4
14	Z(14)=6,3-4,6=1,7
15	Z(15)=6,7-6,7=0
16	Z(16)=7-7=0

Zauważmy, że największy luz czasowy ma zdarzenie i=8. Możemy pojawić się w nim w realizacji przedsięwzięcia po czasie najwcześniej 2,5 [h] ale możemy opóźnić (wydłużyć) ten termin nawet do 6,5 [h] (o luz zapas 4 [h]), a i tak nie wpłynie to na zwiększenie czasu realizacji przedsięwzięcia wynoszącego 7 [h].

Rysunek (rys. 3) przedstawia model sieciowy przedsięwzięcia z wyznaczonymi czasami dla najwcześniejszych oraz najpóźniejszych terminów realizacji dla zdarzeń tego procesu a także luzy czasowe dla zdarzeń.



Rys. 3. Model sieciowy z obliczonymi czasami: T_i^w dla najwcześniejszych czasów realizacji dla zdarzeń, terminów najpóźniejszych dopuszczalnych: T_i^p oraz z luzami czasowymi: $z(i)$.

Ad. d)

Zapasy czasu całkowitego (maksymalnego) dla poszczególnych czynności wyznaczamy ze wzoru:

$$Z_c(i,j) = T_j^p - T_i^w - t_{ij}$$

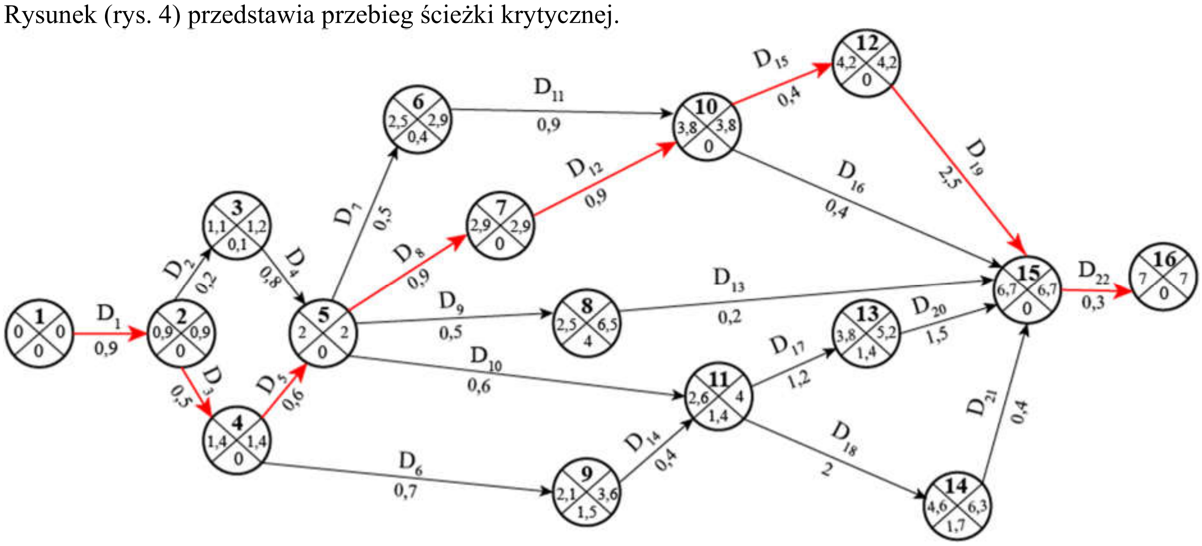
Zatem zapasy czasu całkowitego dla poszczególnych czynności wynoszą:

Czynność (i,j)	Zapas całkowity $Z_c(i,j) =$	Czy czynność krytyczna
$D_1 = (1,2)$	$Z_c(1,2) = 0,9 - 0 - 0,9 = 0$	Tak
$D_2 = (2,3)$	$Z_c(2,3) = 1,2 - 0,9 - 0,2 = 0,1$	Nie
$D_3 = (2,4)$	$Z_c(2,4) = 1,4 - 0,9 - 0,5 = 0$	Tak
$D_4 = (3,5)$	$Z_c(3,5) = 2 - 1,1 - 0,8 = 0,1$	Nie
$D_5 = (4,5)$	$Z_c(4,5) = 2 - 1,4 - 0,6 = 0$	Tak
$D_6 = (4,9)$	$Z_c(4,9) = 3,6 - 1,4 - 0,7 = 1,5$	Nie
$D_7 = (5,6)$	$Z_c(5,6) = 2,9 - 2 - 0,5 = 0,4$	Nie
$D_8 = (5,7)$	$Z_c(5,7) = 2,9 - 2 - 0,9 = 0$	Tak
$D_9 = (5,8)$	$Z_c(5,8) = 6,5 - 2 - 0,5 = 4$	Nie
$D_{10} = (5,11)$	$Z_c(5,11) = 4 - 2 - 0,6 = 1,4$	Nie
$D_{11} = (6,10)$	$Z_c(6,10) = 3,8 - 2,5 - 0,9 = 0,4$	Nie
$D_{12} = (7,10)$	$Z_c(7,10) = 3,8 - 2,9 - 0,9 = 0$	Tak
$D_{13} = (8,15)$	$Z_c(8,15) = 6,7 - 2,5 - 0,2 = 4$	Nie
$D_{14} = (9,11)$	$Z_c(9,11) = 4 - 2,1 - 0,4 = 1,5$	Nie
$D_{15} = (10,12)$	$Z_c(10,12) = 4,2 - 3,8 - 0,4 = 0$	Tak
$D_{16} = (10,15)$	$Z_c(10,15) = 6,7 - 3,8 - 0,4 = 2,5$	Nie
$D_{17} = (11,13)$	$Z_c(11,13) = 5,2 - 2,6 - 1,2 = 1,4$	Nie
$D_{18} = (11,14)$	$Z_c(11,14) = 6,3 - 2,6 - 2 = 1,7$	Nie
$D_{19} = (12,15)$	$Z_c(12,15) = 6,7 - 4,2 - 2,5 = 0$	Tak
$D_{20} = (13,15)$	$Z_c(13,15) = 6,7 - 3,8 - 1,5 = 1,4$	Nie
$D_{21} = (14,15)$	$Z_c(14,15) = 6,7 - 4,6 - 0,4 = 1,7$	Nie
$D_{22} = (15,16)$	$Z_c(15,16) = 7 - 6,7 - 0,3 = 0$	Tak

Uwaga: (twierdzenie)
Czynność leży na ścieżce krytycznej (maksymalnej) wtedy i tylko wtedy, gdy zapas całkowity jest równy zero.

Zatem ścieżka krytyczna przechodzi przez zdarzenia: 1-2-4-5-7-10-12-15-16, lub co na jedno wychodzi przez czynności: $D_1 - D_3 - D_5 - D_8 - D_{12} - D_{15} - D_{19} - D_{22}$.
Suma czasów przejścia przez tą ścieżkę jest równa dla terminu zakończenia przedsięwzięcia 7 [h]

Rysunek (rys. 4) przedstawia przebieg ścieżki krytycznej.



Rys. 4. Pełny model sieciowy wraz ze ścieżką krytyczną.

Ad. e)
Możemy wyznaczyć także inne zapasy czasu takie jak: zapas swobodny: $Z_s(i,j)$, zapas warunkowy: $Z_w(i,j)$ oraz zapas niezależny: $Z_n(i,j)$ dla czynności tego przedsięwzięcia – jednak zapas całkowity jest największym zapasem czasu jaki mamy dla poszczególnych czynności.

Zapas swobodny (wolny) czasu dla poszczególnych czynności wyznaczamy ze wzoru:
$Z_s(i,j) = T_j^w - T_i^w - t_{ij}$

Zapas warunkowy czasu dla poszczególnych czynności wyznaczamy jako różnicę zapasu czasu całkowitego oraz swobodnego ze wzoru:
$Z_w(i,j) = Z_c(i,j) - Z_s(i,j) = T_j^p - T_j^w$ – a więc jest on luzem czasowym w zdarzeniu kończącym tą czynność.

Natomiast zapas niezależny wyznaczamy ze wzoru:
$Z_n(i,j) = \max\{0; T_j^w - T_i^p - t_{ij}\}$

Zapasy czasu całkowitego i swobodnego dla poszczególnych czynności: (**uwaga: zapas warunkowy i niezależny obliczyć samodzielnie**)

Czynność (i,j)	Zapas całkowity $Z_c(i,j) =$	Zapas swobodny (wolny) $Z_s(i,j) =$
$D_1 = (1,2)$	$Z_c(1,2) = 0,9 - 0 - 0,9 = 0$	$Z_s(1,2) = 0,9 - 0 - 0,9 = 0$
$D_2 = (2,3)$	$Z_c(2,3) = 1,2 - 0,9 - 0,2 = 0,1$	$Z_s(2,3) = 1,1 - 0,9 - 0,2 = 0$
$D_3 = (2,4)$	$Z_c(2,4) = 1,4 - 0,9 - 0,5 = 0$	$Z_s(2,4) = 1,4 - 0,9 - 0,5 = 0$
$D_4 = (3,5)$	$Z_c(3,5) = 2 - 1,1 - 0,8 = 0,1$	$Z_s(3,5) = 2 - 1,1 - 0,8 = 0,1$
$D_5 = (4,5)$	$Z_c(4,5) = 2 - 1,4 - 0,6 = 0$	$Z_s(4,5) = 2 - 1,4 - 0,6 = 0$
$D_6 = (4,9)$	$Z_c(4,9) = 3,6 - 1,4 - 0,7 = 1,5$	$Z_s(4,9) = 2,1 - 1,4 - 0,7 = 0$
$D_7 = (5,6)$	$Z_c(5,6) = 2,9 - 2 - 0,5 = 0,4$	$Z_s(5,6) = 2,5 - 2 - 0,5 = 0$
$D_8 = (5,7)$	$Z_c(5,7) = 2,9 - 2 - 0,9 = 0$	$Z_s(5,7) = 2,9 - 2 - 0,9 = 0$
$D_9 = (5,8)$	$Z_c(5,8) = 6,5 - 2 - 0,5 = 4$	$Z_s(5,8) = 2,5 - 2 - 0,5 = 0$
$D_{10} = (5,11)$	$Z_c(5,11) = 4 - 2 - 0,6 = 1,4$	$Z_s(5,11) = 2,6 - 2 - 0,6 = 0$

$D_{11} = (6{,}10)$	$Z_c(6{,}10) = 3{,}8 - 2{,}5 - 0{,}9 = 0{,}4$	$Z_s(6{,}10) = 3{,}8 - 2{,}5 - 0{,}9 = 0{,}4$
$D_{12} = (7{,}10)$	$Z_c(7{,}10) = 3{,}8 - 2{,}9 - 0{,}9 = 0$	$Z_s(7{,}10) = 3{,}8 - 2{,}9 - 0{,}9 = 0$
$D_{13} = (8{,}15)$	$Z_c(8{,}15) = 6{,}7 - 2{,}5 - 0{,}2 = 4$	$Z_s(8{,}15) = 6{,}7 - 2{,}5 - 0{,}2 = 4$
$D_{14} = (9{,}11)$	$Z_c(9{,}11) = 4 - 2{,}1 - 0{,}4 = 1{,}5$	$Z_s(9{,}11) = 2{,}6 - 2{,}1 - 0{,}4 = 0{,}1$
$D_{15} = (10{,}12)$	$Z_c(10{,}12) = 4{,}2 - 3{,}8 - 0{,}4 = 0$	$Z_s(10{,}12) = 4{,}2 - 3{,}8 - 0{,}4 = 0$
$D_{16} = (10{,}15)$	$Z_c(10{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 0{,}4 = 2{,}5$	$Z_s(10{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 0{,}4 = 2{,}5$
$D_{17} = (11{,}13)$	$Z_c(11{,}13) = 5{,}2 - 2{,}6 - 1{,}2 = 1{,}4$	$Z_s(11{,}13) = 3{,}8 - 2{,}6 - 1{,}2 = 0$
$D_{18} = (11{,}14)$	$Z_c(11{,}14) = 6{,}3 - 2{,}6 - 2 = 1{,}7$	$Z_s(11{,}14) = 4{,}6 - 2{,}6 - 2 = 0$
$D_{19} = (12{,}15)$	$Z_c(12{,}15) = 6{,}7 - 4{,}2 - 2{,}5 = 0$	$Z_s(12{,}15) = 6{,}7 - 4{,}2 - 2{,}5 = 0$
$D_{20} = (13{,}15)$	$Z_c(13{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 1{,}5 = 1{,}4$	$Z_s(13{,}15) = 6{,}7 - 3{,}8 - 1{,}5 = 1{,}4$
$D_{21} = (14{,}15)$	$Z_c(14{,}15) = 6{,}7 - 4{,}6 - 0{,}4 = 1{,}7$	$Z_s(14{,}15) = 6{,}7 - 4{,}6 - 0{,}4 = 1{,}7$
$D_{22} = (15{,}16)$	$Z_c(15{,}16) = 7 - 6{,}7 - 0{,}3 = 0$	$Z_s(15{,}16) = 7 - 6{,}7 - 0{,}3 = 0$

Uwaga: widać że: $Z_s(i,j) \leq Z_c(i,j)$

Ad. f)

- jeżeli wydłużymy czas trwania czynności D_{12} (7,10) o 0,5 [h], a jest to czynność leżąca na ścieżce krytycznej, to tym samym termin zakończenia całego przedsięwzięcia ulegnie wydłużeniu o 0,5 [h] czyli wyniesie 7,5 [h].

- jeżeli skrócimy czynność D_{19} (12,15) o 1,7 [h], czyli jej czas realizacji wyniesie $t_{12\ 15} = 0{,}8$, to w zdarzeniu i=15 najwcześniej w realizacji będziemy mogli znaleźć się po czasie 5,3 [h], a tym samym w zdarzeniu (i=16) po czasie 5,6 [h]. Zatem czas realizacji przedsięwzięcia skróci się 1,4 [h]. Powstanie oczywiście nowa ścieżka krytyczna: 1-2-4-5-11-13-15-16.

Przykład 2. Firma zajmująca się dystrybucją produktów spożywczych realizuje zamówienia zgłaszane bezpośrednio przez sklepy. Ze względu na wysokie koszty siły roboczej właściciel zdecydował się na automatyzację pracy i instalację komputerowego systemu zamówień. Po konsultacjach z dostawcami, własnym personelem i projektantem systemu została sporządzona lista czynności niezbędnych do realizacji takiego projektu (zob. tabela):

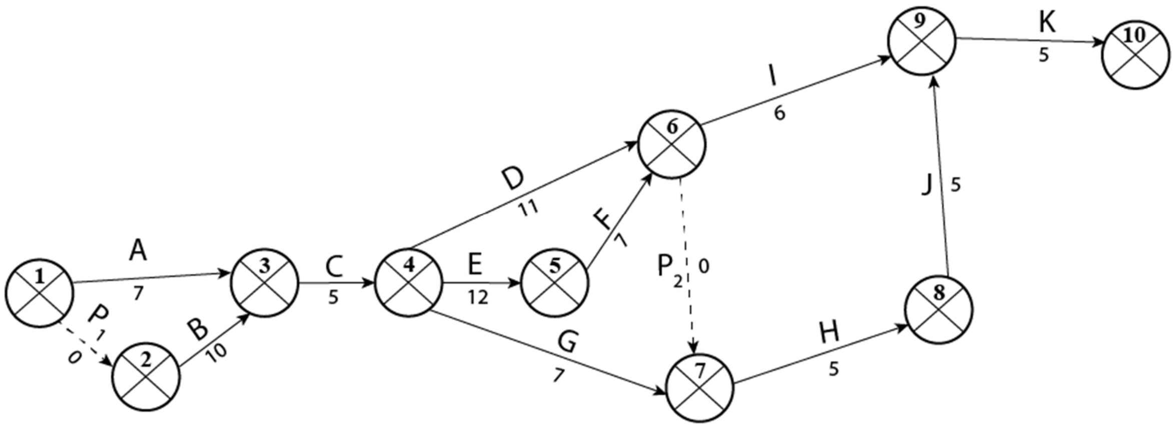
Czynność	Opis czynności	Czynności poprzedzające	Czas trwania [tygodnie]
A	Określenie potrzeb	-	7
B	Propozycje systemów	-	10
C	Wybór systemu	A, B	5
D	Zamówienie systemu	C	11
E	Projekt wnętrza	C	12
F	Realizacja projektu wnętrza	E	7
G	Projekt interfejsu komputera	C	7
H	Instalacja komputerowa	D, F, G	5
I	Instalacja systemu	D, F	6
J	Szkolenie operatorów	H	5
K	Testowanie całego systemu	I, J	5

Na podstawie tych informacji należy:

a) narysować sieć czynności dla rozpatrywanego projektu,
b) w jakim terminie jest możliwe zakończenie prac nad realizacją projektu,
c) wyznaczyć ścieżkę krytyczną dla projektu,
d) które czynności mają największy zapas czasu ?
e) odpowiedzieć na pytania:
   - jak wpłynie na termin projektu wydłużenie czynności „I” o 3 tygodnie ?
   - jak wpłynie na termin projektu skrócenie czynności „C” do 3 tygodni oraz czynności „J” o 1 tydzień ?
   - o ile można maksymalnie wydłużyć czynność „D” przedsięwzięcia, aby przy jednoczesnym wydłużeniu czynności „A” o 3 tygodnie zrealizować projekt w oszacowanym terminie ?

Ad a)

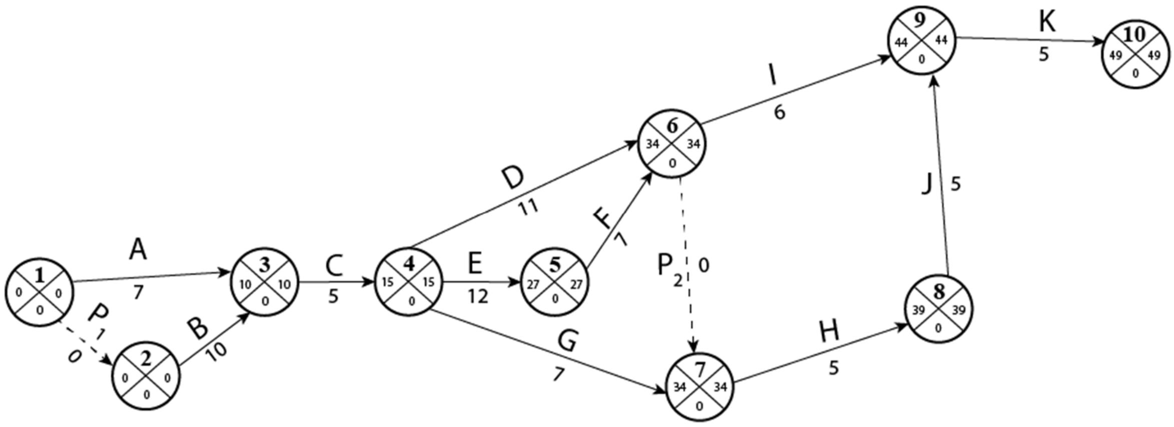
Aby poprawnie narysować model sieciowy tego przedsięwzięcia musimy użyć 2 czynności pozornych o czasach realizacji 0, aby pokazać poprawnie następstwo w czasie poszczególnych czynności. Ponieważ np. czynności „A” i „B” mogą być wykonywane równolegle i są poprzedzające do czynności „C”, a nie możemy ich narysować równolegle tj. zaczynających się i kończących w tym samym wierzchołku, zatem musimy użyć tzw. zależności czasowej (czynności pozornej „P1” o czasie trwania 0), aby obie czynności równoległe zaczynały się w różnych zdarzeniach, a kończyły w tym samym (i=3) – zob. rys. 5.



Rys. 5. Model sieciowy – z poprawnymi zależnościami czasowymi do przykładu 2.

Ad. b)

Wyznaczamy czasy najwcześniejsze możliwe oraz najpóźniejsze dopuszczalne dla zdarzeń (podobnie jak w przykładzie 1). Obliczone czasy na modelu oraz luzy czasowe dla zdarzeń przedstawia rysunek 6.



Rys. 6. Model sieciowy – z poprawnymi zależnościami czasowymi do przykładu 2.

Przedsięwzięcie może zakończyć się najwcześniej po upływie 49 tygodni.

Ad. c) d)

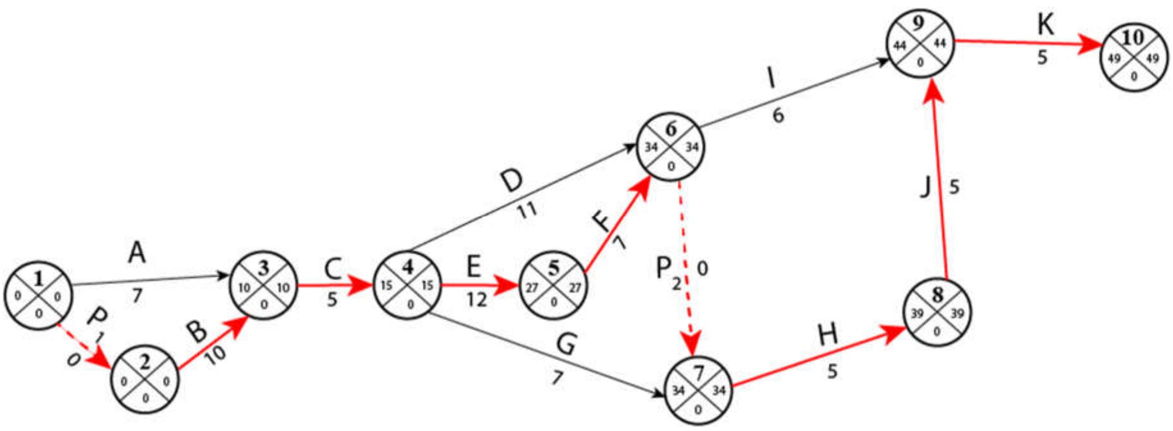
Obliczenie zapasów czasu całkowitego

Uwaga: zapasy czasu swobodnego, warunkowego i niezależnego – obliczyć samodzielnie !!!

Czynność (i,j)	Zapas całkowity $Z_c(i,j) =$
$A = (1,3)$	$Z_c(1,3) = 10 - 0 - 7 = 3$
$P_1 = (1,2)$	$Z_c(1,2) = 0 - 0 - 0 = 0$
$B = (2,3)$	$Z_c(2,3) = 10 - 0 - 10 = 0$
$C = (3,4)$	$Z_c(3,4) = 15 - 10 - 5 = 0$
$D = (4,6)$	$Z_c(4,6) = 34 - 15 - 11 = 8$
$E = (4,5)$	$Z_c(4,5) = 27 - 15 - 12 = 0$
$F = (5,6)$	$Z_c(5,6) = 34 - 27 - 7 = 0$
$G = (4,7)$	$Z_c(4,7) = 34 - 15 - 7 = 12$
$P_2 = (6,7)$	$Z_c(6,7) = 34 - 34 - 0 = 0$
$H = (7,8)$	$Z_c(7,8) = 39 - 34 - 5 = 0$
$I = (6,9)$	$Z_c(6,9) = 44 - 34 - 6 = 4$
$J = (8,9)$	$Z_c(8,9) = 44 - 39 - 5 = 0$
$K = (9,10)$	$Z_c(9,10) = 49 - 44 - 5 = 0$

Dlatego ścieżka krytyczna jest następująca: P_1-B-C-E-F-P_2-H-J-K

Największy zapas czasu całkowitego maja czynności: „G" – 12 tygodni, „D" – 8 tygodni oraz „I" – 4 tygodnie, a także „A" – 3 tygodnie.



Rys. 7. Model sieciowy – wraz ze ścieżką krytyczną dla przykładu 2.

Ad. e)

- jeżeli czynność „I" wydłużymy o 3 tygodnie, to czas realizacji projektu nie ulegnie zmianie.

- jeżeli skrócimy czynność „C" do 3 tygodni oraz czynności „J" o 1 tydzień, to czas realizacji przedsięwzięcia skróci się o 3 tygodnie (do 46 tygodni)

- można maksymalnie wydłużyć czynność „D" przedsięwzięcia o 8 tygodni, aby przy jednoczesnym wydłużeniu czynności „A" o 3 tygodnie zrealizować projekt w oszacowanym terminie

Uwaga: analizę tych faktów – pozostawiam Państwu do samodzielnych przemyśleń !!!