WIELOKRYTERIALNE ZAGADNIENIA OPTYMALIZACYJNE

❑ PLAN PREZENTACJI WYKŁADU

1. Wprowadzenie do zagadnień wielokryterialnych.
2. Budowa rankingu obiektów w świetle ocen wielokryterialnych.
3. Metody wielokryterialnego programowania liniowego:
   - przykład wielokryterialnego problemu decyzyjnego,
   - zbieżność kryteriów w zagadnieniach wielokryterialnych,
   - optimum w sensie Pareto (rozwiązanie sprawne),

❑ PLAN PREZENTACJI WYKŁADU

Metody wielokryterialnego programowania liniowego c-d:

- wybrane metody wyznaczania rozwiązań optymalnych w sensie Pareto (sprawnych),

  - metakryterium: liniowa kombinacja wypukła kryteriów,
  - metakryterium: minimalizacja odchyleń kryteriów,
  - hierarchizacja kryteriów: (na przykładzie organizacji kampanii reklamowej)

    a) ścisła hierarchizacja kryteriów,

    b) relaksacja hierarchizacji celów (quasi-hierarchia).

4. Programowanie celowe:

- Określenie strategii długookresowej firmy

❑ WPROWADZENIE

W praktyce zarządzania spotyka się sytuacje, w których różne warianty decyzji ocenia się przy uwzględnieniu wielu kryteriów. Mamy wtedy do czynienia nie z jedną, lecz z wieloma funkcjami celu.

Zagadnienia optymalizacyjne, w których występuje więcej niż jedna funkcja celu nazywamy zadaniami programowania wielokryterialnego.

Przykładem tego typu zagadnień optymalizacyjnych może być:

- dwukryterialne zadanie transportowe,
- dwukryterialne zagadnienie produkcyjne itp.

WPROWADZENIE

Rozwiązanie problemów decyzyjnych z wieloma kryteriami wyboru może odbywać się poprzez:

- agregację kryteriów decyzyjnych, w wyniku której otrzymuje się zadanie z jednym syntetycznym kryterium (metakryterium),
- zastosowanie odpowiedniej hierarchii kryteriów,
- zastosowanie specjalnych metod programowania wielokryterialnego, które uwzględniają mnogość funkcji celu (np. dla różnorodnych dyskretnych zadań wielokryterialnych – zob. Trzaskalik [1]).

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Podstawowe pojęcia

Zjawisko złożone – pewien abstrakcyjny twór związany ze stanem jakościowym rzeczywistych obiektów opisany przez co najmniej dwie cechy (diagnostyczne).

Przykładowe zjawiska złożone:

- poziom rozwoju społeczno-gospodarczego,
- atrakcyjność rynkowa produktów,
- konkurencyjność techniczno-ekonomiczna wyrobów,
- jakość kadry zarządzającej, itp.

Porównanie różnych obiektów w zakresie zjawisk złożonych umożliwia konstrukcja ich rankingu.

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Ranking obiektów – układ, w którym obiekty są uporządkowane nierosnąco ze względu na wartości zmiennej syntetycznej (agregatowej).

Zmienna agregatowa – charakteryzuje obiekty ze względu na oceniane zjawisko złożone; powstaje w wyniku agregacji (najczęściej sumowania) unormowanych zmiennych diagnostycznych.

Unormowane zmienne diagnostyczne – powstają w wyniku przekształcenia (unormowania) oryginalnych cech diagnostycznych (pozbawienie mian, porównywalność rzędu wielkości).

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Przykład: Budowa rankingu obiektów. Agregacja kryteriów decyzyjnych przy pomocy **metody unitaryzacji zerowej (MUZ)**.

Możliwych jest 5 różnych wariantów budowy pewnego zakładu produkcyjnego. Warianty te zostały scharakteryzowane za pomocą czterech cech:

X_1 – koszt inwestycji [tys. zł],
X_2 – docelowa roczna zdolność produkcyjna [tys. sztuk],
X_3 – czas wykonania zadania inwestycyjnego [miesiące],
X_4 – przewidywany roczny poziom emisji zanieczyszczeń ze zrealizowanego obiektu [tony].

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Oszacowane wartości wymienionych charakterystyk wariantów przedsięwzięcia podano w tabeli.

Zbudować ranking wariantów (wybrać najlepszy wariant).

Warianty	Cechy (zmienne diagnostyczne)			
	X_1	X_2	X_3	X_4
W1	253	18,3	24	13,1
W2	178	16,8	18	12,2
W3	244	24,6	26	18,4
W4	174	16,4	25	15,8
W5	196	17,7	20	16,7
max x_{ij}	253	24,6	26	18,4
min x_{ij}	174	16,4	18	12,2

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Rozwiązanie:

1. Rozpoznanie typu zmiennych diagnostycznych.

Stymulanta – większe wartości wskazują na bardziej korzystny wariant.

Destymulanta – mniejsze wartości oznaczają bardziej korzystny wariant.

Nominanta – ma określoną, najkorzystniejszą wartość (nominalną) lub przedział takich wartości.

Stymulanta: X_2

Destymulanty: X_1, X_3, X_4

Nominant - brak

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

2. Normowanie zmiennych diagnostycznych (MUZ).

Z_j – unormowana j-ta zmienna diagnostyczna.
z_{ij} – i-ta wartość unormowanej j-ej zmiennej diagnostycznej.

Dla stymulant:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}} \qquad (1)$$

Dla destymulant:

$$z_{ij} = \frac{\max_i x_{ij} - x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}} \qquad (2)$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Dla nominant:

$$z_{ij}=\begin{cases}\dfrac{x_{ij}-\min\limits_i x_{ij}}{c_{1j}-\min\limits_i x_{ij}}, & \text{gdy} \quad x_{ij}<c_{1j},\\ 1, & \text{gdy} \quad c_{1j}\le x_{ij}\le c_{2j},\\ \dfrac{x_{ij}-\max\limits_i x_{ij}}{c_{2j}-\max\limits_i x_{ij}}, & \text{gdy} \quad x_{ij}>c_{2j},\end{cases} \qquad (3)$$

gdzie: $[c_{1j}, c_{2j}]$ – przedział wartości nominalnych

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Normowanie zmiennej X_1 – destymulanty (wzór 2). Podobnie normujemy zmienne X_3, X_4

$$z_{11} = \frac{253-253}{253-174} = \frac{0}{79} = 0;$$

$$z_{21} = \frac{253-178}{253-174} = \frac{75}{79} = 0{,}949;$$

$$z_{31} = \frac{253-244}{253-174} = \frac{9}{79} = 0{,}114;$$

$$z_{41} = \frac{253-174}{253-174} = \frac{79}{79} = 1;$$

$$z_{51} = \frac{253-196}{253-174} = \frac{57}{79} = 0{,}722.$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Normowanie zmiennej X_2 – stymulanty (wzór 1)

$$z_{12} = \frac{18{,}3 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{1{,}9}{8{,}2} = 0{,}232;$$

$$z_{22} = \frac{16{,}8 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{0{,}4}{8{,}2} = 0{,}049;$$

$$z_{32} = \frac{24{,}6 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{8{,}2}{8{,}2} = 1;$$

$$z_{42} = \frac{16{,}4 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{0}{8{,}2} = 0;$$

$$z_{52} = \frac{17{,}7 - 16{,}4}{24{,}6 - 16{,}4} = \frac{1{,}3}{8{,}2} = 0{,}159.$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Wyniki normowania przedstawione są w tabeli.

Warianty	Unormowane zmienne diagnostyczne				Q_i
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	
W1	0	0,232	0,250	0,855	1,337
W2	0,949	0,049	1	1	2,998
W3	0,114	1	0	0	1,114
W4	1	0	0,125	0,419	1,544
W5	0,722	0,159	0,750	0,274	1,905

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

3. Obliczenie wartości zmiennej agregatowej (syntetycznej) dla każdego obiektu (wariantu) i budowa rankingu obiektów.

Q – zmienna agregatowa (syntetyczna), będąca łączną wielokryterialną oceną każdego z obiektów.
Q_i – wartość zmiennej agregatowej przypisana i-temu obiektowi.

$$Q_i = \sum_j z_{ij} \qquad (4)$$

❑ BUDOWA RANKINGU OBIEKTÓW W ŚWIETLE OCEN WIELOKRYTERIALNYCH

Ranking wariantów budowy:

Miejsce w rankingu	Wariant	Q_i
1	W_2	2,998
2	W_5	1,905
3	W_4	1,544
4	W_1	1,337
5	W_3	1,114

Najlepszym wariantem jest W_2.

LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE - przykład

Przykład:

Firma produkuje dwa wyroby W1 i W2. Dysponuje surowcami S1, S2, S3 w ograniczonych ilościach, odpowiednio 24 tys. jedn., 14 tys. jedn. i 12 tys. jedn. Jednostkowe zużycie poszczególnych surowców przy produkcji wyrobów podano w tabeli. Ceny wyrobów W1 i W2 wynoszą odpowiednio 3 zł i 2 zł za sztukę.

Ustalić plan produkcji, który z jednej strony maksymalizuje przychody ze sprzedaży wyrobów, a z drugiej strony maksymalizuje wielkość produkcji wyrobu W2.

Wyroby	Jednostkowe zużycie surowców		
	S1	S2	S3
W1	3	1	2
W2	3	2	1

LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE - przykład

Model matematyczny

x_1 – wielkość produkcji wyrobu W1 (w tys. sztuk),

x_2 – wielkość produkcji wyrobu W2 (w tys. sztuk) (= K_2),

K_1 – przychód ze sprzedaży wyrobów (w tys. zł).

$$K_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \le 24,\\
&(2) \quad x_1 + 2x_2 \le 14,\\
&(3) \quad 2x_1 + x_2 \le 12,\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – zbieżność kryteriów

Ze względu na zbieżność kryteriów rozróżniamy 3 przypadki:

- kryteria K_1 i K_2 są zgodne, gdy:

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \le K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \le K_2(\bar{x}_2);$$

- kryteria K_1 i K_2 nie są zgodne, gdy:

$$\exists \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \le K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \ge K_2(\bar{x}_2);$$

- kryteria K_1 i K_2 są przeciwstawne, gdy:

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D : K_1(\bar{x}_1) \le K_1(\bar{x}_2) \Rightarrow K_2(\bar{x}_1) \ge K_2(\bar{x}_2);$$

gdzie:

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ – decyzje dopuszczalne,

D – zbiór decyzji dopuszczalnych.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – zbieżność kryteriów

$$K_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

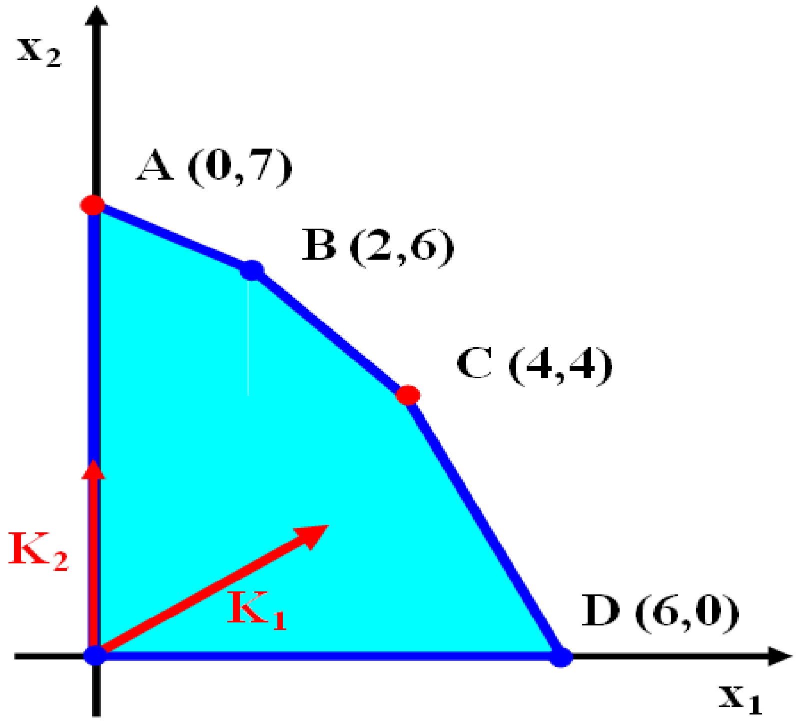
$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 + 3x_2 \le 24, \\ (2) & x_1 + 2x_2 \le 14, \\ (3) & 2x_1 + x_2 \le 12, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Rozwiązanie optymalne: C(4,4).
$K_1^0 = K_1(C) = 20$.

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 + 3x_2 \le 24, \\ (2) & x_1 + 2x_2 \le 14, \\ (3) & 2x_1 + x_2 \le 12, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Rozwiązanie optymalne: A(0,7).
$K_2^0 = K_2(A) = 7$.



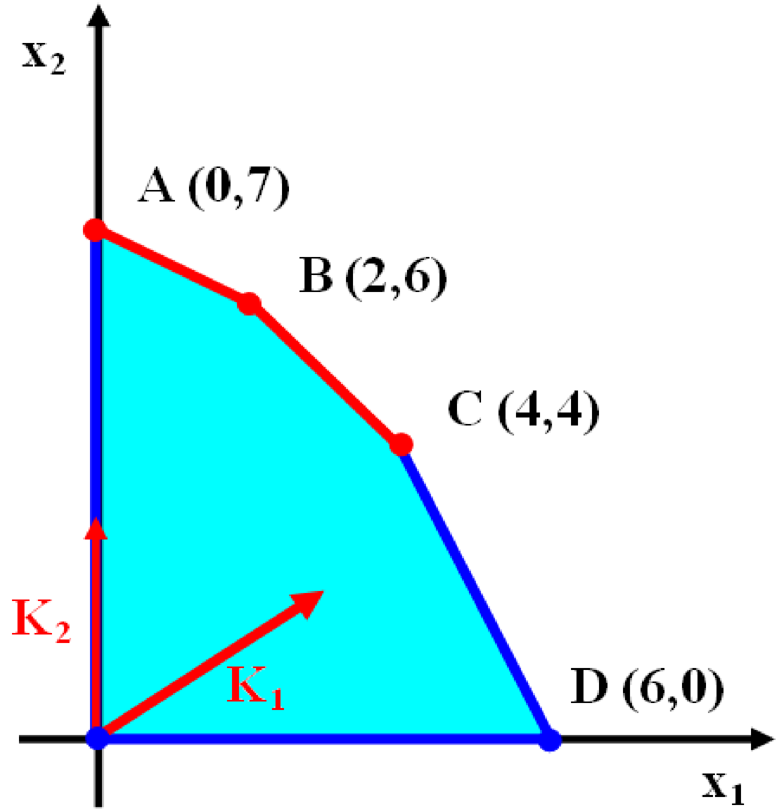
W przykladzie kryteria K_1 i K_2 nie są zgodne gdyż:
$K_1(A)=14<K_1(D)=18$, zaś $K_2(A)=7>K_2(D)=0$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – optimum w sensie PARETO

Rozwiązanie: $\bar{x}^* \in D$ nazywamy **optymalnym w sensie PARETO (sprawnym)**, jeżeli w zbiorze decyzji dopuszczalnych D nie istnieje taka decyzja $\bar{x}$, że dla każdego i = 1,2,...,n:

$$K_i(\bar{x}) \geq K_i(\bar{x}^*),$$

i co najmniej dla jednego kryterium warunek ten jest spełniony z nierównością ostrą.



❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

METAKRYTERIUM – LINIOWA KOMBINACJA WYPUKŁA KRYTERIÓW

Przy konstrukcji metakryterium w postaci liniowej kombinacji wypukłej należy:

- zapewnić wykonywalność operacji matematycznych (uwaga na jednostki!),
- wyeliminować efekty skali,
- preferencje dotyczące celów uwzględnić w postaci wag.

$$MK(\overline{x}) = \sum_i \alpha_i K_i^*(\overline{x}) \to \max$$

gdzie: α_i – wagi, $\alpha_i > 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$,

$$K_i^*(\overline{x}) = \frac{K_i(\overline{x})}{K_i^0(\overline{x})}, \qquad K_i^0 = \max_{\overline{x} \in D} \{K_i(\overline{x})\}.$$

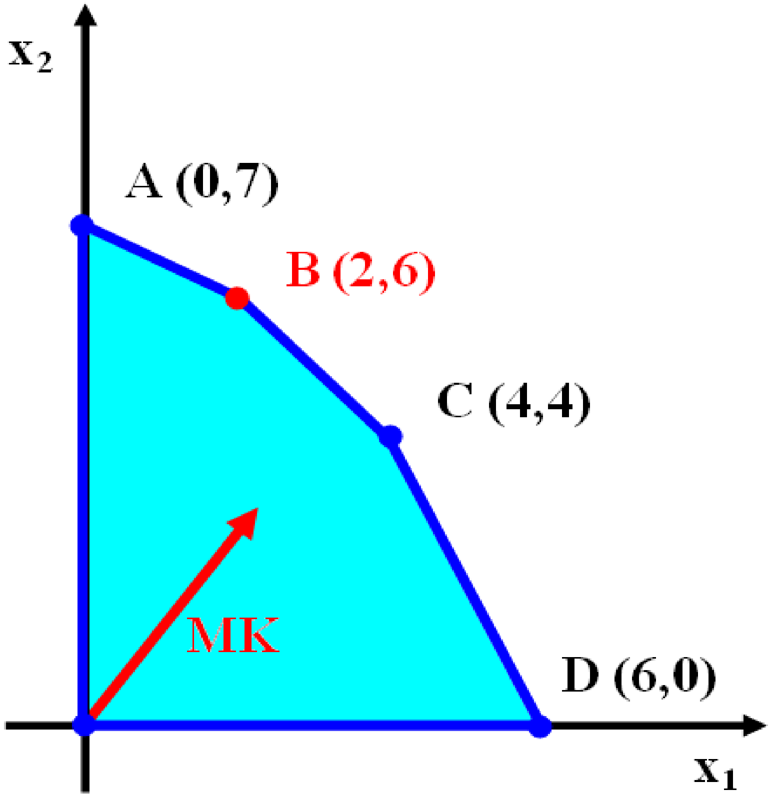
❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

$$MK(x_1, x_2) =$$

$$= 0{,}6 * \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2) + 0{,}4 * \frac{1}{7}x_2 =$$

$$= \frac{1}{700}(63x_1 + 82x_2) \to \max$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 3x_1 + 3x_2 \le 24,\\
&(2) \quad x_1 + 2x_2 \le 14,\\
&(3) \quad 2x_1 + x_2 \le 12,\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$



Rozwiązanie optymalne: B(2,6).

MK(B) = 618/700 = 0,88.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – metody wyznaczania rozwiązań sprawnych

METAKRYTERIUM – MINIMALIZACJA ODCHYLEŃ KRYTERIÓW

Poszukuje się rozwiązania, które minimalizuje odchylenie wszystkich kryteriów od ich wartości optymalnych.

$$MK(u) = u \to \min$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 3x_1 + 3x_2 \le 24, \\
(2) & x_1 + 2x_2 \le 14, \\
(3) & 2x_1 + x_2 \le 12, \\
 & x_1, x_2 \ge 0, \\
(K_1) & 1 - \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2) \le u, \\
(K_2) & 1 - \frac{1}{7}x_2 \le u.
\end{array}
$$

Rozwiązanie optymalne:

F(1,75; 6,125).

MK(F) = 0,125.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Przykład: Organizacja kampanii reklamowej.

Organizowana jest kampania reklamowa, adresowana do ustalonej grupy docelowej. Kampania będzie prowadzona w tygodnikach A, B, C, D i E. Dysponuje sie informacjami dotyczącymi:

Cechy	Tygodnik				
	A	B	C	D	E
cena 1 ogłoszenia [setki zl]	30	28	23	19	18
Prestiż (skala 1-10)	2	1	4	5	3
Jednostkowy zasięg [%]	7.5	7	5.75	4.75	4.5
Jednostkowa częstotliwość czytelnictwa	0.16	0.15	0.12	0.10	0.10

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Organizator kampanii chce, aby jej zasięg był nie mniejszy niż 70[%] (grupy docelowej), natomiast łączna częstotliwość czytelnictwa nie powinna być mniejsza niż 2. Jednocześnie chce (co dla niego jest najważniejsze), aby kampania była możliwie najtańsza i cechowała się najwyższym możliwym prestiżem.

ROZWIĄZANIE:

Zadanie jest dwukryterialnym problemem hierarchicznym.

Gdy potrafimy, ze względu na preferencje podejmującego decyzje, uporządkować liniowo wszystkie kryteria, to możemy zastosować metody hierarchizacji.

Załóżmy, że uporządkowano cele począwszy od najważniejszego: K_1, K_2,..., K_n.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Cel 1: Minimalizacja kosztu kampanii
Cel 2: Maksymalizacja efektu prestiżu

MODEL - ZMIENNE DECYZYJNE:

X_1 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku A
X_2 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku B
X_3 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku C
X_4 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku D
X_5 – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku E

MODEL - FUNKCJE CELU:

$$K_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 30x_1 + 28x_2 + 23x_3 + 19x_4 + 18x_5 \rightarrow \min$$ **(1 CEL)**

$$K_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$ **(2 CEL)**

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

MODEL - WARUNKI OGRANICZAJĄCE

$7,5x_1 + 7x_2 + 5,75x_3 + 4,75x_4 + 4,5x_5 \geq 70$ - **całkowity zasięg**

$0,16x_1 + 0,15x_2 + 0,12x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 \geq 2$ - **całkowita częstotliwość**

MODEL - WARUNKI BRZEGOWE

$0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 4;$

$0 \leq x_4 \leq 4; 0 \leq x_5 \leq 4;$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - **całkowite**

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

ROZWIĄZANIE – ŚCISŁA HIERARCHIZACJA CELÓW

Z hierarchizacją ścisłą (ostrą) mamy do czynienia wtedy, gdy chcemy nade wszystko osiągnąć optymalną wartość najważniejszego kryterium K_1, potem (w miarę możliwości) K_2,..., na końcu (...) K_n.

Idea algorytmu.

1. Rozwiązujemy zadanie PM z pierwszym niezbadanym kryterium.

2. Jeżeli uzyskujemy tylko jedno rozwiązanie optymalne, to jest to rozwiązanie optymalne zadania wielokryterialnego z hierarchizacją ostrą. Koniec.

3. Jeżeli są co najmniej 2 rozwiązania optymalne, to traktujemy je jako zbiór rozwiązań dopuszczalnych i wracamy do punktu 1.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

Dwa rozwiązania optymalne: (dla I poziomu hierarchii)

$$x_1^{(1)} = 3; x_2^{(1)} = 4; x_3^{(1)} = 1; x_4^{(1)} = 4; x_5^{(1)} = 4;$$

$$x_1^{(2)} = 4; x_2^{(2)} = 4; x_3^{(2)} = 3; x_4^{(2)} = 0; x_5^{(2)} = 4;$$

$$K_1\left(\overline{x}^{(1)}\right) = K_1\left(\overline{x}^{(2)}\right) = 373$$

Ponieważ wartość funkcji prestiżu $K_2\left(\overline{x}^{(1)}\right) = 46 > K_2\left(\overline{x}^{(2)}\right) = 36,$

to jako rozwiązanie zadania należy wybrać rozwiązanie (1).

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

ROZWIĄZANIE - RELAKSACJA HIERARCHIZACJI CELÓW (QUASI HIERARCHIA)

W zadaniach wielokryterialnych z relaksacją hierarchizacji celów dąży się do osiągnięcia wartości (prawie) optymalnych przez kolejne (coraz mniej ważne) kryteria. Istotne jest tu spełnienie kryterium w stopniu dostatecznie wysokim.

Algorytm rozwiązywania zadań z relaksacją hierarchizacji celów jest bardzo podobny do poprzedniego, z tym że dodawane są warunki w postaci nierówności.

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Organizacja Kampanii Reklamowej

PIERWSZY POZIOM HIERARCHII – etap obliczeń jak poprzednio.

DRUGI POZIOM HIERARCHII:

Załóżmy, że podejmujący decyzje postanowił zwiększyć kwotę na reklamę z poziomu minimalnego (373 – I poziom hierarchii) o 10[%], czyli maksymalnym akceptowalnym poziomem kosztów będzie wartość 410.

Otrzymujemy zadanie:

$$K_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 \to \max$$

Warunki ograniczające:

$$7,5x_1 + 7x_2 + 5,75x_3 + 4,75x_4 + 4,5x_5 \geq 70$$ - całkowity zasięg

$$0,16x_1 + 0,15x_2 + 0,12x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 \geq 2$$ - całkowita częstotliwość

$0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 4; 0 \leq x_4 \leq 4; 0 \leq x_5 \leq 4;$ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - całkowite

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

PRZYKŁAD – PROGRAMOWANIE CELOWE

Firma rozpatruje możliwość wprowadzenia do produkcji 3 nowych wyrobów, które mają zastąpić obecnie wytwarzane modele.

Właściciel firmy uważa, że planując strategię długookresową należy uwzględnić:

- zysk długookresowy,
- stabilność zatrudnienia,
- poziom nakładów inwestycyjnych.

Dlatego zostały sformułowane 3 cele:

CEL 1: osiągnięcie zysku długookresowego równego przynajmniej 100 [mln zł]

CEL 2: utrzymanie zatrudnienia na poziomie 3000 osób

CEL 3: utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie wyższym niż 40 [mln zł]

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

Ponieważ osiągnięcie wszystkich 3 celów jednocześnie prawdopodobnie nie będzie możliwe, zarząd określił wartości poszczególnych współczynników kar (związanych z nieosiągnięciem poszczególnych celów).

Potrzebne informacje podaje tabela:

Cel	Zysk (produkty)			Założony poziom osiągnięcia celu	Współczynniki kary (niekorzystne dla firmy odchylenia)
	P_1	P_2	P_3		
Zysk długookresowy	10	8	13	>= 100 [mln zł]	6 (-)
Poziom zatrudnienia	4	2	3	= 30 [setki osób]	2 (+), 5 (-)
Nakłady inwestycyjne	5	7	8	<= 40 [mln zł]	4 (+)

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL - ZMIENNE DECYZYJNE:

X_1 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_1

X_2 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_2

X_3 – planowana wielkość produkcji wyrobu P_3

MODEL - ZMIENNE BILANSUJĄCE CELE:

Y_1^+ - wielkość o jaką osiągnięty zysk przekracza wartość 100 mln zł (cel 1)

Y_1^- - wielkość o jaką osiągnięty zysk jest mniejszy od 100 mln zł

Y_2^+ - wielkość o jaką zatrudnienie przekracza 30 setek osób (cel 2)

Y_2^- - wielkość o jaką zatrudnienie jest mniejsze od 30 setek osób

Y_3^+ - wielkość o jaką nakłady inwestycyjne przekraczają 40 mln zł (cel 3)

Y_3^- - wielkość o jaką zatrudnienie jest mniejsze od 30 setek osób

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – FUNKCJA CELU I WARUNKI OGRANICZAJĄCE:

(Minimalizacja sumy niekorzystnych odchyleń od ustalonych poziomów osiągnięcia celów)

$$6y_1^- + 2y_2^+ + 5y_2^- + 4y_3^- \rightarrow \min$$

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$ - **(CEL 1)**

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$ - **(CEL 2)**

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$ - **(CEL 3)**

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

ROZWIĄZANIE W PRZYPADKU HIERARCHIZACJI CELÓW

I POZIOM HIERARCHII:

CEL (2A):

nieprzekroczenie aktualnego poziomu zatrudnienia (3000 osób)

CEL 3:

utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie większym niż 40 mln zł

II POZIOM HIERARCHII:

CEL (1):

osiągnięcie zysku długookresowego na poziomie 100 mln zł.

CEL (2B):

nieobniżenie dotychczasowego poziomu zatrudnienia

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – ZADANIE PIERWSZEGO POZIOMU HIERARCHII:

$2y_2^+ + 4y_3^+ \to \min$ **(funkcja celu)**

Warunki ograniczające:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

❑ LINIOWE PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE – przykład: Określenie strategii długookresowej firmy (optymalizacja celowa)

MODEL – ZADANIE DRUGIEGO POZIOMU HIERARCHII:

$6y_1^- + 4y_2^- \to \min$ **(funkcja celu)**

Warunki ograniczające:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

Dodajemy warunek:

$$2y_2^+ + 4y_3^+ = 0$$

warunki brzegowe:

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$