

Algorytm maksymalnego przepływu w sieci

Algorytm „Forda – Fulkersona”

1. Podstawy teoretyczne:

Charakterystyczne cechy sieci Forda – Fulkersona:

Występujące we wzorach symbole oznaczają odpowiednio: $|V|$ - ilość elementów zbioru V , $\delta: V^2 \rightarrow \{0,1\}$ - jest funkcją incydencji (połączenia) za pomocą której określany jest zbiór łuków U w grafie G . Zbiór ten jest definiowany następująco:

$$U = \{u: u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \wedge v_\alpha, v_\beta \in V \wedge \delta_{\alpha\beta} = \delta(v_\alpha, v_\beta) = 1\}.$$

- (i) $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_m \cup V_{m+1}, |V_0| = |V_{m+1}| = 1 \wedge |V_j| > 1; j = 1, 2, \dots, m; m \geq 2$

Wierzchołki sieci należące do zbioru V są rozdzielone na warstwy, które zawierają **nie mniej niż dwa wierzchołki** (za wyjątkiem warstwy pierwszej oraz ostatniej – w których znajduje się po **jednym wierzchołku** – tzw. **węzeł wejścia i wyjścia**).

- (ii) Jeżeli $\delta_{\alpha\beta} = \delta(v_\alpha, v_\beta) = 1 \wedge v_\alpha \in V_j (j = 0, 1, \dots, m) \Rightarrow v_\beta \in V_{j+1}$.

Połączenie łukiem dwóch dowolnych wierzchołków sieci jest możliwe tylko pomiędzy wierzchołkami należącymi do dwóch sąsiadujących warstw (początek łuku – warstwa poprzednia, koniec łuku warstwa następna).

- (iii) Jeżeli $[v_\alpha \in V_i \wedge v_\beta \in V_j \wedge (j = i \vee j < i \vee j - i > 1)] \Rightarrow \delta_{\alpha\beta} = 0$.

Nie jest możliwe połączenie łukiem dwóch wierzchołków należących do tej samej warstwy, lub gdy wierzchołek końcowy (łuku) należy do warstwy wcześniejszej, lub gdy wierzchołek końcowy należy do kolejnej, ale nie bezpośrednio następnej warstwy.

- (iv)
$$\forall_{j=1,2,\dots,m; v_\beta \in V_j} \left[\sum_{v_\alpha \in V_{j-1}} \delta_{\alpha\beta} = \delta(v_\alpha, v_\beta) \geq 1 \wedge \sum_{v_\lambda \in V_{j+1}} \delta_{\beta\lambda} = \delta(v_\beta, v_\lambda) \geq 1 \right].$$

Istnieje co najmniej jeden łuk łączący dowolny wierzchołek danej warstwy (poza warstwą pierwszą i ostatnią) z pewnym wierzchołkiem warstwy następnej oraz analogicznie co najmniej jeden łuk łączący pewien wierzchołek warstwy poprzedniej z rozważanym wierzchołkiem tej warstwy).

Zbiór łuków U może mieć w praktyce bardzo różnorodną interpretację. Łuki możemy na przykład uważać jako skierowane drogi, kanały (połączeń informatycznych), linie energetyczne lub technologiczne, trasy zaopatrzeń (trasy transportowe), a także jako relacje lub pewne zależności finansowe, administracyjne, strukturalne lub organizacyjne.

Na zbiorze łuków określamy dwie funkcje:

- funkcja $c: V^2 \rightarrow R^+$, która określa **przepustowość** poszczególnych łuków w sieci typu Forda – Fulkersona (**uwaga:** funkcja **C** na zbiorze: $V^2 - U$ przyjmuje zawsze wartość zero);
- funkcja $x: U \rightarrow R^+$, która określa aktualny przepływ $x_{i,j}$ po łukach (i, j) zgodnie z ich orientacją;

Ponieważ wartości funkcji **C** dla poszczególnych elementów ze zbioru łuków „U” możemy uzależnić od dwóch indeksów: $C(u = \langle \alpha, \beta \rangle \in U) = c_{\alpha\beta}$, gdzie **alfa** – indeks wierzchołka początkowego, zaś **beta** – indeks wierzchołka końcowego łuku, to wartości funkcji **C** tworzą macierz kwadratową zwaną **macierzą przepustowości** postaci:

$$C = [c_{\alpha\beta}]_{\alpha, \beta=1,2,\dots,n}$$

Sieć (transportowa) w sensie Forda – Fulkersona jest grafem $G = \langle V, U, c, x \rangle$ z funkcjami obciążającymi łuki, spełniającym warunki (i)-(iv).

2. Zastosowanie algorytmu „Ford-Fulkersona” – przykład rozwiązany

Wykorzystanie sieci typu Forda – Fulkersona do problemu optymalizacji przewozów w sieci transportowej:

Rozważmy dla przykładu zadanie optymalizacyjne efektywności transportu przez pewną **firmę spedycyjną** - polegające na przetransportowaniu jak największej ilości towarów od wierzchołka wejściowego (w naszym przykładzie wierzchołek v_1 - **nadawca towarów**) sieci transportowej **G** do jej wierzchołka wyjściowego (w przykładzie v_7 - **odbiorca towarów**) po skierowanych łukach (kanałach spedycyjnych) przy uwzględnieniu ograniczeń na ich przepustowość (**ograniczenia ładowności posiadanych środków transportowych**).

Graficzna interpretacja zadania:

Rozważana sieć transportowa w sensie Forda - Fulkersona przedstawia się następująco:

$$V_0 = \{1\}, V_1 = \{2,3,4\}, V_2 = \{5,6\}, V_3 = \{7\}.$$

Pomiędzy warstwami sieci **G** zachodzi oczywista równość: $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$.

Łuki generuje macierz incydencji $[\delta_{\alpha\beta}]_{\alpha, \beta \in V}$, gdzie poszczególne jej składowe są postaci:

$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = 1$, $\delta_{25} = \delta_{26} = 1$, $\delta_{35} = 1$, $\delta_{45} = \delta_{46} = 1$, $\delta_{57} = 1$, $\delta_{67} = 1$, a na pozostałych parach wierzchołków (węzłów) zachodzi: $\delta_{ij} = 0$.

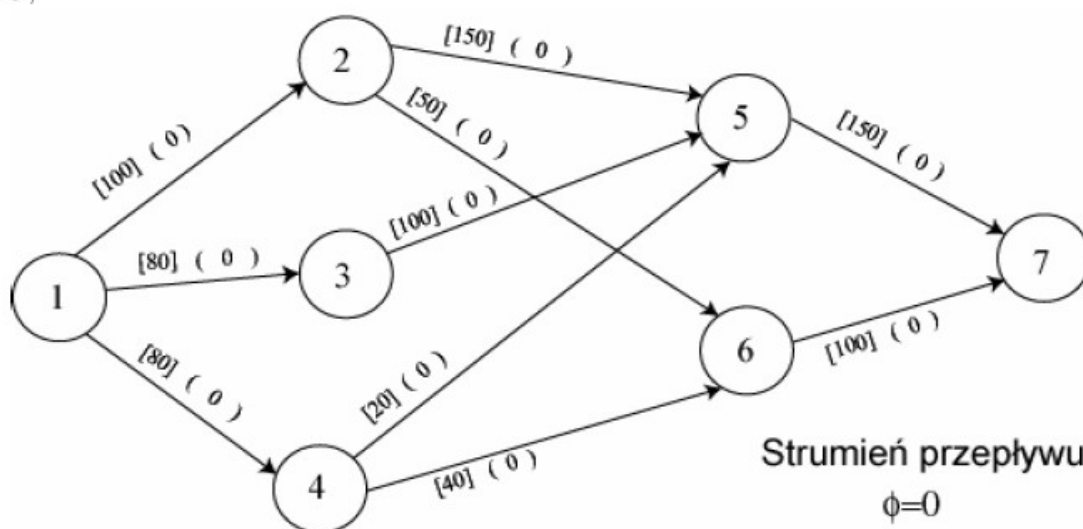
Maksymalna ładowność środków transportowych na poszczególnych etapach transportu (zgodnie z macierzą incydencji) podaje tabela:

Kanał transportowy $\langle i, j \rangle$	Maksymalna ładowność C_{ij} (w tonach)
$\langle 1,2 \rangle$	100
$\langle 1,3 \rangle$	80
$\langle 1,4 \rangle$	80
$\langle 2,5 \rangle$	150
$\langle 2,6 \rangle$	50
$\langle 3,5 \rangle$	100
$\langle 4,5 \rangle$	20
$\langle 4,6 \rangle$	40
$\langle 5,7 \rangle$	150
$\langle 6,7 \rangle$	100

Rysunek przedstawia graficzną interpretację zadania za pomocą sieci transportowej Forda – Fulkersona.

Graf ten jest siecią z **przepustowościami** $c_{\alpha\beta}$ naniesionymi na łuki zgodnie z danymi zaczerpniętymi z tabeli. W nawiasach okrągłych przedstawiony jest **aktualny transport** ($x_{ij} \geq 0$) przez dany kanał transportowy

(obecnie wszędzie 0). **Aktualny strumień przepływu** (liczony jako suma $\sum_{i \in \Gamma_7} x_{i7}$ wynosi 0).



Aby najlepiej zrealizować swój cel firma spedycyjna rozwiązuje zadanie transportowe algorytmem Forda – Fulkersona – opublikowanym w pracy:

Ford L. R., Fulkerson D. R., Przepływy w sieciach, PWN, W-wa, 1969.

Model matematyczny problemu decyzyjnego:

$$\varphi(X_{ij}) = \sum_{i \in \Gamma_{n=7}^-} X_{i,n=7} \rightarrow \max$$

Warunki:

$$\sum_{j \in \Gamma_1^+} X_{1,j} = \sum_{i \in \Gamma_{n=7}^-} X_{i,n=7}$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} X_{i,j} = \sum_{k \in \Gamma_j^+} X_{j,k}, \text{ dla } j \in V - \{1, n\}$$

$$X_{i,j} \leq C_{ij}, \quad \text{dla } (i, j) \in U - \text{zbiór łuków}$$

W algorytmie tym poszukuje się tzw. **strumienia maksymalnego** $\Phi_{\max}$ określającego jaką maksymalną ilość towarów z węzła **początkowego** możemy łukami (drogami dystrybucji) przetransportować do węzła **końcowego** nie przekraczając jednocześnie przepustowości (dopuszczalnej ładowności) na poszczególnych łukach sieci.

Idea algorytmu jest następująca:

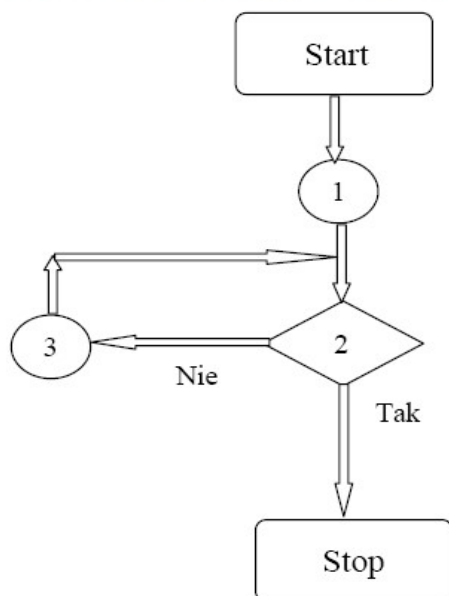
Najpierw poszukuje się jakiegokolwiek dopuszczalnego **strumienia** Φ przepływu (spełniającego tzw. **Prawo Kirchoffa** dla sieci), taki strumień początkowy zawsze istnieje (w najgorszym wypadku jest to strumień zerowy). W dalszych krokach algorytmu strumień ten odpowiednio się poprawia, nasycając kolejne łuki, tak aby uzyskać wreszcie wartość maksymalną.

W sieci forda – fulkersona dla każdego wierzchołka grafu zachowane jest tzw. **I prawo Kirchoffa dla przepływu** (odpowiednik prawa Kirchoffa dla prądu elektrycznego): **Sumaryczny wpływ do każdego wierzchołka sieci za wyjątkiem wierzchołka wejściowego i wyjściowego jest równy sumarycznemu wypływowi z tego węzła (wpływ bilansuje wypływ).**

Zatem dla każdego $j \in V - \{1, n\}$ zachodzi $\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{i,j} = \sum_{k \in \Gamma_j^+} x_{j,k}$.

Powiemy, że łuk $\langle i, j \rangle$ jest **nasycony**, jeśli jego przepustowość jest całkowicie wykorzystana (realizacja dystrybucji towarów wymaga na tym etapie wykorzystania transportu o maksymalnie dostępnej ładowności), tzn. $x_{i,j} = c_{i,j}$.

Schemat algorytmu Forda – Fulkersona:



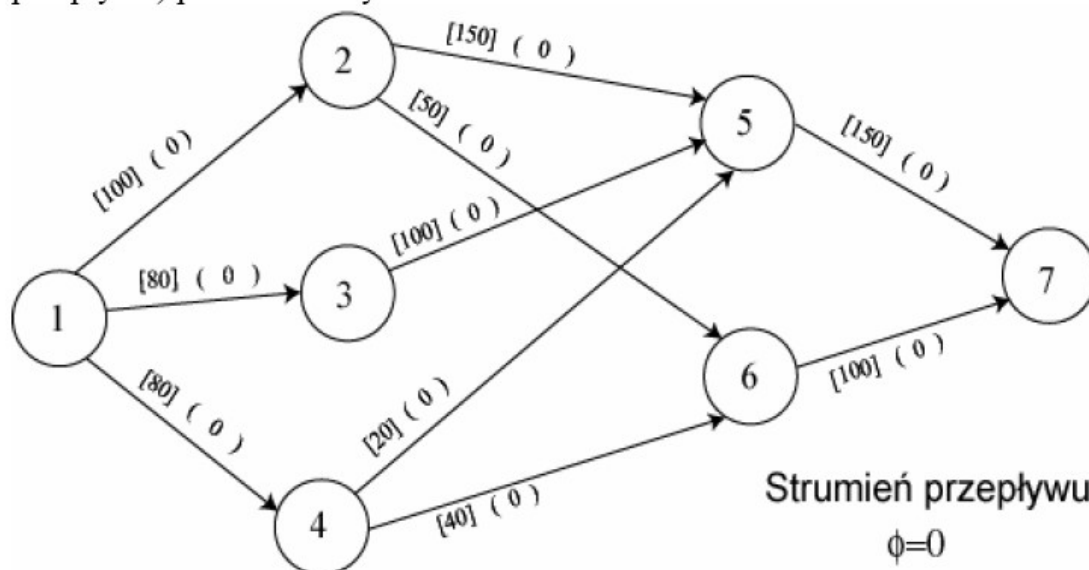
Krok 1 – wyznaczenie jakiegokolwiek początkowego strumienia przepływu (spełniającego prawo Kirchhoffa).

Krok 2 – sprawdzenie warunku czy wyznaczony strumień przepływu jest maksymalny (**wykorzystanie procedury cechowania wierzchołków – kryterium max przepływu**).

Krok 3 – polepszenie wartości strumienia poprzez lepsze nasycenie jego łuków.

Realizacja kroku 1:

W kroku tym staramy się wyznaczyć jakikolwiek strumień początkowy. Początkową dystrybucję towarów (przy najgorszym zerowym strumieniu przepływu) przedstawia rysunek.



Realizacja kroku 2:

Aby zbadać czy strumień zupełny jest maksymalny należy zastosować procedurę cechowania wierzchołków zaproponowaną przez **Forda i Fulkersona**.

Cechowanie wierzchołków zawsze zaczynamy od wierzchołka wejściowego v_1 , któremu nadajemy cechę $(-, \infty)$. Wierzchołek ten staje się **ocechowany** ale **niezbadany**.

Następnie bierzemy pod uwagę kolejny wierzchołek ocechowany, ale jeszcze niezbadany i rozpatrujemy wszystkie wierzchołki **nieocechowane** do niego **sąsiednie** (tzn. z niego wychodzące lub do niego wchodzące) i staramy się je ocechować zgodnie z **procedurą**:

Oznaczenia: **j** – numer wierzchołka ocechowanego badanego, **l** - numer wierzchołka, który cechujemy.

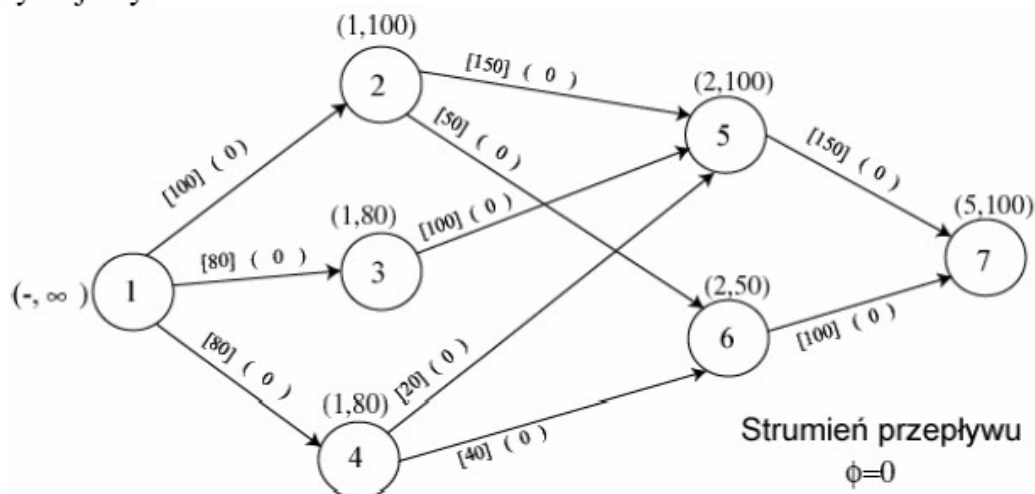
- Jeżeli $(j, l) \in U$ oraz $x_{j,l} < c_{j,l}$ (**nie jest to łuk maksymalnie nasycony**), to wierzchołkowi: **l** - nadajemy cechę $(j, \varepsilon_l = \min\{\varepsilon_j, c_{j,l} - x_{j,l}\})$.
- Jeżeli $(l, j) \in U$ oraz $x_{l,j} > 0$ (**istnieje już jakiś przepływ przez ten łuk**), to wierzchołkowi: **l** - nadajemy cechę $(j, -\varepsilon_l = \min\{\varepsilon_j, x_{l,j}\})$.

Wierzchołek: **j** - badany staje się wtedy **ocechowany i zbadany**. Przechodzimy do kolejnego wierzchołka ocechowanego i niezbadanego i procedurę cechowania powtarzamy, aż uda się ocechować **wierzchołek wyjściowy** (v_n).

Kryterium optymalności (maksymalności) strumienia przepływu:

Aktualny strumień przepływu jest maksymalny, jeżeli stosując procedurę cechowania wierzchołków nie da się ocechować węzła wyjścia.

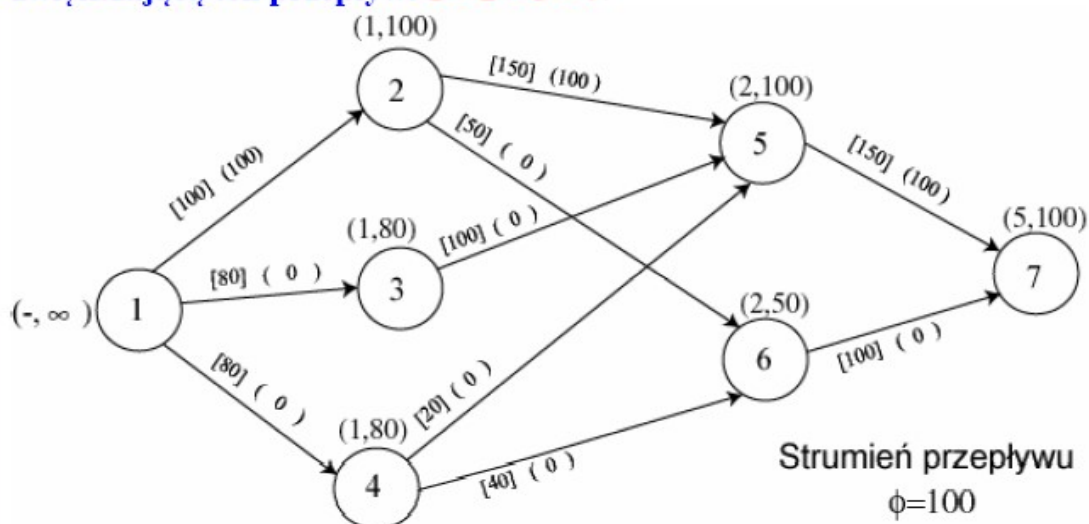
Stosując procedurę cechowania wierzchołków do naszego przykładu otrzymujemy:



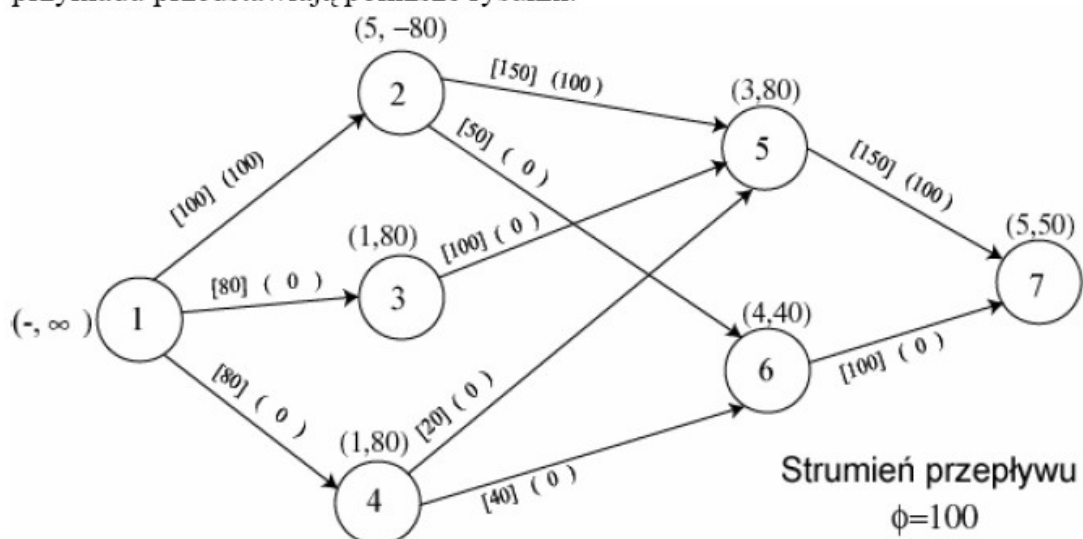
Możliwe było odczekanie wierzchołka wyjściowego zatem (co było do przewidzenia) strumień zerowy nie jest maksymalny.

Realizacja kroku 3:

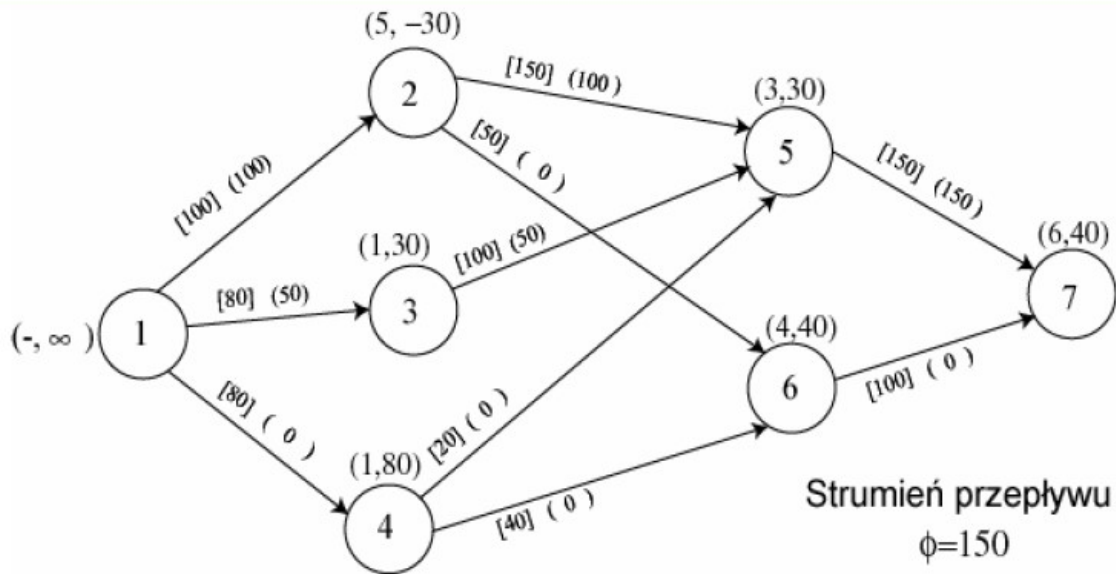
Procedura cechowania wierzchołków podaje ponadto o ile możemy poprawić wartość aktualnego strumienia. Mówi o tym wartość: $\varepsilon_7 = 100$ **przypisana wierzchołkowi wyjścia**. Pierwsze składowe cech podają nam również **ścieżkę zwiększającą ten przepływ: 1 – 2 – 5 – 7**.



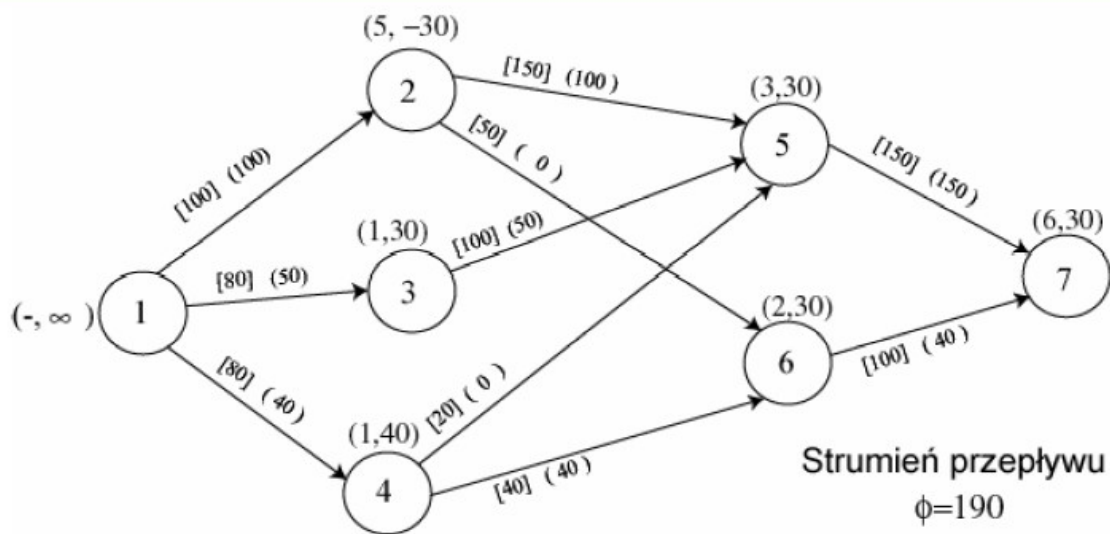
Ponownie **powracamy do kroku 2** (sprawdzając czy strumień aktualny $\phi = 100$) jest maksymalny, **itd.** Kolejne etapy przebiegu algorytmu dla naszego przykładu przedstawiają poniższe rysunki.



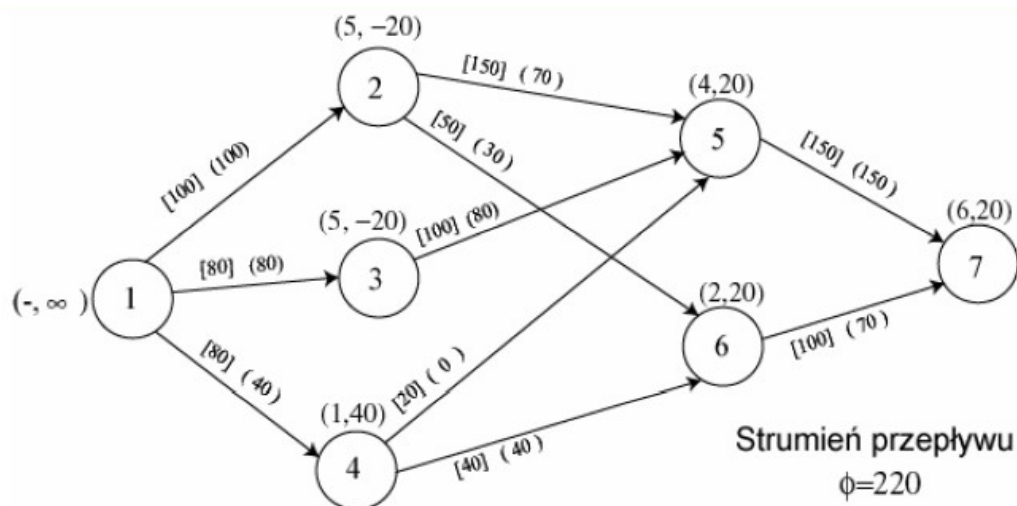
Ścieżka zwiększająca przepływ o 50 jest postaci: **1 – 3 – 5 – 7**.



Ścieżka zwiększająca przepływ o 40 jest postaci: **1 – 4 – 6 – 7**.

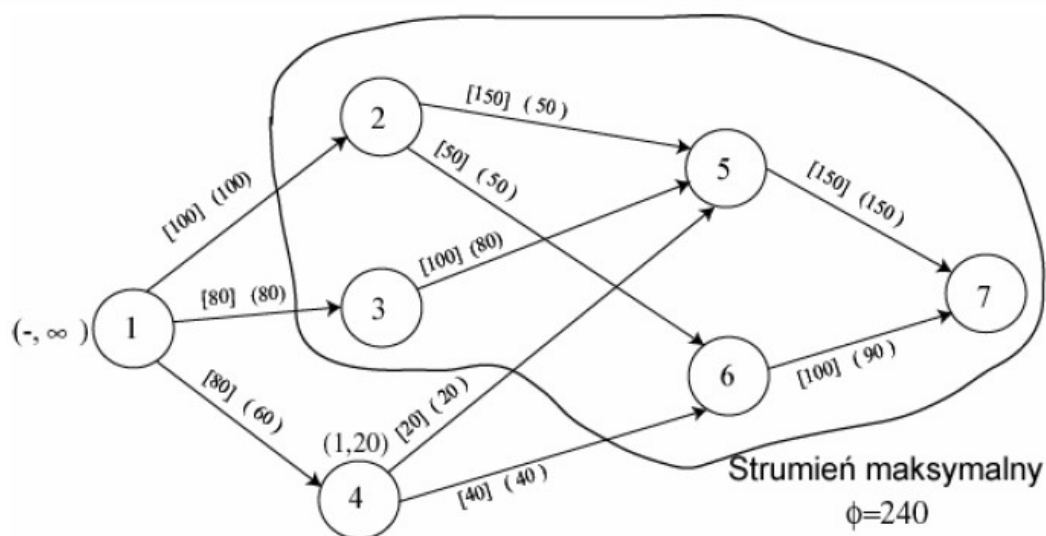


Ścieżka zwiększająca przepływ o 30 jest postaci: **1 – 3 – 5 – 2 – 6 – 7**.



(poprzednia dystrybucja)

Ścieżka zwiększająca przepływ o 20 jest postaci: **1 – 4 – 5 – 2 – 6 – 7**.



Otrzymany strumień przepływu jest zarazem strumieniem maksymalnym $\Phi = 240 = \Phi_{\max}$, gdyż nie jest możliwe zgodnie z kryterium optymalności strumienia - stosując procedurę cechowania oznaczenie wierzchołka wyjściowego v_7 .

W ostatnim kroku algorytmu otrzymaliśmy rozbitcie zbioru wierzchołków V sieci na dwa zbiory: wierzchołków **oceanowanych**: $V^O = \{1, 4\}$ - zawierający zawsze wierzchołek wejścia i wierzchołków **nieoceanowanych**: $V^N = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ - zawierający zawsze wierzchołek wyjścia.

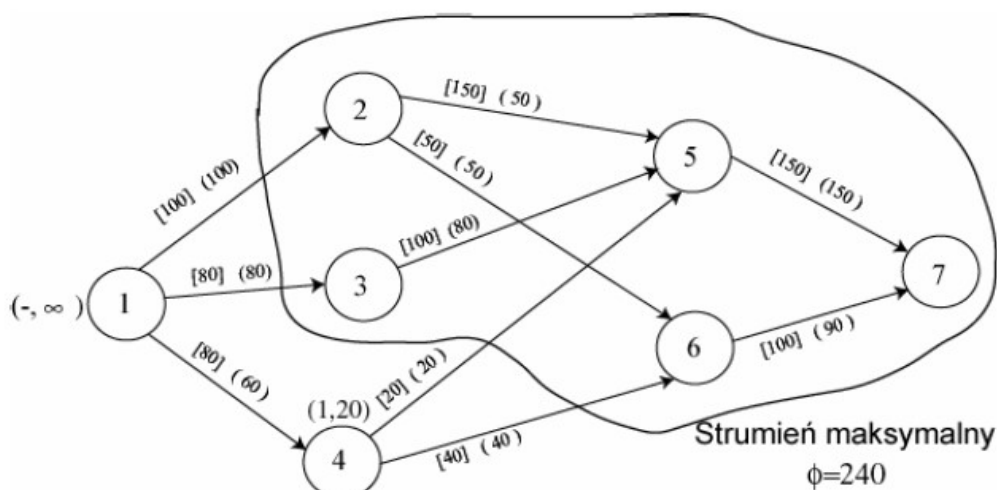
Zauważmy, że wszystkie łuki prowadzące do wierzchołków, których nie można oceanować są nasycone.

- Przekrojem S w sieci G nazywamy zbiór łuków: $\{(i, j) \in U : i \in P^1 \wedge j \in P^2\}$, gdzie zbiory P^1, P^2 spełniają następujące warunki: $P^1 \cap P^2 = \emptyset$, $P^1 \cup P^2 = V$; $1 \in P^1, n \in P^2$ oraz dla każdego $(i, j) \in U$ zachodzi: $i, j \in P^1$ lub $i, j \in P^2$ albo $i \in P^1, j \in P^2$.

Jest to każdy **minimalny zbiór łuków**, których usunięcie spowoduje **utratę spójności sieci** (nie będzie istnieć ścieżka prowadząca od v_1 do v_n).

Do każdej ścieżki $(v_1 \rightarrow v_n)$ musi istnieć **co najmniej jeden** z łuków przekroju;

- Liczbę $\psi = \psi(S) = \sum_{(i,j) \in S} x_{i,j}$ równą sumie przepustowości łuków przekroju nazywamy **przepustowością przekroju**;
- Przekrojem minimalnym będziemy nazywać przekrój S^* o **minimalnej przepustowości** $\Psi_{\min}$. Jest to przekrój generowany przez zbiór V^N , czyli przekrój postaci: $\{(i, j) \in U : i \in V^O \wedge j \in V^N\}$;



Twierdzenie Forda - Fulkersona:

$$\Phi_{\max} = \Psi_{\min}$$

Wartość maksymalnego przepływu w sieci równa się wartości minimalnego jej przekroju.

W naszym przykładzie mamy:

$$\Phi_{\max} = 150 + 90 = 240 \text{ ton}$$

(liczone na łukach wchodzących do v_7)

Przepustowość przekroju na łukach wchodzących do $V^N = \{2,3,5,6,7\}$ ma wartość: $\Psi_{\min} = 100 + 80 + 20 + 40 = 240 \text{ ton}$

Zatem z twierdzenia Forda – Fulkersona mamy: $\Phi_{\max} = \Psi_{\min} = 240$.