

WYBRANE ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA I ANALIZY SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

1. Uwagi wstępne.

Przez „system obsługi masowej” rozumie się różnego rodzaju urządzenia ze *stanowiskami obsługi (kanalami obsługi)*, do których zgłaszają się w stałych lub losowych odstępach czasu *klienci*, którzy chcą być obsłużeni.

Przykładami tego rodzaju systemów może być:

<i>Numer systemu obsługi</i>	<i>Klient</i>	<i>Stanowisko obsługi Kanal obsługi</i>	<i>Rodzaj obsługi</i>
1	statek	nabrzeże portowe	załadunek lub rozładunek statku
2	pacjent	gabinet lekarski	badanie stanu zdrowia pacjenta
3	abonent telefoniczny	centrala telefoniczna	połączenie z wybranym numerem
4	samochód	stacja benzynowa	tankowanie paliwa
5	samochód	stacja obsługi samochodów	naprawa samochodu (badanie stanu technicznego)
6	maszyna	konserwator maszyn	naprawa uszkodzonej maszyny
7	widz kinowy	kasa biletowa	sprzedaż biletu do kina
8	kupujący w supermarkecie	kasa supermarketu	pobieranie należności za towar

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte, to zgłaszający się klient ma dwie możliwości:

- zrezygnować z obsługi
- ustawić się w kolejce (nie jest to skutkiem złej organizacji pracy, lecz faktem obiektywnym wynikającym z losowego czasu przybywania klientów do stanowisk obsługi oraz losowego czasu trwania ich obsługi)

Uwaga:

Całkowita likwidacja kolejek (przez znaczne zwiększenie liczby stanowisk obsługi) jest rozwiązaniem nie tylko ekonomicznie najgorszym (*najbardziej kosztownym*), ale także fizycznie *niemożliwym* (zmniejszeniu się liczby klientów oczekujących na obsługę towarzyszyć będzie znaczny wzrost liczby niewykorzystanych stanowisk obsługi oczekujących na klientów - powstaje zatem *inny rodzaj kolejki*).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Aby skrócić czas oczekiwania klientów w kolejce na obsługę menadżer systemu może:

- zwiększyć ilość stanowisk obsługi,
- skrócić czas obsługi klientów przez wszystkie kanały obsługi lub tylko ich część,

Uwaga:

Oba rozwiązania wymagają poniesienia *dodatkowych kosztów* na inwestycje oraz powodują, że *wydłuży się czas* w którym wszystkie stanowiska obsługi lub ich część *będą niewykorzystane* (system ponosi wtedy niepotrzebne straty). Menadżer systemu musi podjąć decyzje, które są pewnym *kompromisem* pomiędzy *interesami klientów* (brak kolejek, szybszy czas obsługi) oraz *interesami zarządzającego systemem* (niższe koszty funkcjonowania systemu, brak strat).

Zakres zastosowań *teorii masowej obsługi* obejmuje różne dziedziny działalności ludzkiej. Teoria ta znalazła zastosowanie m.in. przy rozwiązywaniu bardzo wielu *problemów ekonomicznych*. Do zadań z teorii masowej obsługi należą również zadania z zakresu *teorii niezawodności*, oraz *zarządzania zapasami*.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

2. Struktura systemów obsługi i ich podstawowe elementy.

Systemy masowej obsługi (jak np. wielkie przedsiębiorstwa, systemy zaopatrzeniowo – magazynowe, systemy transportu miejskiego) poza dużą różnorodnością indywidualnych właściwości posiadają wiele wspólnych cech. Główną ich wspólną cechą jest występowanie w nich trzech podstawowych elementów:

- *Źródło zgłoszeń* - zbiór potencjalnych *zgłoszeń* (klienci, życzenia, potrzeby, przedmioty) do systemu, które czekają na *obsługę* (sprzedaż, przegląd, obróbkę) przez urządzenia obsługujące.
- *Urządzenia obsługujące (kanały obsługi)* - realizują obsługę na podstawie zgłoszeń wchodzących do systemu. Mogą to być zarówno obsługujący zgłoszenia *ludzie* jak i *maszyny*.
- *Kolejka* (powstaje, gdy liczba wolnych kanałów obsługi jest mniejsza od liczby zgłoszeń). Nie jest to jedynie *zbiór oczekujących na obsługę*, ale także pewna struktura podlegająca pewnemu zbiorowi reguł – *regulamin kolejki*.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka wejściowego strumienia zgłoszeń.

Zgłoszenia wchodzące do systemu (pojedynczo lub grupowo) tworzą tzw. *wejściowy strumień zgłoszeń*. Strumień zgłoszeń jest *określony* - jeśli znane są prawidłowości rządzące powstawaniem zgłoszenia w przedziale czasu $[t, t + T]$ od chwili „t” – powrotu jego do źródła do chwili „t+T” ponownego jego pojawienia się w systemie (znana jest *probabilistyczna charakterystyka zmiennej losowej* „T”) oraz *liczba zgłoszeń* „N”.

Jeżeli w wejściowym strumieniu zgłoszeń nie występują przypadki pojawienia się dwóch lub większej liczby zgłoszeń (tzw. *strumień pojedynczy*), to jest on w pełni charakteryzowany za pomocą długości przedziału czasu „ ξ_n ” pomiędzy kolejnym (n – „tym”, $n=1,2,3,\dots$) oraz poprzednim (n-1 – „szym”) zgłoszeniem.

Wejściowy strumień zgłoszeń może być *strumieniem regularnym* (zgłoszenia wpływają w jednakowych odstępach czasu: $\xi_n = \text{const}$). W praktyce przypadek ten bardzo rzadko występuje (czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami zależy od bardzo wielu czynników przypadkowych). Zatem najczęściej wejściowy strumień zgłoszeń jest *strumieniem losowym* (ξ_n - są zmiennymi losowymi o określonych funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa).

Jeżeli długości przedziałów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami nie wpływają wzajemnie na siebie (zmienne losowe ξ_n - są niezależne), to strumień nazywa się *strumieniem bez następstw (bez pamięci)*. W szczególności, gdy zmienne losowe ξ_n mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa to taki strumień nazywa się *strumieniem rekurencyjnym*.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W zależności od typu rozkładu zmiennych losowych ξ_n strumienie rekurencyjne posiadają pewne specyficzne nazwy. Często w systemach obsługi masowej rozpatruje się wejściowy rekurencyjny strumień zgłoszeń będący tzw. *strumieniem Poissona*.

Dla wejściowego strumienia zgłoszeń *typu Poissona* zmienne losowe $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ ($n=1,2,\dots$) określające czas pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, a zatem posiadają rozkład prawdopodobieństwa określony za pomocą dystrybuanty postaci:

$$F(t) = P(\xi_n < t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad \lambda > 0, t \geq 0.$$

Wynika to z poniższego twierdzenia

Twierdzenie:

Jeśli proces zgłoszeń do systemu jest *procesem Poissona* z intensywnością $\lambda > 0$, to odstępów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami (zmienne losowe ξ_n) posiadają ten sam *rozkład wykładniczy* z parametrem $\lambda > 0$.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Niech $X(t)$ - będzie *sygnałowym procesem Poissona* (proces jednorodny o przyrostach niezależnych i pojedynczych) oraz oznacza ilość sygnałów (zgłoszeń) jakie pojawiły się w przedziale czasu $[0,t]$.

Dla strumienia wejściowego będącego *strumieniem Poissona* prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale $[0,t]$ pojawiło się „k” – zgłoszeń (sygnałów) wynosi:

$$P(X(t) = k) = e^{-\lambda \cdot t} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}; k = 0, 1, 2, \dots$$

Oczekiwana (średnia) ilość zgłoszeń (sygnałów) w przedziale czasu $[0,t]$ wynosi zatem: $E[X(t)] = \lambda \cdot t$. Stąd parametr „ $\lambda > 0$ ” – interpretujemy jako ilość zgłoszeń w jednostce czasu, a więc jako *intensywność zgłoszeń* dla strumienia typu Poissona.

W praktycznych zastosowaniach rozważa się także wejściowy strumień zgłoszeń *typu Erlanga* (rzędu „k”). W tym przypadku strumień napływających zgłoszeń może być *strumieniem Poissona*, lecz do obsługi dopuszcza się tylko jedno (ostatnie) z każdych „k” – kolejno napływających zgłoszeń.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Jeżeli dla dowolnej skończonej liczby rozłącznych przedziałów czasu: $[t_1, t_1 + \Delta_1), \dots, [t_r, t_r + \Delta_r)$ prawdopodobieństwo pojawienia się w tych przedziałach odpowiednio: k_1, \dots, k_r - zgłoszeń zależy tylko od długości tych przedziałów, a nie od położenia względem pozostałych przedziałów, to strumień wejściowy nazywa się *strumieniem stacjonarnym*.
- Jeżeli strumień wejściowy jest: stacjonarny, pojedynczy oraz bez następstw, to jest tzw. *strumieniem prostym*.

Charakterystyka mechanizmu obsługi.

Teoria masowej obsługi bada procesy, w których z jednej strony powstaje zapotrzebowanie na wykonanie pewnych prac (usług), a z drugiej powstaje konieczność zaspokojenia tych potrzeb. Związane jest to z odpowiednim mechanizmem obsługi, który *określa sposoby postępowania ze zgłoszeniami, ale od strony kanału obsługi*.

Do podstawowych charakterystyk kanału obsługi należą:

- *Czas trwania obsługi.*
- *Zdolność przepustowa systemu*
- *Dostępność systemu*

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Czas trwania obsługi - to przedział czasu niezbędny dla realizacji obsługi dla pojedynczego zgłoszenia.

Przyjmuje się, że czasy trwania obsługi dla poszczególnych zgłoszeń są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach.

Jeżeli jednak występuje *kilka rodzajów zgłoszeń*, to każdy rodzaj ma *własny czas trwania* obsługi. Podobnie każdy *kanal obsługi* (jeśli jest ich wiele) może posiadać własny czas trwania obsługi.

Typ rozkładu czasu trwania obsługi określa nazwę odpowiedniej obsługi (możemy mieć do czynienia z obsługą: *wykładniczą, deterministyczną, Erlanga, dowolną*). Badania systemów obsługi masowej pokazują, że najczęściej rozkład czasu trwania obsługi jest *rozkładem wykładniczym*.

Niech η_k - oznacza czas konieczny do obsługi „k-tego” zgłoszenia ($k=1,2,\dots$) Zakładając ponadto, że zmienne losowe $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, to rozkład prawdopodobieństwa dla wykładniczego czasu trwania obsługi „k - tego” zgłoszenia określa dystrybuanta:
$$B(t) = P(\eta_k < t) = 1 - e^{-\nu \cdot t}.$$

Stąd otrzymujemy, że *średni czas trwania obsługi* dla jednego zgłoszenia (w przypadku rozkładu wykładniczego) wynosi: $t_{sr} = E[\eta_k] = \frac{1}{\nu}$. Odwrotność

średniego czasu obsługi nazywamy *intensywnością obsługi*: $\nu = \frac{1}{t_{sr}}$ (liczba zgłoszeń obsłużona w jednostkowym przedziale czasu).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Jeżeli system obsługi jest systemem wieloetapowym (każde zgłoszenie jest obsługiwane przez jeden kanał w „*m*” etapach), zaś czas trwania obsługi dla każdego etapu ma identyczny rozkład wykładniczy, to rozkład pełnego czasu trwania obsługi (po zakończeniu wszystkich etapów) jest *rozkładem Erlanga* postaci: $B(t) = P(\eta < t) = 1 - e^{-vt} \left[1 + \frac{v \cdot t}{1!} + \frac{(v \cdot t)^2}{2!} + \dots + \frac{(v \cdot t)^m}{m!} \right]$

Zdolność przepustowa systemu – to *maksymalna liczba zgłoszeń*, które mogą być jednocześnie obsługiwane przez system.

W zależności od liczby jednocześnie obsługiwanych zgłoszeń rozróżniamy systemy: *jednokanałowe* (tylko jedno zgłoszenie w tym samym czasie obsługiwane) oraz *wielokanałowe* (więcej niż jedno zgłoszenie może być jednocześnie obsługiwane).

W praktyce spotyka się również tzw. *systemy wielofazowe* (każde zgłoszenie musi przejść przez kilka kanałów obsługi i przy każdym z nich może czekać w kolejce).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Dostępność systemu – określa dostęp zgłoszeń do różnych kanałów obsługi. System jest w *pełni dostępny*, gdy każde zgłoszenie może być obsłużone przez dowolny kanał. Jeżeli jest to niemożliwe, to system należy do grupy systemów *niepełnodostępowych*.

Najczęściej w systemach masowej obsługi zgłoszenia są obsługiwane zgodnie z *kolejnością* ich napływania. Mogą jednak zdarzyć się takie systemy obsługi, w których niektóre zgłoszenia są *uprzywilejowane* (systemy z *priorytetem*).

Mogą być to systemy z *priorytetem bezwzględnym* (przerywana jest obsługa zgłoszeń o niższym priorytecie) oraz o *priorytecie względnym* (zgłoszenie o wyższym priorytecie musi czekać na zakończenie rozpoczętej obsługi zgłoszenia o niższym priorytecie). Możliwe zasady obsługi zgłoszeń zawiera *regulamin* (dyscyplina) obsługi.

Uwaga: Do charakterystyk mechanizmu obsługi należy również *niezawodność kanału obsługi* (określa się ją za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla *przedziału czasu sprawnej - niezawodnej pracy* kanału obsługi oraz dla *przedziału czasu trwania jego odnowy* – naprawy w sytuacji awarii).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka regulaminu kolejek.

Regulamin kolejki – to reguła wyboru zgłoszenia, które ma zostać obsłużone, gdy tylko zakończy się obsługa poprzedniego.

Jeżeli zgłoszenia ustawiają się w kolejce w kolejności ich przybywania to taki porządek tworzenia kolejki nazywa się *naturalnym*.

Występują też inne zasady w *regulaminie kolejki*: wybór zgłoszenia, którego obsługa zajmuje najmniej czasu, *losowy* wybór zgłoszeń, *priorytetowy* (względny lub bezwzględny) wybór zgłoszeń oraz *mieszany* wybór zgłoszeń.

Regulamin kolejki obejmuje również:

- Ograniczenia liczby oczekujących zgłoszeń (*systemy z odmową* lub ze stratą).
- Ograniczenia dotyczące czasu oczekiwania na obsługę oraz pobytu zgłoszenia w systemie (mogą być to wielkości stałe lub zmienne losowe).
- Przepisy regulujące możliwości przechodzenia z jednej kolejki do drugiej.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

3. Klasyfikacja systemów masowej obsługi.

Najczęściej systemy masowej obsługi charakteryzowane są za pomocą kodu zaproponowanego przez D. G. Kendalla (jednego z twórców teorii). Oznaczenie systemu masowej obsługi ma postać: $X|Y|n|N|f_i^j$, gdzie:

„X” – oznacza typ strumienia wejściowego,

„Y” – oznacza typ rozkładu czasu trwania obsługi,

Przyjmuje się kod X=M – oznaczający Poissonowski (Markowski) strumień zgłoszeń (wykładniczy rozkład czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami), Y=M – wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi, X=D – deterministyczne (regularne) zgłoszenia klientów do systemu, Y=D – stały czas obsługi, X=G – dowolny proces zgłoszeń klientów do systemu, Y=G – dowolny rozkład prawdopodobieństw czasu trwania obsługi, X= E_k – rozkład Erlanga (z parametrami λ, k) odstępów czasu między zgłoszeniami, Y= E_k – rozkład Erlanga (z parametrami ν, k) prawdopodobieństw czasu trwania obsługi.

„n” – liczba kanałów w systemie (system z nieograniczoną liczbą kanałów obsługi oznacza się $n = \infty$),

„N” – maksymalna liczba miejsc oczekiwania (systemy z odmową mają $N=0$, dla nieograniczonej kolejki $N = \infty$),

f_i^j – regulamin obsługi (wskaźnik „i”) i regulamin kolejki (wskaźnik „j”)

Znaczenie indeksów: „i=0” – *niepriorytetowa* obsługa (porządek naturalny FIFO lub odwrotny LIFO), „i=1” *względny* priorytet obsługi, „i=2” – *bezwzględny* priorytet obsługi, „j=0” – priorytet w kolejce *nie obowiązuje* (zgłoszenie, które zastaje wszystkie miejsca zajęte w kolejce odchodzi), „j=2” – *bezwzględny* priorytet zgłoszeń (zgłoszenie z wyższym priorytetem usuwa z kolejki jedno zgłoszenie z niższym priorytetem).

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

4. Przykłady systemów masowej obsługi i ich podstawowe charakterystyki.

Bardzo ważną charakterystyką systemów masowej obsługi jest prawdopodobieństwo: $P_k(t) = P(V_t = k)$ - losowo wchodzące do systemu zgłoszenie w chwili „t” zastaje w nim „k” innych zgłoszeń (jako „k-te” ustawia się w kolejce). Rozkład tego prawdopodobieństwa zależy od czasu. W praktyce można jednak zauważyć, że dla pewnych systemów (*systemy stabilne*) wpływ czasu na charakterystyki zmniejsza się wraz z jego upływem. Jest to ważna własność ustalania się tzw. *trybu stacjonarnego systemu*. Wariant stacjonarny interpretuje się jako graniczny wariant systemu niestacjonarnego: $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k$.

Nie dla każdego systemu *wariant stacjonarny istnieje*. Systemy z ograniczoną liczbą miejsc oczekiwania zawsze mają wariant stacjonarny, gdy intensywności zgłoszeń (parametr λ) oraz obsługi (parametr ν) są skończone. Dla systemów z nieograniczoną liczbą miejsc oczekiwania wariant regularny istnieje tylko

wtedy, gdy tzw. *współczynnik obciążenia* (zajętości systemu) $\frac{\lambda}{n\nu} < 1$.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|1|\infty$ - jest to jednokanałowy system obsługi, z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanał obsługi posiada wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0 < \nu < \infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0 < \lambda < \infty$). Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa zgodnie z kolejnością przybyć do systemu (porządek naturalny). Dla takiego systemu *wariant regularny* istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda < \nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych). Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ (dla tego systemu jest to *obciążenie systemu*), to prawdopodobieństwo $P_k = (1 - \rho)\rho^k$, $k=0,1,2,\dots$

Prawdopodobieństwo, że w systemie w kolejce oczekuje więcej niż r_0 zgłoszeń wynosi:

$$\begin{aligned} P(r > r_0) &= P_{r_0+2} + P_{r_0+3} + \dots = (1 - \rho)\rho^{r_0+2} + (1 - \rho)\rho^{r_0+3} + \dots = \\ &= (1 - \rho)\rho^{r_0+2} [1 + \rho + \rho^2 + \dots] = \rho^{r_0+2} \end{aligned}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w systemie obsługi wynosi: $E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń w systemie obsługi wynosi:

$$D^2[V] = E[V^2] - E[V]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k - \left(\sum_{k=0}^{\infty} kP_k \right)^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce wynosi: $\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_{k+1} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} \right)^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \rho e^{-(\nu - \lambda)t_0}$$

Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce (na obsługę) oraz jego wariancja wynoszą: $E[T] = \frac{\rho}{\nu - \lambda}$, $D^2[T] = \frac{\rho(2 - \rho)}{(\nu - \lambda)^2}$,

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie przebywać w systemie dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(Z > t_0) = e^{-(\nu - \lambda)t_0}$$

Średni całkowity czas przebywania zgłoszenia w systemie oraz jego wariancja wynoszą: $E[Z] = \frac{1}{\nu - \lambda}$, $D^2[Z] = \frac{1}{(\nu - \lambda)^2}$,

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu $M|M|n|\infty$** - jest to system obsługi składający się z „n” kanałów obsługi z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0 < \nu < \infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0 < \lambda < \infty$). Zgłoszenia czekają w kolejce tylko wtedy, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (*w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału*) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (*porządek naturalny*). Dla takiego systemu *wariant regularny* istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda < n\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych przez wszystkie kanały). Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$,

to prawdopodobieństwo: $P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0$, dla $k=0,1,2,\dots,n$, oraz $P_k = \frac{\rho^k}{n!n^{k-n}} P_0$,

dla $k=n+1,n+2,\dots$, gdzie: $P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} \right)^{-1}$.

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie *będzie obsłużone bez czekania* (w systemie znajduje się co najwyżej $n-1$ zgłoszeń) wynosi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right)$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie *będzie oczekiwało w kolejce* wynosi:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{n}{n-\rho} P_n$$

Prawdopodobieństwo, że $1 \leq s_0 \leq n-1$ *kanalów obsługi jest zajętych*

wynosi: $P(S = s_0) = P_{s_0} = \frac{\rho^{s_0}}{s_0!} P_0$

Prawdopodobieństwo, że *długość kolejki wynosi* $r_0 \geq 0$ obliczamy ze wzoru:

$$P(R = r_0) = P_{n+r_0} = \frac{\rho^{n+r_0}}{n!n^{r_0}} P_0$$

Prawdopodobieństwo, że *w kolejce oczekuje więcej* niż $r_0 \geq 0$ zgłoszeń wynosi:

$$\begin{aligned} P(R > r_0) &= P_{n+r_0+1} + P_{n+r_0+2} + \dots = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \left[1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \frac{n}{n-\rho} = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0}(n-\rho)} P_0 \end{aligned}$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w kolejce wynosi: $\sum_{r=0}^{\infty} r P_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{(n-\rho)^2} P_0$

Średnia liczba zajętych kanałów (istotna informacja dla zarządzającego systemem) wynosi: $\sum_{k=1}^n k P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n P_k = \rho = \frac{\lambda}{\nu}$. Zatem *średnia liczba wolnych kanałów* wynosi: $n - \rho = n - \frac{\lambda}{\nu} = n \left(1 - \frac{\lambda}{n\nu} \right)$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = \rho + P_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{(n-\rho)^2}$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ *jednostek czasu wyznacza się następująco:*

$$P(T > t_0) = \frac{n}{n-\rho} P_n e^{-(n-\rho)\nu \cdot t_0}$$

Średni czas oczekiwania na obsługę (w kolejce) oraz jego *wariancja* wynoszą: $E[T] = \frac{\Pi}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$; $D^2[T] = \frac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu - \lambda} = \frac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|N$ - jest to system obsługi składający się z „n” kanałów obsługi z odmową (ograniczona liczba „ $N < \infty$ ” miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0 < \nu < \infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0 < \lambda < \infty$). W omawianym systemie może znajdować się jednocześnie najwyżej „n+N” zgłoszeń, z których „n” - będzie obsługiwanych, zaś „N” - będzie czekać w kolejce. Napływające w tym czasie zgłoszenia otrzymują **odmowę** i odchodzą nie obsłużone. Przyjęte zgłoszenia albo od razu są obsługiwane (jeśli jest wolny kanał) lub czekają w kolejce (jeśli wszystkie kanały obsługi są zajęte). Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (**w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału**) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (**porządek naturalny**). Dla takiego systemu **wariant regularny (system jest stabilny)** istnieje zawsze. Wyznamy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n, \text{ oraz } P_k = \frac{\rho^k}{n!n^{k-n}} P_0, \text{ dla } k=n+1,n+2,\dots,n+N,$$

$$\text{gdzie: } P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\rho}{n} \right)^k \right)^{-1}.$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie nie zostanie przyjęte (dostanie odmowę)*, czyli *prawdopodobieństwo straty zgłoszenia* wynosi:

$$P_{n+N} = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^N P_0$$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie zostanie przyjęte* do obsługi (procentowa przepustowość systemu – *g*) wynosi: $g = 1 - P_{n+N}$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie będzie obsłużone bez czekania* wynosi: $\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right)$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie *będzie musiało czekać w kolejce* wynosi: $\sum_{k=0}^{N-1} P_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:

$$\sum_{k=1}^N kP_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^N k \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$$

Średnia liczba zajętych kanałów wynosi: $\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=1}^N nP_{n+k} = \rho(1 - P_{n+N})$.

Średnia liczba wolnych kanałów (z powodu braku zgłoszeń) wynosi: $n - \rho(1 - P_{n+N})$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie (równa średniej liczbie zajętych kanałów obsługi plus średniej liczbie zgłoszeń czekających w kolejce) wynosi:

$$E[V] = \rho(1 - P_{n+N}) + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^N k \left(\frac{\rho}{n} \right)^k$$

Średnia liczba zgłoszeń, które otrzymały odmowę wynosi: λP_{n+N} (w jednostce czasu). *Średni odstęp czasu między dwoma kolejnymi zgłoszeniami*, które otrzymały odmowę wynosi: $\frac{1}{\lambda P_{n+N}}$.

Średnia liczba wolnych miejsc w kolejce jest równa: $N - E[V]$.

Średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi (oczekiwania w kolejce)

wynosi:
$$E[T] = \frac{n\nu P_n}{(n\nu - \lambda)^2} \left[1 - (N+1) \left(\frac{\rho}{n} \right)^N + N \left(\frac{\rho}{n} \right)^{N+1} \right].$$

□ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|0$ - jest to szczególny przypadek systemu poprzedniego, w którym występuje *strata zgłoszeń* (każde zgłoszenie, które przychodzi i zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte odchodzi nie obsłużone). Dla tego systemu prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n, \text{ gdzie: } P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) \right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie nie zostanie przyjęte* (stracone) wyraża się wzorem: $P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$, zaś prawdopodobieństwo, że *zgłoszenie zostanie przyjęte* (a tym samym *obsłużone bez czekania*) wynosi:

$$1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Średnia *liczba zajętych kanałów obsługi* (tym samym średnia *liczba zgłoszeń w systemie*) wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^n k P_k = \rho \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) P_0 = \rho(1 - P_n).$$