PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Twórcą teorii **programowania dynamicznego** jest **Richard Bellman**, który opracował jej podstawy teoretyczne.

Wyczerpujący opis teoretyczny oraz metodologię wykorzystania programowania dynamicznego do zagadnień podejmowaniu optymalnych decyzji można znaleźć między innymi w pracy monograficznej:

[1] Bellman R., Dreyfus S. F., Programowanie Dynamiczne, PWE, Warszawa 1967.

Metodologia programowania dynamicznego:

Formalnie rzecz biorąc, metody programowania dynamicznego polegają na **zamianie** zadania optymalizacyjnego z **N** zmiennymi decyzyjnymi (znalezienia ekstremum warunkowego funkcji **N** – zmiennych) na **N** zadań z **jedną zmienną decyzyjną**, przy czym zadania te są powiązane ze sobą określoną **zależnością rekurencyjną** (na każdym etapie zadania składowego wyznacza się ekstremum warunkowe uwzględniając rezultat osiągnięty na etapie poprzednim).

Postępując w ten sposób upraszczamy proces rachunkowy (zamiast rozwiązywać zadanie złożone rozwiązujemy zadania prostsze).

Operacja rozbicia zadania optymalizacyjnego na zadania składowe jest możliwa tylko wtedy, gdy **funkcja celu** zadania jest tzw. **funkcją separowalną**.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Określenie:
Funkcja **N** zmiennych $F(x_1, x_2, ..., x_N)$ będzie funkcją **separowalną**, jeśli $F(x_1, x_2, ..., x_N) = f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) \oplus ... \oplus f_N(x_N)$.

Operację: $x \oplus y$ należy rozumieć jako:

1) $x \oplus y := x + y$, albo
2) $x \oplus y := x \cdot y$, albo
3) $x \oplus y := \min\{x, y\}$, albo
4) $x \oplus y := \max\{x, y\}$.

Uwaga: Następujące funkcje celu:

$F_1(x_1, x_2, x_3) = 5g_1(x_1) + 8g_3(x_3)x_3 + 4g_2(x_2)x_2$

$F_2(x_1, x_2, x_3) = \ln[9g_1(x_1) + 2g_2(x_2) + 4g_3(x_3)]$ - **mogą być** funkcjami celu w programowaniu dynamicznym.

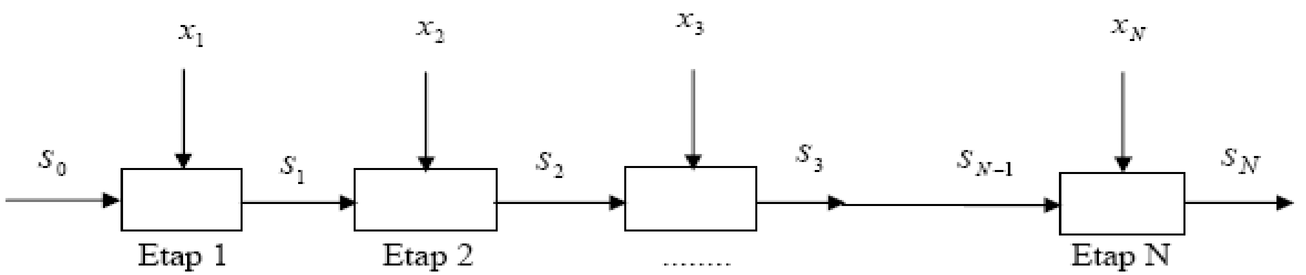
Nie może być to natomiast funkcja celu postaci:

$F_3(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1)x_2 + g_2(x_2)x_3 + g_3(x_3)$

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Metody programowania dynamicznego są w głównej mierze wykorzystywane do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych dla tzw. **wieloetapowych procesów decyzyjnych**.

Ogólny schemat wieloetapowego procesu decyzyjnego przedstawia następujący rysunek:



Schemat ten przedstawia dowolny proces (np. realizację jakiejkolwiek działalności), którego przebieg można podzielić na **N - etapów**. Na dowolnym etapie tego procesu możemy wyróżnić następujące elementy:

1) Stan wejściowy procesu do danego etapu (na schemacie - $s_{i-1}, (i = 1,\dots,N)$) – jest to stan jaki osiągnął proces w wyniku realizacji etapu poprzedniego.
2) Decyzję podejmowaną na danym etapie (na schemacie - $x_i, (i = 1,\dots,N)$).
3) Stan wyjściowy procesu z danego etapu (na schemacie - $s_i, (i = 1,\dots,N)$) – stan ten zależy od stanu wejściowego oraz od podjętej decyzji na danym etapie.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stan procesu można opisywać za pomocą jednego lub kilku parametrów – zwanych: **zmiennymi stanu**. W podanym schemacie proces decyzyjny jest opisywany za pomocą jednej charakterystyki – jednej **zmiennej stanu**.

Oznaczmy przez: S_i $(i = 1,...,N)$ - zbiór możliwych w **i - tym** etapie wartości zmiennej stanu - s_i (**zbiór możliwych stanów**). Natomiast przez: D_i $(i = 1,...,N)$ - zbiór możliwych decyzji w **i - tym** etapie. Oznacza to, że zmienna decyzyjna może przyjmować wartości z tego zbioru ($x_i \in D_i$).

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Formalnie wieloetapowy proces decyzyjny możemy wyrazić następującymi zależnościami rekurencyjnymi:

$$s_i = g_i(s_{i-1}, x_i), i = 1,2,..., N, s_i \in S_i, x_i \in D_i$$

s_0 - jest ustalonym stanem początkowym procesu

Uwaga:

Zależności te przedstawiają ważną cechę wieloetapowych procesów decyzyjnych, a mianowicie, że stan procesu s_i - osiągnięty w i - tym etapie zależy od stanu wejściowego s_{i-1} - do i - tego etapu oraz od decyzji x_i - podjętej na tym etapie.

Problem, który należy rozwiązać w każdym wieloetapowym procesie decyzyjnym polega na określeniu ciągu decyzji: $x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*$, $(x_i^* \in D_i)$, przy których ustalona funkcja celu dla całości procesu przebiegającego w N - etapach osiąga wartość optymalną (min lub max).

Ciąg decyzji optymalnych wyznaczonych dla każdego etapu: $x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*$ nazywa się: **polityką optymalną** wieloetapowego procesu decyzyjnego.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Schemat ogólny programowania dynamicznego:

Rozpatrzmy model decyzyjny wieloetapowego procesu decyzyjnego. Oznaczmy:

$X = (x_1, ..., x_N)$ - wektor zmiennych decyzyjnych ustalanych na każdym etapie;

s_0 - zadany stan początkowy procesu;

$s_1, s_2, ..., s_N$ - stany wyjściowe procesu dla poszczególnych etapów;

$Z_1(s_0, x_1)$ - wartość funkcji celu uzyskana w pierwszym etapie przy zadanym stanie początkowym;

$Z_2(s_1, x_2), Z_3(s_2, x_3), ..., Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}), Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - odpowiednio wartości funkcji celu w kolejnych etapach: 2,3,…,N.

Oczywiste jest, że zachodzi: $Z(s_0, X) = Z_1(s_0, x_1) + ... + Z_N(s_{N-1}, x_N)$

Należy ustalić **optymalną strategię** – ciąg decyzji $X^* = (x_1^*, ..., x_N^*)$, taką aby $Z(s_0, X^*) \to \max(\min)$, **przy ograniczeniach**: $X \subset \Omega$, gdzie Ω - obszar **określenia zadania wyjściowego**.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W celu rozwiązania tego zadania dokonujemy dekompozycji na N – zadań (etapów) otrzymując rodzinę zadań:

Niech $\Omega_N, \Omega_{N-1,N}, \ldots, \Omega_{1,2,\ldots,N} \equiv \Omega$ - oznacza rozbicie obszaru dla zadania wyjściowego na obszary ograniczające zmienne decyzyjne dla poszczególnych etapów.

Oznaczmy przez:

$F_1(s_{N-1}) = \max\limits_{x_N \in \Omega_N}(\min) Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - optymalną wartość funkcji celu uzyskaną na 1 – rozpatrywanym etapie.

Dalej uzyskujemy, że:

$F_2(s_{N-2}) = \max\limits_{x_{N-1} \in \Omega_{N-1,N}}(\min)\left[Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}) + F_1(s_{N-1})\right]$ - optymalna wartość funkcji celu w 2 – rozpatrywanym etapie.

Analogicznie dla 3 – rozpatrywanego etapu mamy:

$$F_3(s_{N-3}) = \max_{x_{N-2} \in \Omega_{N-2,N-1,N}}(\min)\left[Z_{N-2}(s_{N-3}, x_{N-2}) + F_2(s_{N-2})\right]$$

……………………………………………………… i dla kolejnych

Wreszcie dla N – tego rozpatrywanego etapu:

$$F_N(s_0) = \max_{x_1 \in \Omega_{1,2,\ldots,N} \equiv \Omega}(\min)\left[Z_1(s_0, x_1) + F_{N-1}(s_1)\right]$$

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Uwaga:

Z równania tego wynika, że optymalna wartość funkcji celu dla N – etapowego procesu decyzyjnego jest równa optymalnej wartości funkcji celu ze względu na pierwszą decyzję, przy założeniu stanu początkowego s_0 - procesu oraz maksymalnej wartości funkcji celu dla procesu (N-1) – etapowego.

Powyższy ciąg równań funkcyjnych wyraża tzw. **zasadę optymalności** – sformułowaną przez **R. Bellmana**.

„Niezależnie od tego jakie były decyzje początkowe, każda następna decyzja w ciągu sekwencyjnym jest decyzją optymalną z punktu widzenia stanu wynikłego z decyzji poprzednich. W efekcie końcowym otrzymamy zawsze strategię optymalną"

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując metodologię programowania dynamicznego oraz ideę algorytmu sekwencyjnego można rozwiązać bardzo wiele różnorodnych problemów decyzyjnych.

Przytoczymy tutaj tylko niektóre z tych problemów:

- Problem optymalnego wyboru przedsięwzięć inwestycyjnych.
- Problem wyznaczenia najkrótszej trasy przejazdu pomiędzy dwoma miejscowościami w wieloetapowej sieci drogowej (transportowej).
- Problem optymalnego wyznaczenia wielkości odnawianych zasobów magazynowych w wieloetapowym (np. co kwartał) procesie dostaw magazynowych itp.

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Przykład 1 - Problem optymalnego rozdziału inwestycji

Międzynarodowe przedsiębiorstwo transportowe planuje zainwestować 10 000 000 $ w rozwój sieci swoich placówek na nowych potencjalnych rynkach świadczenia usług. Pod uwagę bierze 4 strefy (rynki), a mianowicie: (I) – rosyjski, (II) – ukraiński, (III) – białoruski, (IV) – polski.

Firma konsultingowa przeprowadziła wstępne badania opracowując tabelę oraz krzywe potencjalnych zysków dla poszczególnych krajów lokalizacji sieci swoich placówek, przy zainwestowaniu „x” - jednostek pieniężnych (jednostka to 1 000 000 $).

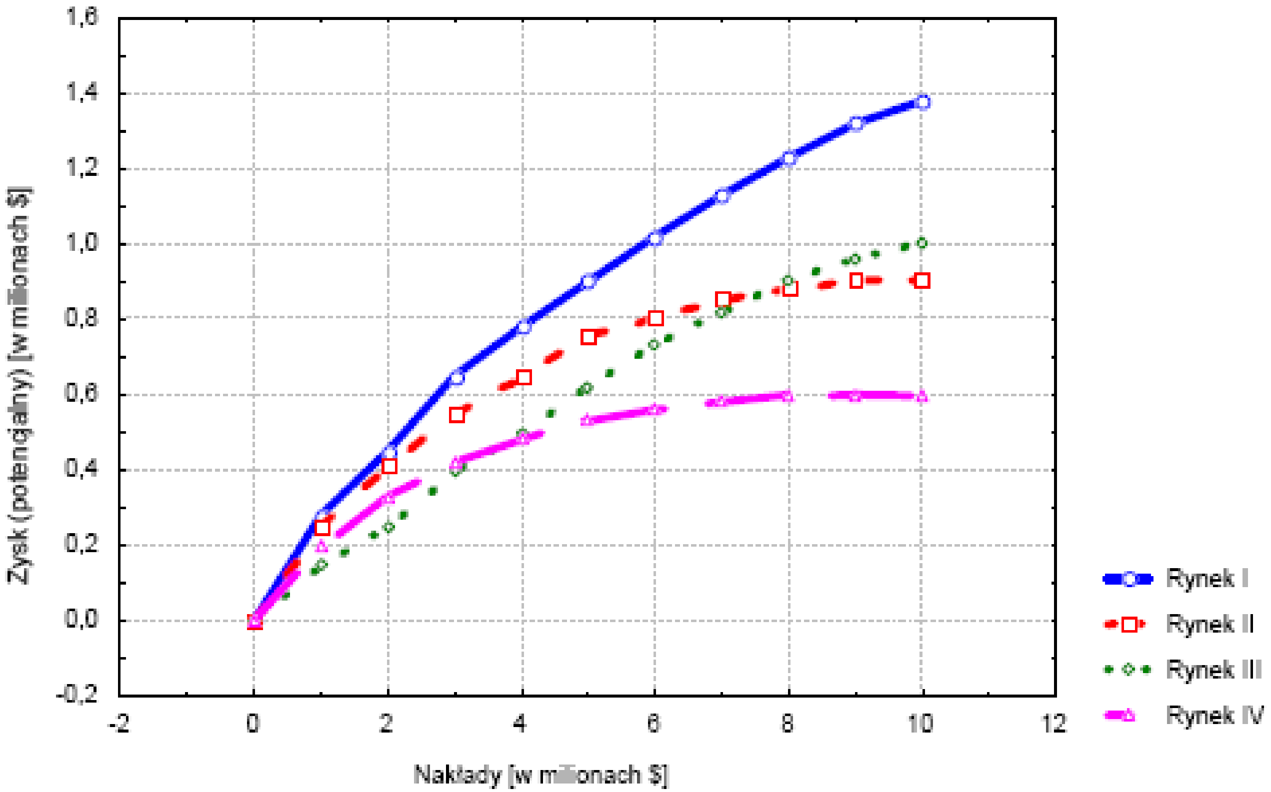
❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Krzywe potencjalnego zysku prezentują poniższe wykresy:



❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Zadanie decyzyjne jest następujące: Jak rozłożyć kwotę inwestycyjną nie przekraczającą 10 jednostek, aby sumaryczny zysk (potencjalnie) był jak największy ?

Jest to zagadnienie kombinatoryczne, ale mające bardzo dużo kombinacji, dlatego zastosujemy algorytm sekwencyjny **R. Bellmana**.

Przyjmiemy następujące oznaczenia:

$f_1(x_1)$ - funkcja zysku z rynku I, przy inwestycji kwoty x_1,

$f_2(x_2)$ - funkcja zysku z rynku II, przy inwestycji kwoty x_2,

$f_3(x_3)$ - funkcja zysku z rynku III, przy inwestycji kwoty x_3,

$f_4(x_4)$ - funkcja zysku z rynku IV, przy inwestycji kwoty x_4,

$x_i \in \{0,1,\ldots,10\}, i = 1,2,3,4.$

Ponadto oznaczymy dla potrzeb algorytmu sekwencyjnego:

$F_{12}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I i II, tzn. $x_1 + x_2 = A$, $A \in \{0,1,\ldots,10\}$

$F_{123}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I, II i III, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 = A$, $A \in \{0,1,\ldots,10\}$

$F_{1234}(A)$ - zysk przy optymalnym podziale kwoty inwestycyjnej wielkości **A** w czterech strefach: I - IV, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A$, $A \in \{0,1,\ldots,10\}$,

PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując opisany wcześniej ogólnie algorytm sekwencyjny **R. Bellmana** możemy uzyskać optymalne decyzje podziału środków inwestycyjnych.
Dla przykładu pokażemy jak optymalnie zainwestować kwotę A=2 000000 $ (2 jednostki) w rozpatrywane 4 rynki:

Na pierwszym etapie bierzemy pod uwagę tylko rynek rosyjski – w jeden rynek optymalnie inwestujemy zgodnie z wartościami funkcji celu: $F_1(x) = f_1(x)$ - podanymi w tabeli.

W drugim etapie dołączamy drugi rynek – ukraiński:

$$(*)\ F_{12}(A) = \max_{\substack{x_2=0,1,\dots,A \\ x_1+x_2=A}} \{f_2(x_2) + f_1(A - x_2)\}$$

$$F_{12}(2) = \max\{f_2(0) + f_1(2-0), f_2(1) + f_1(2-1), f_2(2) + f_1(2-2)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.45; 0.25 + 0.28; 0.41 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1 \rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{12}(0) = \max\{f_2(0) + f_1(0)\} = 0$$
$$F_{12}(1) = \max\{f_2(0) + f_1(1-0), f_2(1) + f_1(1-1)\} = \max\{0.28; 0.25\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W 3 - etapie wyznaczymy optymalną wartość funkcji celu biorąc pod uwagę trzy rynki: rosyjski, ukraiński, białoruski:

$$(**)\ F_{123}(A) = \max_{\substack{x_3=0,1,2,\dots,A \\ x_1+x_2+x_3=A}} \{f_3(x_3) + F_{12}(A-x_3)\}$$

$$F_{123}(2) = \max\{f_3(0) + F_{12}(2-0); f_3(1) + F_{12}(2-1); f_3(2) + F_{12}(2-2)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.53; 0.15 + 0.28; 0.25 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0 \rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{123}(0) = \max\{f_3(0) + F_{12}(0)\} = 0$$
$$F_{123}(1) = \max\{f_3(0) + F_{12}(1-0); f_3(1) + F_{12}(1-1)\} = \max\{0.28; 0.15\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wreszcie w 4 etapie wyznaczymy wartość optymalną funkcji celu biorąc pod uwagę wszystkie cztery rynki.

$$(***)\ F_{1234}(A) = \max_{\substack{x_4=0,1,2,\ldots,A \\ x_1+x_2+x_3+x_4=A}} \{f_4(x_4) + F_{123}(A - x_4)\}$$

$$F_{1234}(2) = \max\{f_4(0) + F_{123}(2-0); f_4(1) + F_{123}(2-1); f_4(2) + F_{123}(2-2)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.53; 0.20 + 0.28; 0.33 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0,0 \rangle$

Otrzymany wynik jest wynikiem końcowym, gdy inwestor decyduje się na wydanie 2 - jednostek pieniężnych – optymalny rozdział inwestycji: przeznaczyć po jednostce na rynki I i II.

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach $)	Przewidywany zysk (w milionach $) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Dalej należy przeprowadzić analogiczne rozważania rachunkowe dla $A = 3,4,\ldots,10$. Ostateczne wyniki podaje tabela poniżej:

Nakł. Inwest. (A)	Zysk pot. ze strefy				$F_{12}(A)$	Strat. Opt.	$F_{123}(A)$	Strat. Opt.	$F_{1234}(A)$	Strat. Opt.	$\Delta F_{1234} = F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ (Przyrosty Zysku)
	f_1	f_2	f_3	f_4							
0	0	0	0	0	0	$\langle 0,0 \rangle$	0	$\langle 0,0,0 \rangle$	0	$\langle 0,0,0,0 \rangle$	---
1	0,28	0,25	0,15	0,20	0,28	$\langle 1,0 \rangle$	0,28	$\langle 1,0,0 \rangle$	0,28	$\langle 1,0,0,0 \rangle$	0,28
2	0,45	0,41	0,25	0,33	0,35	$\langle 1,1 \rangle$	0,53	$\langle 1,1,0 \rangle$	0,53	$\langle 1,1,0,0 \rangle$	0,25
3	0,65	0,55	0,40	0,42	0,70	$\langle 2,1 \rangle$	0,70	$\langle 2,1,0 \rangle$	0,73	$\langle 1,1,0,1 \rangle$	0,20
4	0,78	0,65	0,50	0,48	0,90	$\langle 3,1 \rangle$	0,90	$\langle 3,1,0 \rangle$	0,90	$\langle 3,1,0,0 \rangle$ $\langle 2,1,0,1 \rangle$	0,17
5	0,90	0,75	0,62	0,53	1,06	$\langle 3,2 \rangle$	1,06	$\langle 3,2,0 \rangle$	1,10	$\langle 3,1,0,1 \rangle$	0,20
6	1,02	0,80	0,73	0,56	1,20	$\langle 3,3 \rangle$	1,21	$\langle 3,2,1 \rangle$	1,26	$\langle 3,2,0,1 \rangle$	0,16
7	1,13	0,85	0,82	0,58	1,33	$\langle 4,3 \rangle$	1,35	$\langle 3,3,1 \rangle$	1,41	$\langle 3,2,1,1 \rangle$	0,15
8	1,23	0,88	0,90	0,60	1,44	$\langle 5,3 \rangle$	1,48	$\langle 4,3,1 \rangle$	1,55	$\langle 3,3,1,1 \rangle$	0,14
9	1,32	0,90	0,96	0,60	1,57	$\langle 6,3 \rangle$	1,60	$\langle 5,3,1 \rangle$ $\langle 3,3,3 \rangle$	1,68	$\langle 4,3,1,1 \rangle$ $\langle 3,3,1,2 \rangle$	0,13
10	1,38	0,90	1,00	0,60	1,68	$\langle 7,3 \rangle$	1,73	$\langle 4,3,3 \rangle$	1,81	$\langle 4,3,1,2 \rangle$	0,13

❑ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wniosek:

Dodatkowy zysk: $\Delta F_{1234} = F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ przy zainwestowaniu na tych czterech rynkach dodatkowej jednostki (1 000000 $) maleje wraz ze wzrostem nasycenia rynków w środki inwestycyjne - A (jest to zjawisko naturalne i prawo ekonomiczne rynku).

Sens praktyczny tego wniosku ilustruje następujący wykres: