
ANALIZA SIECIOWA PRZEDSIĘWZIĘĆ METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ ALGORYTM – CPM

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Współczesne metody zarządzania wymagają posługiwania się nowoczesnymi narzędziami pracy. Jednym z głównych problemów w procesie zarządzania jest ocena działalności gospodarczej planowania oraz kontroli wykonania przedsięwzięcia (głównie z punktu widzenia optymalnych efektów ekonomicznych).

Do metod tych, które łączą się nierozwalnie z prowadzeniem działalności gospodarczej i odgrywają coraz większą rolę w zarządzaniu produkcją, należą metody planowania sieciowego takie jak: **planowanie sieciowe, analiza oraz synteza uogólnionych sieci decyzyjnych itp.**

Deterministyczne metody sieciowe są powszechnie stosowane w organizacji, planowaniu i kierowaniu różnego rodzaju przedsięwzięciami (uruchamianie nowej produkcji, kierowanie inwestycjami, remonty maszyn i urządzeń).

Aby zrozumieć współczesne metody ilościowe wspomagające procesy decyzyjne w planowaniu i organizacji przedsięwzięć konieczna jest znajomość podstawowych zasad budowy tzw. **sieciowego modelu struktury przedsięwzięcia.**

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Aby zrozumieć współczesne metody ilościowe wspomagające procesy decyzyjne w planowaniu i organizacji przedsięwzięć konieczna jest znajomość podstawowych zasad budowy tzw. **sieciowego modelu struktury przedsięwzięcia**.

Jest to szczególnie istotne dla wieloczynnościowych przedsięwzięć posiadających nietypową strukturę i przebieg, czyli dla tzw. procesów nieregularnych. Procesami takimi są między innymi:

- Procesy technicznego przygotowania produkcji,
- Przedsięwzięcia badawczo rozwojowe,
- Modernizacja zakładów przemysłowych,
- Duże przedsięwzięcia inwestycyjne,
- Niektóre przedsięwzięcia organizacyjne,
- Wyprodukowanie złożonego wyrobu na zamówienie (produkcja jednostkowa) itp.

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Sieciowy model przedsięwzięcia:

Proces realizacji przedsięwzięcia możemy modelować za pomocą tzw. **sieci czynności**

Sieć czynności - jest to graf spójny acykliczny, który posiada jeden wierzchołek początkowy i jeden wierzchołek końcowy. Łuki tego grafu (sieci) przedstawiają czynności, wierzchołki zaś zdarzenia.

Sieć ta przedstawia strukturę kolejności realizacji poszczególnych czynności danego przedsięwzięcia. Funkcje określone na zbiorze łuków lub wierzchołków grafu reprezentują informacje o charakterze techniczno – ekonomicznym związane z realizacją tego procesu (przedsięwzięcia) - np. **czas trwania czynności**.

Każde przedsięwzięcie bez względu na jego charakter, rodzaj czy złożoność, ma wspólne elementy, którymi są:

- **czynność** – część przedsięwzięcia, której realizacja jest związana z upływem czasu oraz ze zużywaniem zasobów (działalność biurowa, wykonanie fundamentów, praca ludzka itp.)

Oznaczmy przez **U** – zbiór czynności danego przedsięwzięcia. Są one przedstawiane jako łuki w grafie sieci przedsięwzięcia, ze strzałką skierowaną zgodnie z postępowaniem prac w czasie.

- **zdarzenie** – jest to czas (moment), w którym kończy się lub rozpoczyna co najmniej jedna czynność. Stanowi ono początek lub koniec pewnego etapu realizacji danego przedsięwzięcia. (zakończenie budowy fundamentu, rozpoczęcie procesu reklamy produktu). Ze zdarzeniem zawsze związany jest pewien termin.

Oznaczmy przez **V** – zbiór wszystkich stanów (zdarzeń) w realizacji przedsięwzięcia. Są one przedstawiane na rysunku jako węzły (wierzchołki) grafu przedsięwzięcia za pomocą koła lub innej prostej figury geometrycznej.

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- **zależność czasowa** – rodzaj czynności służącej do pokazania zależności między zdarzeniami. Umożliwia ona między innymi jednoczesny zapis czynności wykonywanych równoległe (jest to wtedy tzw. czynność fikcyjna), może również określać wzajemne wyprzedzenie lub opóźnienie pewnych zdarzeń. Zależność czasowa jest przedstawiana w sieciowym modelu za pomocą strzałki przerywanej.

Graficzne symbole trzech elementów (**czynności, zdarzenia, zależności czasowej**) wyróżnionych w dowolnym przedsięwzięciu umożliwiają sporządzenie graficznego obrazu wszystkich technologicznych i organizacyjnych powiązań wewnątrz realizowanego przedsięwzięcia. Obraz ten, precyzując jednocześnie kolejność czynności, tworzy **sieć czynności** – jest to pierwszy i bardzo ważny etap analizy sieci czynności.

Na zbiorze **U** - łuków oraz na zbiorze **V** – węzłów grafu $G = \langle V, U \rangle$ charakteryzującego przedsięwzięcie określone są funkcje: f_1, f_2, \dots, f_m (deterministyczne lub losowe). Funkcje te to zazwyczaj charakterystyki techniczno – ekonomiczne badanego przedsięwzięcia (np. czas trwania czynności, koszty wykonania czynności, zapotrzebowanie na określone środki itp.)

Graf $G = \langle V, U, f_1, \dots, f_m \rangle$ w którym uwzględniono charakterystyki techniczno – ekonomiczne przedsięwzięcia nazywa się **skierowanym grafem obciążonym przedsięwzięcia** lub **modelem sieciowym** (lub krótko **siecią**).

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Konstrukcja sieci czynności:

Do wykreślenia sieci czynności dla dowolnego projektu niezbędne są informacje dotyczące czynności wchodzących w skład przedsięwzięcia oraz ustalenie kolejności ich występowania.

W trakcie wykreślania sieci czynności można wyróżnić 4 etapy jej konstruowania:

- ustalenie listy czynności;
- ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia;
- określenie kolejności wykonywania czynności;
- numerowanie wierzchołków;

Ponadto powinny być przestrzegane następujące zasady:

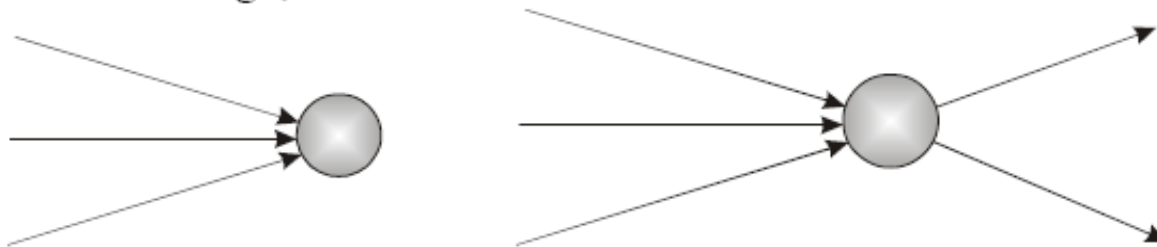
- zdarzenie początkowe nie ma żadnych czynności poprzedzających;
- zdarzenie końcowe nie ma żadnych czynności następujących;
- dwa kolejne zdarzenia mogą być połączone tylko jedną czynnością;
- początkiem każdej czynności jest zawsze pewne **i** – **te** zdarzenie, zwane zdarzeniem poprzedzającym;
- końcem każdej czynności jest zawsze pewne **j** – **te** zdarzenie, zwane zdarzeniem następującym;



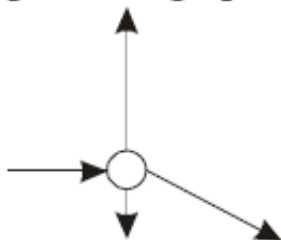
- wszystkie zdarzenia w sieci (z wyjątkiem początkowego i końcowego) powinny być początkiem i końcem co najmniej jednej czynności;

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- zdarzeniem zrealizowanym nazywamy każde zdarzenie w chwili, gdy czynność lub czynności, dla których jest ono zdarzeniem następującym, zostały wykonane;
- czynność lub czynności mogą się rozpocząć tylko od zdarzenia zrealizowanego;

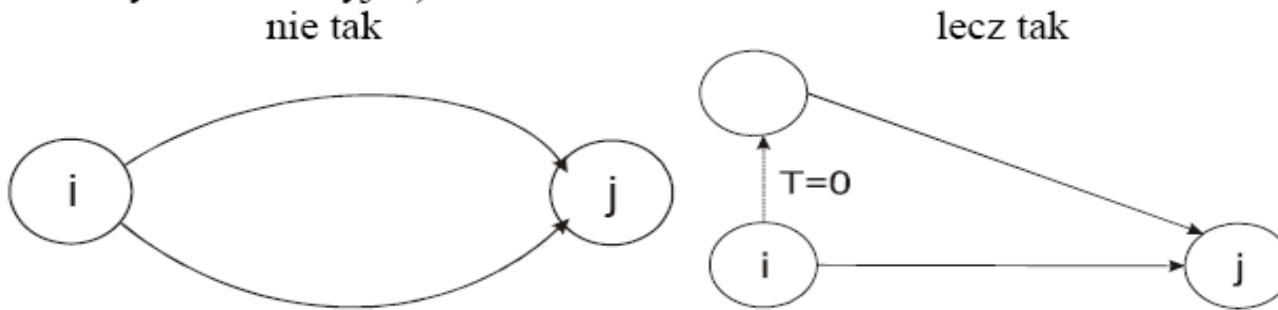


- długość i kierunek strzałki przedstawiającej czynność lub zależność czasowa nie odwzorowują ich czasu trwania, lecz są dyktowane wyłącznie wygodą graficznego przedstawienia sieci czynności



PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- dwa zdarzenia nie mogą być bezpośrednio połączone przez dwie lub więcej czynności. Jeżeli kilka czynności ma być wykonane równocześnie, to rozdziela się początki lub końce czynności formalnie na co najmniej dwa zdarzenia, wykorzystując zależność czasową o czasie trwania $T=0$ (tworząc tzw. czynności fikcyjne)



- dla identyfikacji zdarzeń, czynności i zależności czasowych, każde zdarzenie oznaczone jest numerem. Numeracja jest w zasadzie dowolna, dwa różne zdarzenia nie mogą być jednak oznaczone tym samym numerem;
- każda czynność oraz zależność czasowa jest identyfikowana za pomocą dwóch numerów: numeru zdarzenia poprzedzającego – **i** oraz numeru zdarzenia następującego – **j**. Przy oznaczeniu tak zdarzeń, czynność oznaczamy przez (i, j) ;



□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Opisane zasady i etapy postępowania zilustrujemy na przykładzie budowy sieci czynności przedstawiającej – wprowadzanie nowego produktu na rynek. Przedsięwzięcie takie składa się z czynności dotyczących sfery projektowania produkcji, jak również działań związanych z badaniem rynku.

Etap 1 – ustalenie listy czynności tego przedsięwzięcia.

Nazwa czynności:

- A** – badanie popytu na rynku
- B** – nabycie surowców na prototypy
- C** – wyprodukowanie prototypów i ocena ich jakości
- D** – nabycie surowców do produkcji
- E** – wybór opakowań
- F** – analiza kosztów produkcji
- G** – proces produkcji wyrobu
- H** – wysyłka do sklepów
- I** – reklama i zbieranie zamówień
- J** – nabycie opakowań
- K** – pakowanie wyrobu gotowego
- L** – analiza ekonomicznych parametrów decyzji po podjęciu procesu produkcji

Etap 2 – ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia.

Zdarzeniem początkowym jest – **podjęcie decyzji o produkcji na rynek nowego wyrobu.**

Zdarzeniem końcowym jest – **wyrób jest oferowany w sklepie do sprzedaży.**

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Etap 3 – określenie kolejności wykonywania czynności. Na tym etapie należy dla każdej czynności określić: czynności poprzedzające, następujące oraz ewentualne czynności równoległe – które mogą być wykonywane jednocześnie z czynnością rozpatrywaną.

Powiązania między czynnościami w naszym przykładzie są następujące:

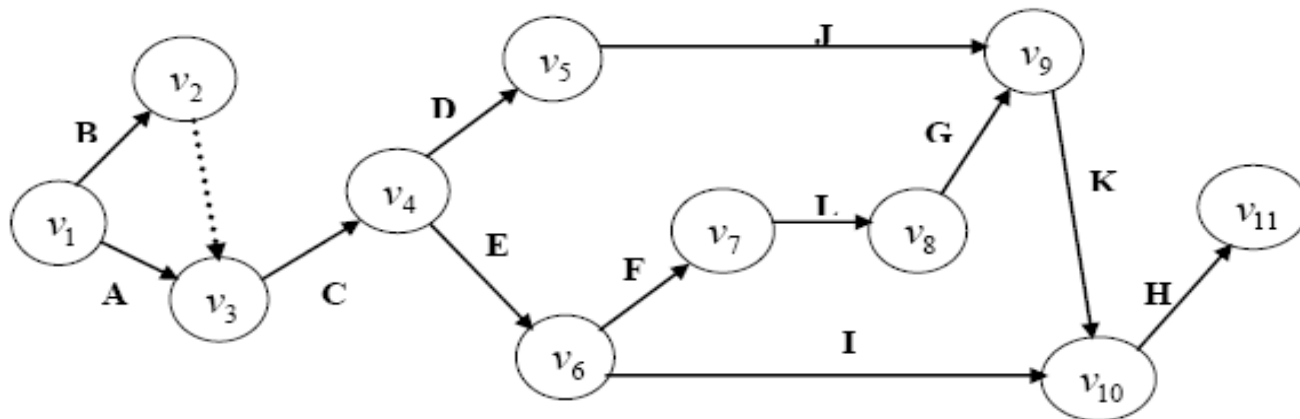
| Czynności | Czynności bezpośrednio: | | |
|-----------|-------------------------|-------------|------------|
| | poprzedzające | następujące | równoległe |
| A | - | C | B |
| B | - | C | A |
| C | A, B | D, E | |
| D | C | J | |
| E | C | F, I | |
| F | E | L | |
| G | L | K | |
| H | I, K | - | |
| I | E | H | |
| J | D | K | |
| K | J, G | H | |
| L | F | G | |

PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Etap 4 – numerowanie wierzchołków. Przy numerowaniu sieci (zdarzeń) należy uwzględnić, że następują one w określonej kolejności oraz to, że zdarzenie będące początkiem czynności powinno mieć numer mniejszy niż zdarzenie, które jest jej końcem.

Uwaga: Uporządkowanie wierzchołków zgodnie z tą zasadą można uzyskać stosując algorytm uporządkowania dolnego (warstwowego) dla grafu tworzonej sieci czynności. Wtedy konieczne jest niejednokrotnie przenumerowanie wierzchołków takiego grafu (nadając kolejne liczby naturalne kolejnym wierzchołkom z kolejnych warstw – począwszy od 1 dla wierzchołka wejścia a skończywszy na n dla wierzchołka wyjścia).

Na rysunku przedstawiono graf skierowany analizowanego przykładowego przedsięwzięcia związanego z wprowadzaniem nowego produktu na rynek.



□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Analiza sieci z funkcją czasu. Metoda ścieżki krytycznej – CPM:

Metoda CPM (*Critical Path Method*) jest historycznie najwcześniej opracowaną metodą analizy sieciowej. Umożliwia ona takie zaplanowanie harmonogramu realizacji przedsięwzięcia, przy której jego czas realizacji jest najkrótszy.

Metoda ta wymaga, aby sieć czynności była określona w postaci kanonicznej (deterministyczna jej struktura) oraz aby czasy realizacji wszystkich czynności były zdeterminowane (znane). W sieci takiej czynności są realizowane niezależnie od uwarunkowań losowych.

Kanoniczna **sieć przedsięwzięcia**: $G\langle V, U, t \rangle$ posiada funkcję $t: U \rightarrow R^+$, która każdemu łukowi $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ przypisuje nieujemną liczbę $t_{\alpha\beta} \in R^+$ opisującą czas trwania czynności związanej z łukiem u , która zaczyna się zdarzeniem v_α a kończy zdarzeniem v_β .

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Z punktu widzenia menadżera istotne są informacje o **czasie realizacji całego przedsięwzięcia** oraz o **czasach realizacji krytycznych czynności** w tym przedsięwzięciu.

Czynność jest **krytyczna** jeśli czas jej realizacji (pełnego wykonania) decyduje o czasie zakończenia przedsięwzięcia w **zaplanowanym terminie**.

Wszystkie potrzebne informacje (o czasie realizacji przedsięwzięcia, czynnościach krytycznych, zapasach czasu dla poszczególnych czynności) mogą być uzyskane metodą **CPM**.

Metoda ścieżki krytycznej oparta jest na następujących założeniach determinujących jednocześnie odpowiedni sposób postępowania przy określaniu krytycznych czynności przedsięwzięcia:

1. Rozpoczęcie realizacji jakiegokolwiek czynności możliwe jest jedynie wtedy, gdy wszystkie czynności ją poprzedzające zostały zrealizowane.
2. Moment w którym rozpoczyna się realizacja całego przedsięwzięcia uznajemy za zerowy, tzn. $t_1 = 0$ (termin rozpoczęcia zdarzenia odpowiadającego wierzchołkowi początkowemu v_1 w sieci czynności).

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

3. Z uwagi na założenie nr 1 **najwcześniejszy możliwy termin** wystąpienia zdarzenia związanego z węzłem $v_\beta \in V, \beta > 1$ obliczamy rekurencyjnie następująco:

$$t_\beta = \max_{\alpha \in \Gamma_\beta} \{ t_\alpha + t_{\alpha\beta} \} \text{ dla } \beta = 2, 3, \dots, n \text{ (n – liczebność zbioru } \mathbf{V})$$

Czas ten oznacza również najwcześniejszy z możliwych momentów czasowych, w których może być wykonana czynność rozpoczynająca się zdarzeniem v_β .

Czas t_β jest ponadto maksymalnym czasem realizacji wszystkich czynności na każdej ścieżce $[v_1, v_\beta]$ w sieci modelowanej grafem \mathbf{G} .

Czas realizacji wszystkich czynności ścieżki $[v_1, v_\beta]$ jest rozumiany jako:

$$t_{[1,\beta]} = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,\beta]}} t_{ij}, \text{ gdzie } U_{[1,\beta]} \text{ jest zbiorem łuków ze zbioru } \mathbf{U}, \text{ które}$$

tworzą drogę zgodnie skierowaną (czyli ścieżkę) w grafie \mathbf{G} zaczynającą się węzłem v_1 a kończącą węzłem v_β .

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Jeśli v_n oznacza wierzchołek końcowy (wyjściowy) sieci, to t_n jest czasem wykonania (terminem realizacji całego przedsięwzięcia). Jest to **najkrótszy z możliwych czasów zakończenia całego przedsięwzięcia**, jeśli tylko uwzględnimy spełnienie założenia 1.

Drogi skierowane (ścieżki) $[1, n]$ w sieci G dla których spełniony jest warunek: $t_{[1, n]} = t_n$ nazywamy **drogami (ścieżkami) krytycznymi**.

Czynności odpowiadające łukom leżącym na drodze krytycznej są zatem czynnościami krytycznymi.

4. Oznaczamy przez T_α - **najpóźniejszy dopuszczalny** termin wystąpienia zdarzenia $v_\alpha \in V$. Czas ten określa również najpóźniejszy z możliwych termin rozpoczęcia realizacji czynności (zaczynającej się zdarzeniem v_α), tak aby nie przekroczyć sumarycznego czasu t_n zrealizowania całego przedsięwzięcia (z jednoczesnym zachowaniem założenia 1).

W metodzie CPM najpóźniejsze dopuszczalne czasy wystąpienia dla poszczególnych zdarzeń wyznaczamy rekurencyjnie następująco:

Przyjmujemy, że dla węzła wyjściowego sieci G zachodzi: $T_n = t_n$, natomiast dla pozostałych zdarzeń $v_\alpha \in V - \{v_n\}$ czasy te wyznaczamy następująco:

$$T_\alpha = \min_{\beta \in \Gamma_\alpha^+} \{T_\beta - t_{\alpha\beta}\} \text{ dla } \alpha = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Oczywiste jest, że dla każdego zdarzenia $v_\alpha \in V$ spełnione jest $t_\alpha \leq T_\alpha$, zaś zdarzenia w których $t_\alpha = T_\alpha$ nazywamy zdarzeniami krytycznymi.

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Rezerwy czasowe w sieciowym modelu realizacji przedsięwzięcia:

Znajomość czasów w odniesieniu do poszczególnych czynności: $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ przedsięwzięcia modelowanego siecią czynności z grafem G umożliwia określenie odpowiednich rezerw czasowych dla kolejnych czynności.

Dla danej czynności: $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ **oznaczmy przez:**

$t_{\alpha\beta, rozp} = t_\alpha$ - czas najwcześniejszego rozpoczęcia czynności,

$t_{\alpha\beta, zak} = t_\alpha + t_{\alpha\beta}$ - czas najwcześniejszego zakończenia czynności,

$T_{\alpha\beta, rozp} = T_\beta - t_{\alpha\beta}$ - czas najpóźniejszego rozpoczęcia czynności,

$T_{\alpha\beta, zak} = T_\beta$ - czas najpóźniejszego zakończenia czynności,

Ponadto dla kolejnych wierzchołków (zdarzeń) $v_\alpha \in V$ grafu G oraz kolejnych jego łuków (czynności) $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ określamy następujące rezerwy czasowe:

- $z(\alpha) = T_\alpha - t_\alpha$ - **luz czasowy** dla zdarzenia v_α ;

Luz czasowy – charakteryzuje rezerwę czasową w zdarzeniu $v_\alpha \in V$ i jest długością przedziału czasu $[t_\alpha, T_\alpha]$, w którym może nastąpić realizacja tego zdarzenia bez zmiany (wydłużenia) czasu realizacji całego przedsięwzięcia.

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_c(\alpha, \beta) = T_{\alpha\beta, \text{rozp}} - t_\alpha = T_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas całkowity** czynności **u**;

Zapas całkowity $z_c(\alpha, \beta)$ - jest czasem o jaki można **opóźnić rozpoczęcie** realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (lub **wydłużyć jej realizację**) bez wpływu na **czas wykonania całego przedsięwzięcia**, przy założeniu, że czasy realizacji pozostałych czynności przedsięwzięcia nie ulegają zmianie.

Jeżeli $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ jest czynnością krytyczną (leży na ścieżce krytycznej), to $z_c(\alpha, \beta) = 0$ (**twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe**).

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_s(\alpha, \beta) = t_\beta - t_{\alpha\beta, \text{zak}} = t_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas swobodny** dla czynności **u**;
Swobodny (wolny) zapas czasowy $z_s(\alpha, \beta)$ – informuje o ile można **opóźnić** (lub **wydłużyć**) czas realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ **nie zmieniając terminu zajścia** (realizacji) zdarzenia **poprzedzającego** - v_α i **następującego** - v_β po danej czynności.

Wykorzystanie tego zapasu **nie ma wpływu** na zapasy związane z czynnościami należącymi do danej ścieżki.

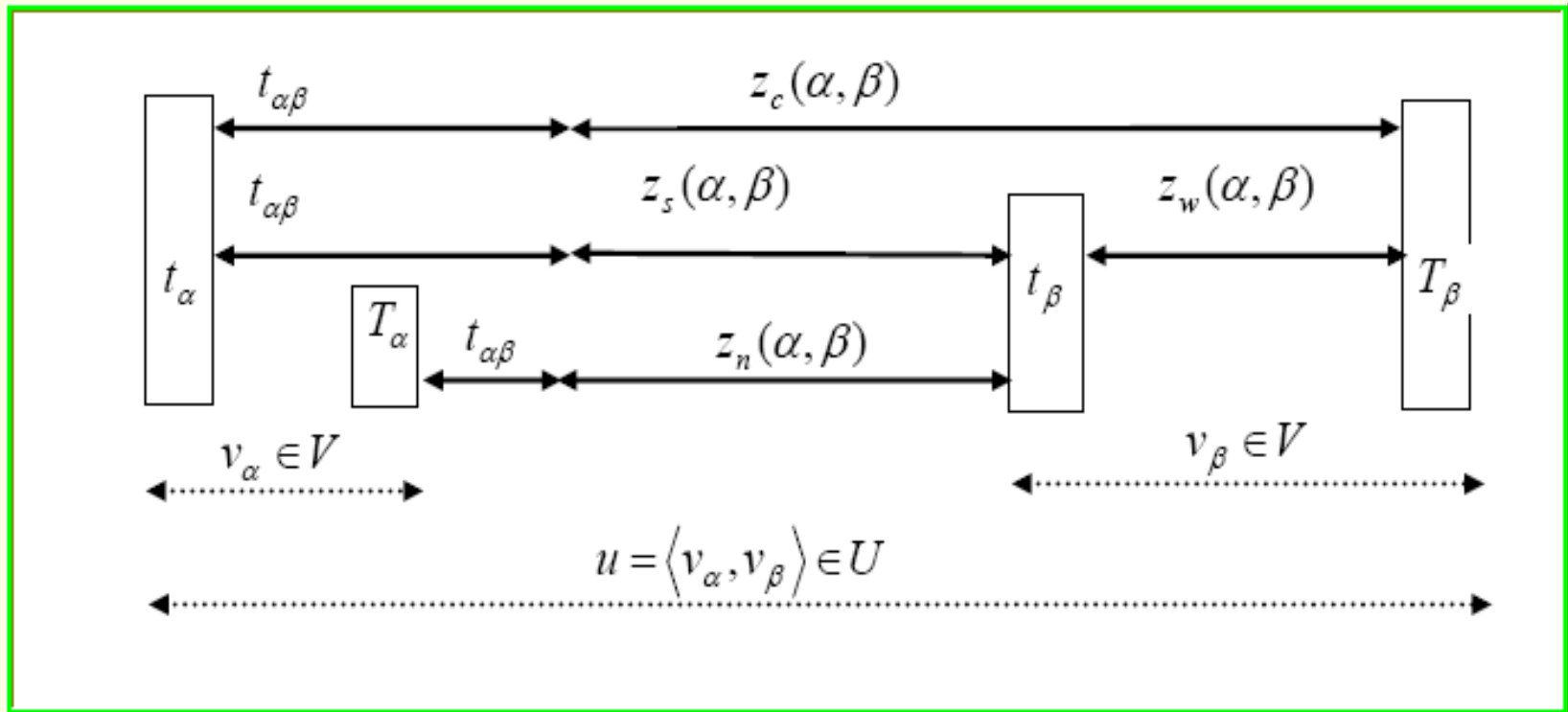
Uwaga: mogą istnieć czynności dla których $z_s(\alpha, \beta) = 0$ i które nie leżą na drodze krytycznej.

- $z_w(\alpha, \beta) = z_c(\alpha, \beta) - z_s(\alpha, \beta) = T_\beta - t_\beta$ - **zapas warunkowy** dla czynności **u**;
Jest zatem **luzem czasowym** dla zdarzenia kończącego czynność. Ta rezerwa czasu może być wykorzystana dla czynności **bez zmniejszenia zapasów poprzednich** określonych dla czynności **danej ścieżki**.

- $z_n(\alpha, \beta) = \max\{0; t_\beta - T_\alpha - t_{\alpha\beta}\}$ - **zapas niezależny** dla danej czynności **u**;
Zapas niezależny $z_n(\alpha, \beta)$ - jest czasem o jaki można opóźnić wykonanie czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ w stosunku do najpóźniejszego terminu T_α i bez naruszenia terminu t_β .

Wykorzystanie tej rezerwy czasu **nie ma wpływu na zapas** jakiegokolwiek innej czynności przedsięwzięcia.

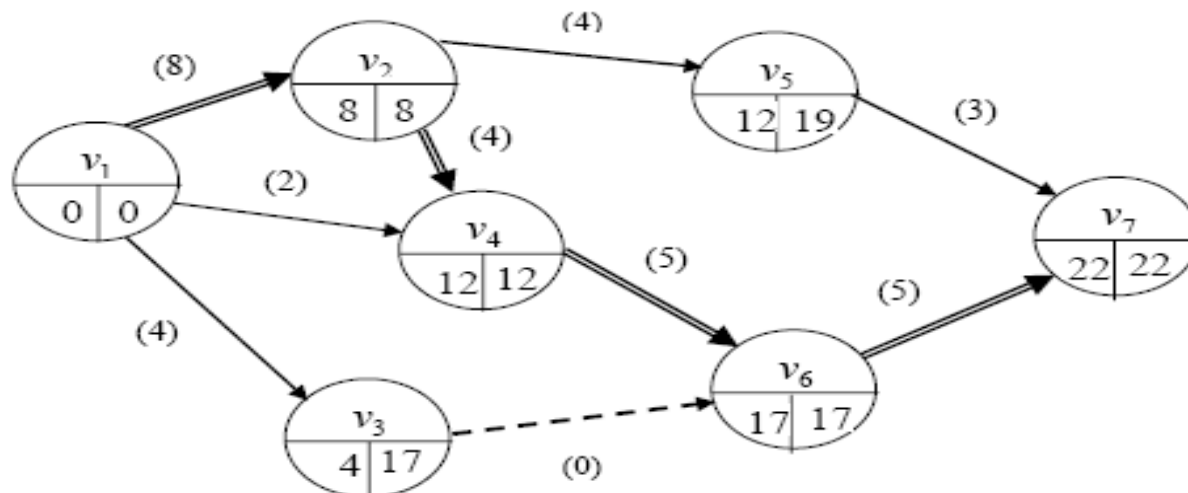
PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM



PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Rezerwy czasowe dla czynności:

| Czynność $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle$ | Czas trwania czynności $t_{\alpha\beta}$ | Czas $t_{\alpha\beta, rozp}$ | Czas $t_{\alpha\beta, zak}$ | Czas $T_{\alpha\beta, rozp}$ | Czas $T_{\alpha\beta, zak}$ | Rezerwa czasowa $z_c(\alpha, \beta)$ | Rezerwa czasowa $z_s(\alpha, \beta)$ | Rezerwa czasowa $z_n(\alpha, \beta)$ |
|--|--|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $\langle 1,2 \rangle$ | 8 | 0 | 8 | 0 | 8 | 0 (*) | 0 (*) | 0 (*) |
| $\langle 1,3 \rangle$ | 4 | 0 | 4 | 13 | 17 | 13 | 0 | 0 |
| $\langle 1,4 \rangle$ | 2 | 0 | 2 | 10 | 12 | 10 | 10 | 10 |
| $\langle 2,4 \rangle$ | 4 | 8 | 12 | 8 | 12 | 0 (*) | 0 (*) | 0 (*) |
| $\langle 2,5 \rangle$ | 4 | 8 | 12 | 15 | 19 | 7 | 0 | 0 |
| $\langle 3,6 \rangle$ | 0 | 4 | 4 | 17 | 17 | 13 | 13 | 0 |
| $\langle 4,6 \rangle$ | 5 | 12 | 17 | 12 | 17 | 0 (*) | 0 | 0 (*) |
| $\langle 5,7 \rangle$ | 3 | 12 | 15 | 19 | 22 | 7 | 7 | 0 |
| $\langle 6,7 \rangle$ | 5 | 17 | 22 | 17 | 22 | 0 (*) | 0 | 0 (*) |





PLANOWANIE SIECIOWE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

W dalszej części wykładu zaprezentowana zostanie metoda analizy sieci dla przedsięwzięć o zdeterminowanej strukturze (**sieć kanoniczna**), lecz o **losowym** czasie trwania czynności (oceny czasów trwania poszczególnych czynności charakteryzują się pewną niepewnością).

Metoda **PERT** (**Program Evaluation and Review Technique**), której autorami są: *Malcolm, Roseboom, Clark, Fazar* - została opracowana w 1958 roku dla potrzeb programu opracowania raketowego pocisku balistycznego **Polaris**.

Istotnym elementem metody **PERT** jest sposób oceny czasu trwania czynności (zakładamy, że **nie jest** on **deterministyczny** – czyli znany).

Problem ten jest o tyle złożony, że nie mamy możliwości oszacowania tego czasu metodami statystycznymi (gdyż przedsięwzięcia tego typu, które można analizować metodą PERT są zwykle **jednorazowe** i mają charakter **prototypowy**). Metoda ta może być również stosowana dla przedsięwzięć, których czasy trwania czynności mogą podlegać znacznym wahaniom.

W warunkach losowego czasu trwania czynności analiza sieci dla potrzeb planowania i kontroli realizacji przedsięwzięcia wymaga jednak znajomości charakterystyk rozkładu czasu trwania czynności.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Problem ten rozwiązano następująco. Mimo, że rozkład czasu trwania czynności jest nieznany (nie można również go oszacować statystycznie), to można przyjąć pewne jego hipotetyczne własności:

- Jest to rozkład ciągły,
- Jest rozkładem z jednym ekstremum,
- Jego funkcja gęstości (rozkładu) styka się w dwóch punktach (nieujemnych) z osią poziomą (odciętych).

Jednym z takich rozkładów jest rozkład **beta**, który został wybrany przez autorów metody na zasadzie intuicji wynikającej z doświadczeń praktycznych.

Metoda PERT jest więc analityczną procedurą obliczania czasu realizacji przedsięwzięcia wykorzystującą jego sieć: $G = \langle V, U, t \rangle$, w której struktura topologiczna (geometryczna) przedsięwzięcia jest zdeterminowana (znana), zaś losowy (nieznany) czas $t_{\alpha\beta}$ realizacji poszczególnych czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ jest zmienną losową o rozkładzie **beta**.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Rozkład **beta** w metodzie **PERT** został praktycznie uzależniony od kilku parametrów (np. na podstawie oceny ekspertów) posiadających następujące znaczenie praktyczne:

$a_{\alpha\beta}$ - najkrótszy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ (tzw. **ocena optymistyczna**);

$m_{\alpha\beta}$ - czas realizacji czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ posiadający największe prawdopodobieństwo zaistnienia (tzw. **ocena modalna**);

$b_{\alpha\beta}$ - najdłuższy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ (tzw. **ocena pesymistyczna**).

Średni czas oraz wariancję realizacji czynności $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta} \rangle \in U$ możemy uzależnić od parametrów $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}$ następująco:

$$(*)$$
$$E[t_{\alpha\beta}] = \frac{a_{\alpha\beta} + 4m_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}}{6}, \quad D^2[t_{\alpha\beta}] = \left(\frac{b_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}}{6} \right)^2$$

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Algorytm metody PERT:

Sieć przedsięwzięcia $G = \langle V, U, a, m, b \rangle$ ma trzy funkcje obciążające jej łuki: $a, b, m: U \rightarrow R^+$, których wartości na łuku czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ reprezentują odpowiednio: $a_{\alpha\beta}$ - optymistyczną, $m_{\alpha\beta}$ - najbardziej prawdopodobną oraz $b_{\alpha\beta}$ - pesymistyczną ocenę czasu $t_{\alpha\beta}$ - trwania takiej czynności.

Parametry te służą do aproksymacji wartości oczekiwanej oraz wariancji czasu trwania czynności (zgodnie ze wzorami (*)).

Podstawowym zadaniem metody **PERT** jest oszacowanie wartości oczekiwanych najwcześniejszych terminów - t_α realizacji zdarzeń $v_\alpha \in V$ w badanej sieci realizacji przedsięwzięcia.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Algorytm jest oparty o wzory rekurencyjne i polega na:

1. Przyjęciu założenia, że $E[t_1] = D^2[t_1] = 0$, gdzie v_1 - jest wierzchołkiem początkowym sieci realizacji przedsięwzięcia.
2. Wartość oczekiwaną $E[t_\beta]$ oraz wariancję $D^2[t_\beta]$ najwcześniejszego możliwego terminu zajścia dla pozostałych zdarzeń $\beta = 2, 3, \dots, n$ oblicza się ze wzorów:

$$E[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]\},$$
$$D^2[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-; E[t_\beta] = E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]} \{D^2[t_\alpha] + D^2[t_{\alpha\beta}]\},$$

Zauważmy, że wartości oczekiwane czasów t_β są wyznaczone analogicznie jak w metodzie CPM. Dlatego obie metody dają identyczne wyniki, jeśli tylko dla każdej czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ spełniony jest następujący warunek: $a_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Uwaga: W metodzie PERT definiuje się także drogi krytyczne $[1,n]$, dla których wartość oczekiwana czasu ich realizacji jest równa średniemu czasowi zakończenia całego przedsięwzięcia:

$$E[t_n] = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,n]}} E[t_{ij}],$$

gdzie: $U_{[1,n]}$ - jest zbiorem łuków ścieżki krytycznej od wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego sieci czynności.

Uwaga: Wariancja czasu t_n najwcześniejszej możliwej realizacji zdarzenia końcowego $v_n \in V$ jest równa maksymalnej wariancji ze zbioru wszystkich dróg krytycznych badanej sieci przedsięwzięcia.

Przyjmuje się, że rozkład czasu realizacji całego przedsięwzięcia jest asymptotycznie normalny o średniej $E[t_n]$ i odchyleniu standardowym $\sigma[t_n] = \sqrt{D^2[t_n]}$, czyli korzystając z tego założenia można oszacować prawdopodobieństwo dotrzymania terminu realizacji przedsięwzięcia:

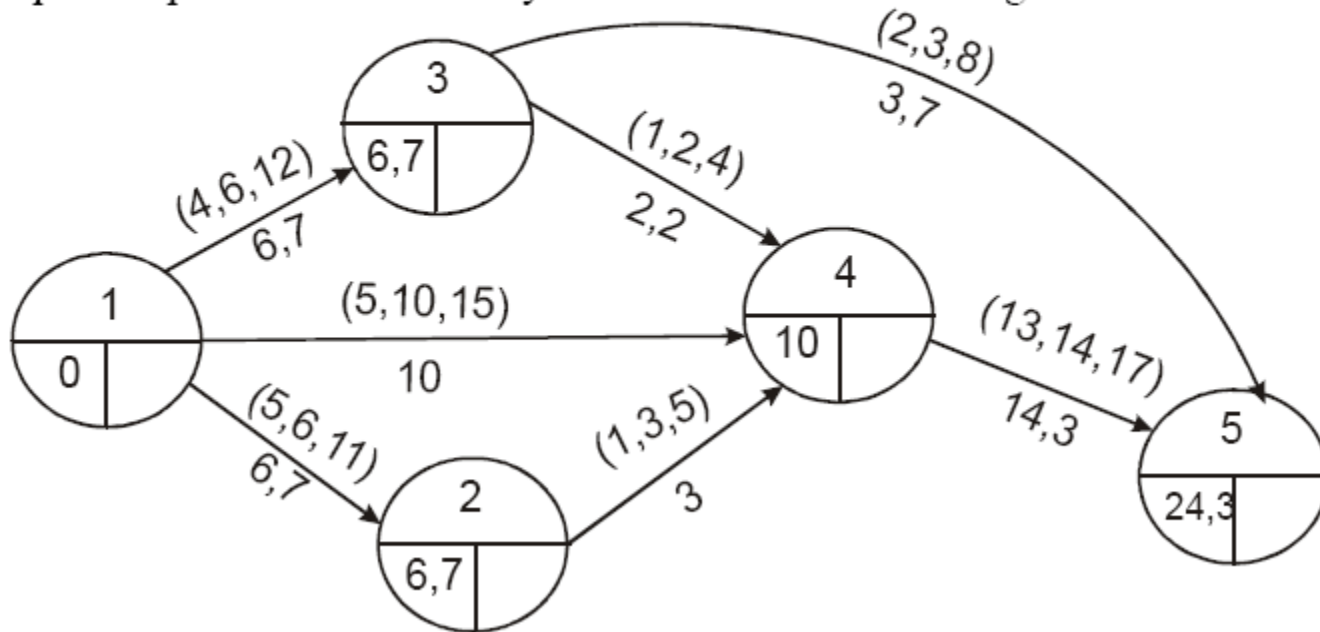
$$P(t_n \leq t_{dane}) \approx \Phi\left(\frac{t_{dane} - E[t_n]}{\sigma[t_n]}\right),$$

gdzie: Φ - jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Przykład:

Dla przedsięwzięcia, którego model sieciowy przedstawiono na rysunku obliczyć średni (oczekiwany) czas jego realizacji, wariancję czasu jego realizacji oraz prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego $T^* = 25$ dni.



□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Średnie czasy trwania czynności i wariancje dla czynności obliczamy:

$$E[t_{\alpha\beta}] = \frac{a_{\alpha\beta} + 4m_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}}{6}, \quad D^2[t_{\alpha\beta}] = \left(\frac{b_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}}{6} \right)^2$$

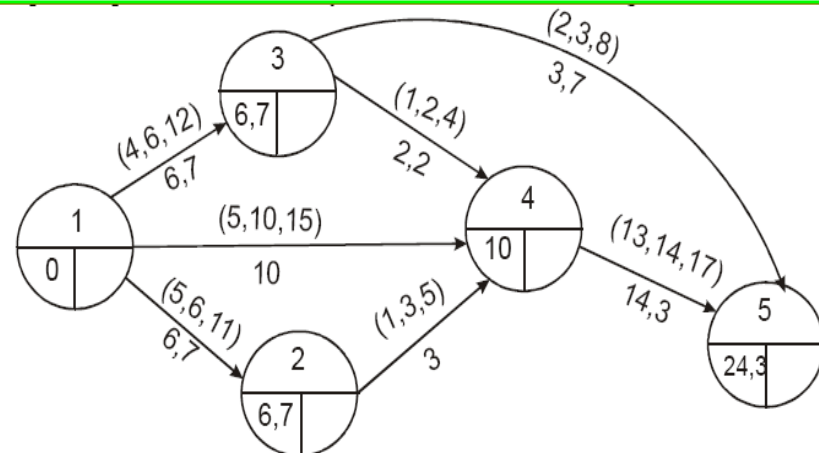
Oczekiwany czas trwania przedsięwzięcia i jego wariancję obliczamy rekurencyjnie:

$$E[t_{\beta}] = \max_{\nu_{\alpha} \in \Gamma_{\beta}^-} \{E[t_{\alpha}] + E[t_{\alpha\beta}]\},$$

$$D^2[t_{\beta}] = \max_{\nu_{\alpha} \in \Gamma_{\beta}^-; E[t_{\beta}] = E[t_{\alpha}] + E[t_{\alpha\beta}]} \{D^2[t_{\alpha}] + D^2[t_{\alpha\beta}]\}$$

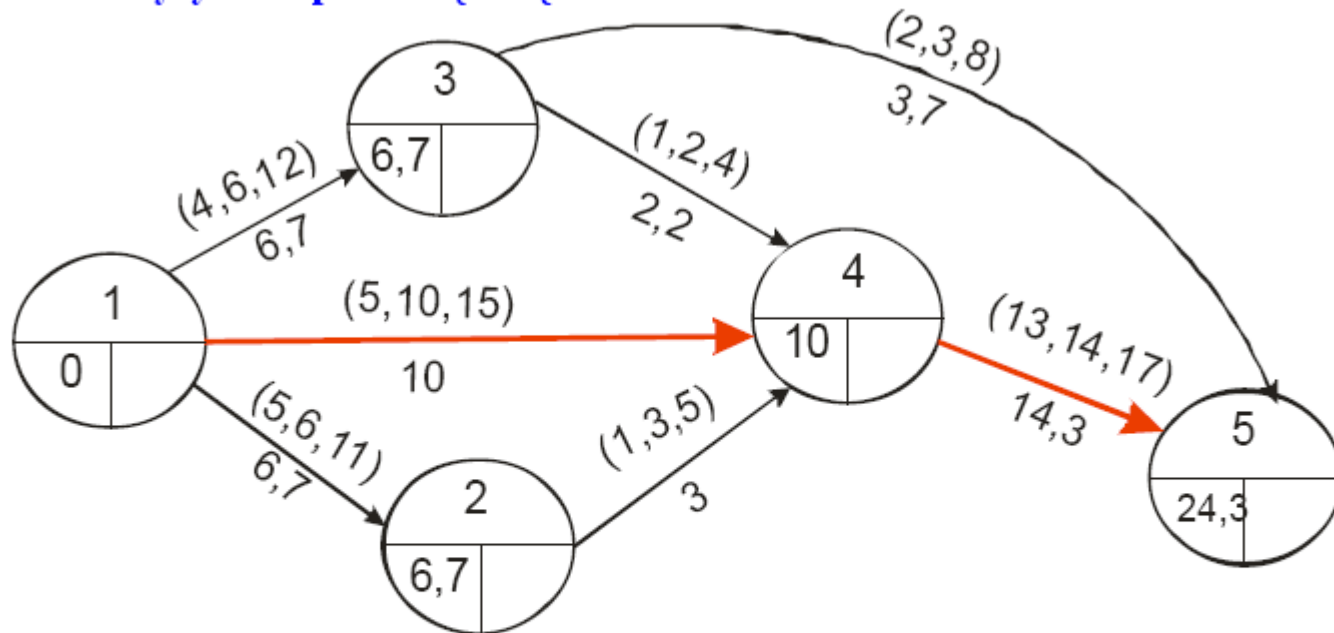
Tabela obliczonych charakterystyk przedsięwzięcia:

| Zdarzenie: | $D^2[t_{\beta}]$ | Czynność: | $D^2[t_{\alpha\beta}]$ |
|------------|------------------|-----------|------------------------|
| 1 | 0 | (1,2) | 1 |
| 2 | 1 | (1,3) | 1,8 |
| 3 | 1,8 | (1,4) | 2,8 |
| 4 | 2,8 | (2,4) | 0,4 |
| 5 | 3,2 | (3,4) | 0,25 |
| | | (3,5) | 1 |
| | | (4,5) | 0,4 |



□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Ścieżka krytyczna przedsięwzięcia:



- Prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego = 25 dni wynosi:

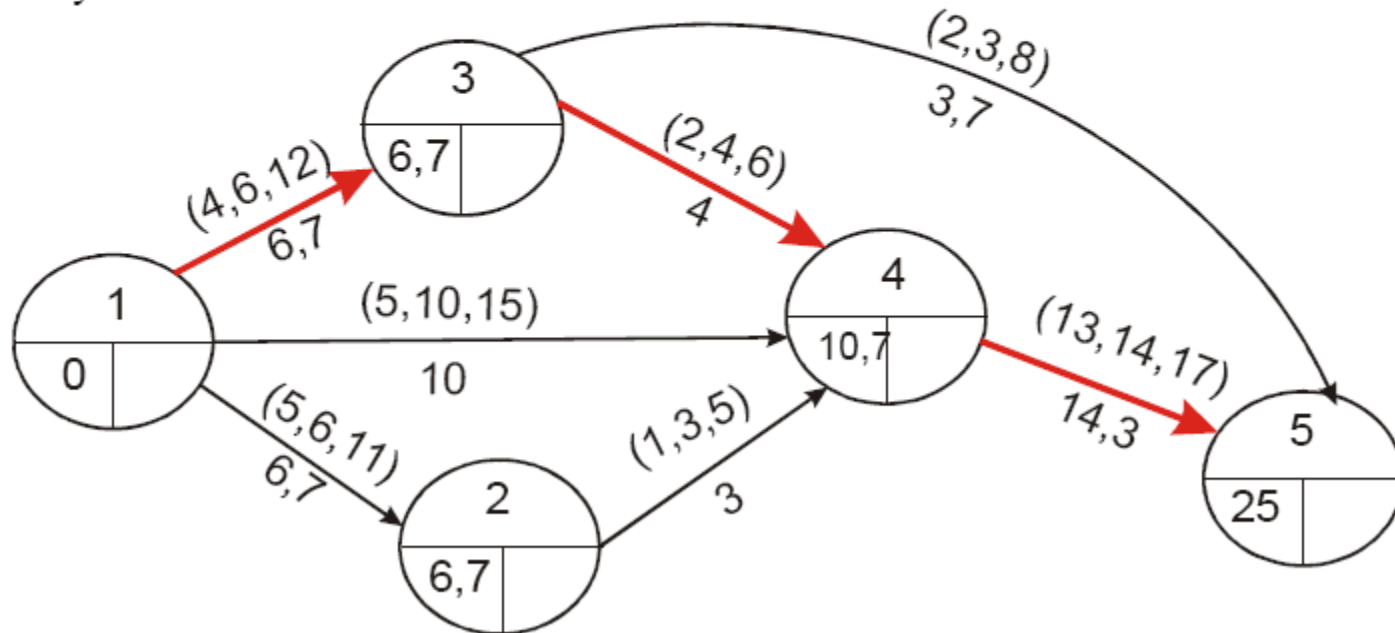
$$P(t_5 \leq 25) \approx \Phi\left(\frac{25 - 24,3}{\sqrt{3,2}}\right) \approx \Phi(0,39) \approx 0,52 \quad - \quad \text{istnieje przeciętne ryzyko}$$

związane z realizacją tego przedsięwzięcia.

□ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

- Jak zmieni się czas wykonania przedsięwzięcia, gdy czynność: (3,4) będzie realizowana w czasie: najkrótszym – **2 dni**, modalnym – **4 dni** oraz najdłuższym – **6 dni** ?

Powstanie nowa ścieżka krytyczna, a oczekiwany termin realizacji ulegnie wydłużeniu do 25 dni.



ANALIZA CZASOWO – KOSZTOWA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

W rozważaniach dotyczących sieciowej analizy przedsięwzięć z funkcją czasu (metoda CPM) konstruując optymalny harmonogram realizacji przedsięwzięcia przyjętym **kryterium** optymalności była **minimalizacja czasu** realizacji całego przedsięwzięcia.

W analizie ekonomicznej realizowanych przedsięwzięć niezmiernie ważne jest także **podejście kosztowe** – mające na celu oszacowanie kosztów realizacji badanego przedsięwzięcia.

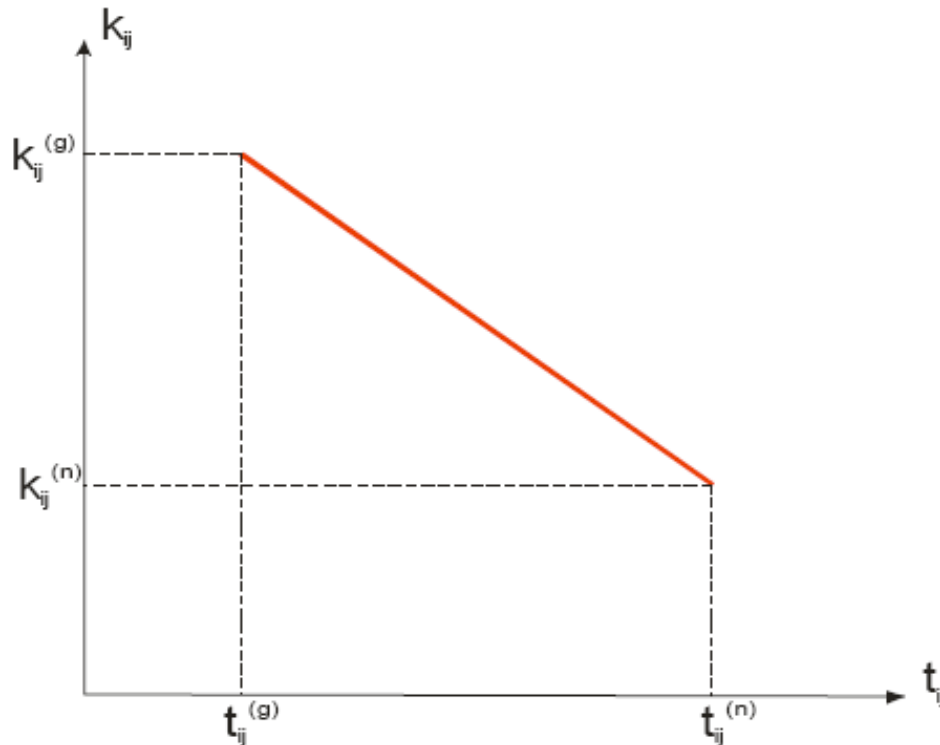
Analiza harmonogramu realizacji przedsięwzięć z uwzględnieniem kosztów ich realizacji nosi nazwę **analizy czasowo – kosztowej** i posiada w planowaniu sieciowym bardzo ważną rolę.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że czas trwania poszczególnych czynności jest ustalony i związany jest on z wykonaniem czynności w zwykłych (normalnych warunkach). Taki czas wykonania czynności będziemy nazywać – **normalnym czasem trwania czynności** : $t_{ij}^{(n)}$, a koszt związany z realizacją czynności w tym czasie nazywać będziemy – kosztem normalnym: $k_{ij}^{(n)}$.

W niektórych przypadkach **czasy** trwania czynności mogą **ulec skróceniu**. Wiąże się to jednak za koniecznym zaangażowaniem dodatkowych środków, co pociąga za sobą **wzrost kosztów** wykonania tej czynności.

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Najkrótszy możliwy czas, w którym wykonana dana czynność z wykorzystaniem wszystkich zaangażowanych środków – nazywamy **granicznym czasem** trwania czynności: $t_{ij}^{(g)}$. Koszt realizacji czynności w czasie granicznym nazywamy **kosztem granicznym**: $k_{ij}^{(g)}$.



Uwaga:

Zakładamy, że funkcję kosztów w przedziale $[t_{ij}^{(g)}, t_{ij}^{(n)}]$ można aproksymować funkcją liniową, a skrócenie czasu trwania jednej czynności nie wpływa na czas trwania pozostałych.

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Przyjmujemy oznaczenia:

$\Delta t_{ij} = t_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(g)}$ - odcinek czasu o jaki możemy maksymalnie skrócić czynności przedsięwzięcia (wykonywane w czasie normalnym) do czasów granicznych;

$\Delta k_{ij} = k_{ij}^{(g)} - k_{ij}^{(n)}$ - wzrost kosztów realizacji czynności wynikający ze skrócenia czasów trwania czynności do czasów granicznych;

$S_{ij} = \frac{k_{ij}^{(g)} - k_{ij}^{(n)}}{t_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(g)}}$ - **średni gradient kosztu** – określa przyrost kosztów

wykonania czynności spowodowany skróceniem czasu trwania czynności o jednostkę.

W tak pojmowanym planowaniu sieciowym bardzo ważnym zagadnieniem programowania sieciowego jest wszechstronna analiza przedsięwzięć w aspekcie ekonomicznym oraz możliwość modyfikacji modelu, poprzez kompresję sieci – wynikającą ze **zbyt długiego** dla inwestora lub odbiorcy okresu realizacji przedsięwzięcia.

Względy ekonomiczne powodują, że należy rozpatrzyć techniczne możliwości **skrócenia** wykonania całego przedsięwzięcia, aby **koszty** jego realizacji były **jak najniższe**.

Wiązać się to będzie z ułożeniem takiego programu przyspieszenia, aby największa akceleracja przypadała na te czynności krytyczne, których koszty przyspieszenia będą najniższe.

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

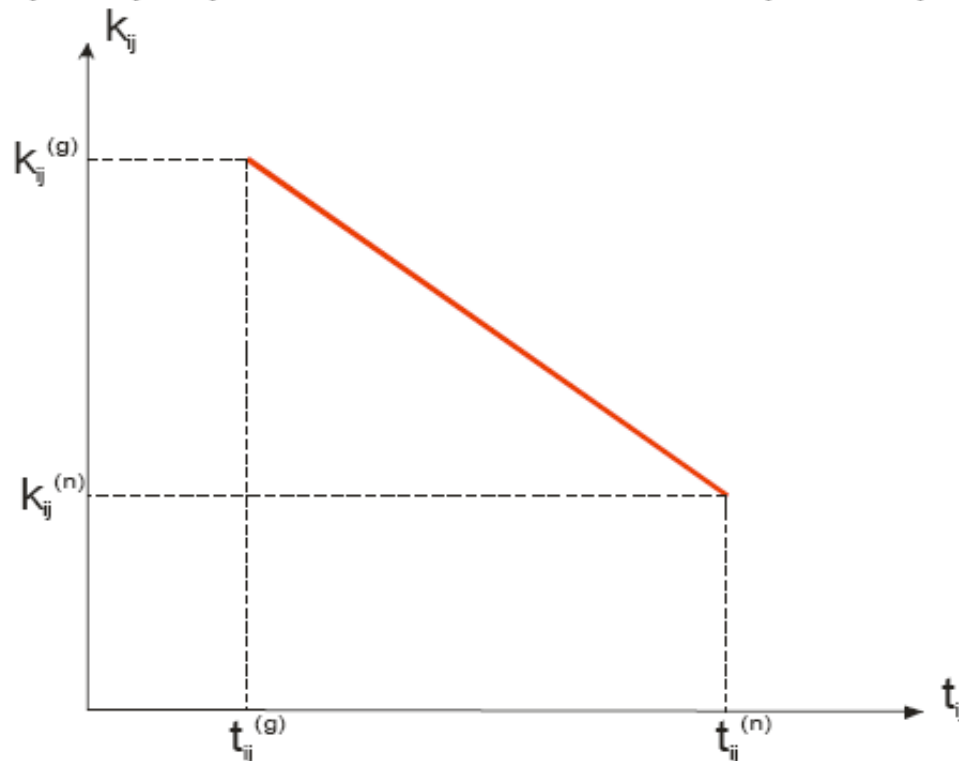
W tego typu analizie rozpatruje się różnego rodzaju koszty składające się na sumaryczny koszt realizacji całego przedsięwzięcia. Uwzględnia się zazwyczaj następujące rodzaje kosztów:

- **Koszty stałe** (dotyczące sporządzenia dokumentacji, pozyskania środków wytwarzania itp.);
- **Koszty bezpośrednie** (dotyczące robocizny, materiałów, maszyn itp. – występują dla każdej czynności przedsięwzięcia);
- **Koszty pośrednie** (związane głównie z czasem realizacji przedsięwzięcia i dotyczą dla przykładu przestojów na stanowiskach pracy, kar za nieterminowość wykonania itp.);
- **Koszty zamrożenia kapitału** (dotyczące nakładów inwestycyjnych, zasobów itp.)

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

W rozważaniach ograniczymy się tylko do kosztów bezpośrednich.

Koszty bezpośrednie wykonania czynności dla dowolnego czasu jej trwania $t_{ij}^{(g)} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{(n)}$ można obliczyć ze wzoru: $k_{ij} = -a \cdot t_{ij} + b = -s_{ij}t_{ij} + (k_{ij}^{(n)} + s_{ij}t_{ij}^{(n)})$



□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Celem analizy czasowo kosztowej jest wyznaczenie takich czasów trwania poszczególnych czynności, dla których całkowity koszt bezpośredni realizacji przedsięwzięcia jest minimalny. Zadanie to można przedstawić za pomocą następującego zadania – ZPL:

$$K = \sum_{(i,j) \in U} \left[\left(k_{ij}^{(n)} + s_{ij} t_{ij}^{(n)} \right) - s_{ij} t_{ij} \right] \rightarrow \min$$

Przy warunkach dla każdej czynności sieci $(i, j) \in U$:

$$\begin{cases} t_i + t_{ij} \leq t_j, \\ t_{ij}^{(g)} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{(n)}, \\ t_1 = 0, t_n \leq T^{(g)} \end{cases}$$

gdzie: $T^{(g)}$ - czas graniczny zakończenia przedsięwzięcia.

□ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Uwaga :

Można również sformułować inaczej problem, tzn. minimalizować łączny czas realizacji całego przedsięwzięcia, tak aby łączne koszty bezpośrednie tego przedsięwzięcia nie przekroczyły pewnego - z góry ustalonego limitu środków. Tak sformułowane zagadnienie prowadzi do następującego zadania ZPL:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_n \rightarrow \min, \\ t_i + t_{ij} \leq t_j, \quad t_{ij}^{(g)} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{(n)} \quad \text{dla } (i,j) \in U, \\ \sum_{(i,j) \in U} [(k_{ij}^{(n)} + s_{ij} t_{ij}^{(n)}) - s_{ij} t_{ij}] \leq K, \end{array} \right.$$

W ułożeniu programu przyspieszającego wykonanie przedsięwzięcia pomaga wykorzystanie specjalnego algorytmu analizy czasowo-kosztowej znanego pod nazwą: **CPM - COST**.

Zastosowanie algorytmu kompensacji sieci zostanie omówione na następującym przykładzie.