ZAGADNIENIA

OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Ogólny problemem optymalizacji nieliniowej (programowaniem nieliniowym) nazywamy zadanie decyzyjne postaci:

$$f(x_1,\dots,x_n)\to \max(\min)$$

$$(1)\quad \begin{cases} g^j(x_1,\dots,x_n)-c_j\le 0 \ \text{ dla } \ (j=1,\dots,r); \\ g^j(x_1,\dots,x_n)-c_j=0 \ \text{ dla } \ (j=r+1,\dots,m); \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\dots x_n\ge 0. \end{cases}$$

gdy funkcja celu $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$, lub chociaż jeden z warunków ograniczających: $g^j(x)=g^j(x_1,\dots,x_n)$ jest **funkcją nieliniową**.

Jeżeli w zadaniu (1) warunki ograniczające nie występują, a funkcja celu jest postaci nieliniowej, to zadanie takie nosi nazwę optymalizacji bezwarunkowej (problemu bez ograniczeń).

Zakładamy, że funkcje: f, g^j - są funkcjami ciągłymi.

Niech $D\subset R^n$ będzie zbiorem wypukłym, funkcję o wartościach rzeczywistych nazywamy funkcją wypukłą w zbiorze D, jeżeli dla dowolnych $x^1, x^2\in D$ oraz dowolnego $\alpha\in[0,1]$ zachodzi nierówność:

$$f\left[\alpha x^1+(1-\alpha)x^2\right]\le \alpha f(x^1)+(1-\alpha)f(x^2)$$

Jeżeli $x^1\ne x^2$ i $\alpha\in(0,1)$ oraz spełniona jest nierówność:

$f\left[\alpha x^1+(1-\alpha)x^2\right]<\alpha f(x^1)+(1-\alpha)f(x^2)$, to funkcję f – nazywamy ściśle wypukłą

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wklęsłą jeśli funkcja $-f(x)$ - jest wypukła (i odwrotnie).

Funkcja $f(x)$ jest funkcją ściśle wklęsłą jeśli funkcja $-f(x)$ - jest ściśle wypukła (i na odwrót).

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Załóżmy, że funkcja f – jest różniczkowalna w R^n, wektor $\nabla f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$ - nazywa się gradientem funkcji f w punkcie x_0 - wskazuje kierunek, w którym przyrost wartości funkcji jest największy.

Załóżmy, że funkcja f – jest dwukrotnie różniczkowalna w R^n, to macierz:

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$ - nazywa się Hesjanem funkcji

Funkcja jest wypukła w otwartym (niezawierającym punktów brzegowych) zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$ - Hesjan jest nieujemnie określony.

Funkcja jest ściśle wypukła w otwartym (niezawierającym punktów brzegowych) zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$ - Hesjan jest dodatnio określony.

Macierz kwadratową $A = \left[a_{i,j}\right]_{n\times n}$, nazywamy dodatnio określoną, gdy: $M_1 = a_{11} > 0$,

$$M_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \ldots, M_n = \det\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{12} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} > 0$$

Macierz nazywamy ujemnie określoną, gdy: $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \ldots$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Problemy optymalizacji nieliniowej dzielimy ogólnie na:

- problemy programowania wypukłego
  - Minimalizacja funkcji celu wypukłej, lub maksymalizacja funkcji celu wklęsłej
  - zbiór warunków ograniczających jest zbiorem wypukłym

  Niech funkcje: $f, g^j; j=1,..,m_1, h^j; j=1,\ldots,m_2$ - są funkcjami wypukłymi, wtedy można udowodnić, że zbiory ograniczone warunkami: $g^j(x_1,\ldots,x_n)-c_j \le 0$ oraz $h^j(x_1,\ldots,x_n)-c_j = 0$ są zbiorami wypukłymi. Ponieważ część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więc zadania programowania wypukłego przyjmują postać:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \min$$

lub

$$-f(x_1,\ldots,x_n) \to \max$$

  Przy warunkach:

$$\begin{cases} g^j(x_1,\ldots,x_n) \le 0 \;\text{ dla }\; (j=1,\ldots,m_1); \\ h^j(x_1,\ldots,x_n)=0 \;\text{ dla }\; (j=1,\ldots,m_2); \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0. \end{cases}$$

- problemy programowania niewypukłego

  problemy decyzyjne nieliniowe, które niespełnianą warunków programowania wypukłego nazywamy zadaniami programowania niewypukłego

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Szczególnym przypadkiem zadań programowania wypukłego jest programowanie kwadratowe.

Zakłada on, że funkcja celu jest wypukłą funkcją kwadratową, zaś funkcje $g^j(x_1,\dots,x_n)$ z warunków ograniczających są funkcjami liniowymi (a więc tworzą obszar wypukły).

Zadanie programowania kwadratowego przyjmuje postać:

$$cx + \frac{1}{2}x^T Ex \to \min$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

gdzie:

$x = [x_1,\dots,x_n]^T$ - wektor kolumnowy zmiennych decyzyjnych

$c = [c_1,\dots,c_n]$ - wektor wierszowy współczynników funkcji celu składnika liniowego

$b = [b_1,\dots,b_m]^T$ - wektor kolumnowy wyrazów wolnych

$A = [a_{i,j}]_{n\times m}$ - macierz współczynników warunków (po lewej stronie warunków),

$E = [e_{i,j}]_{n\times n}$ - macierz ujemnie określona – współczynników składnika kwadratowego (co gwarantuje wypukłość składnika kwadratowego funkcji celu)

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

3. Metoda czynników nieoznaczonych Lagrange'a:

Dla prostych zagadnień optymalizacji nieliniowej, z warunkami ograniczającymi w postaci równań (postać kanoniczna) możemy zastosować technikę – **podstawiania i eliminacji zmiennych**.

Dla przykładu rozpatrzmy konsumenta o prostej funkcji użyteczności postaci: $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1$, której dziedzina: $D = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Wyznaczając użyteczności krańcowe otrzymujemy:

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2 + 2 > 0, \text{ gdy} : x_2 \text{ - dodatnie};$$

$$U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1 > 0, \text{ gdy} : x_1 \text{ - dodatnie};$$

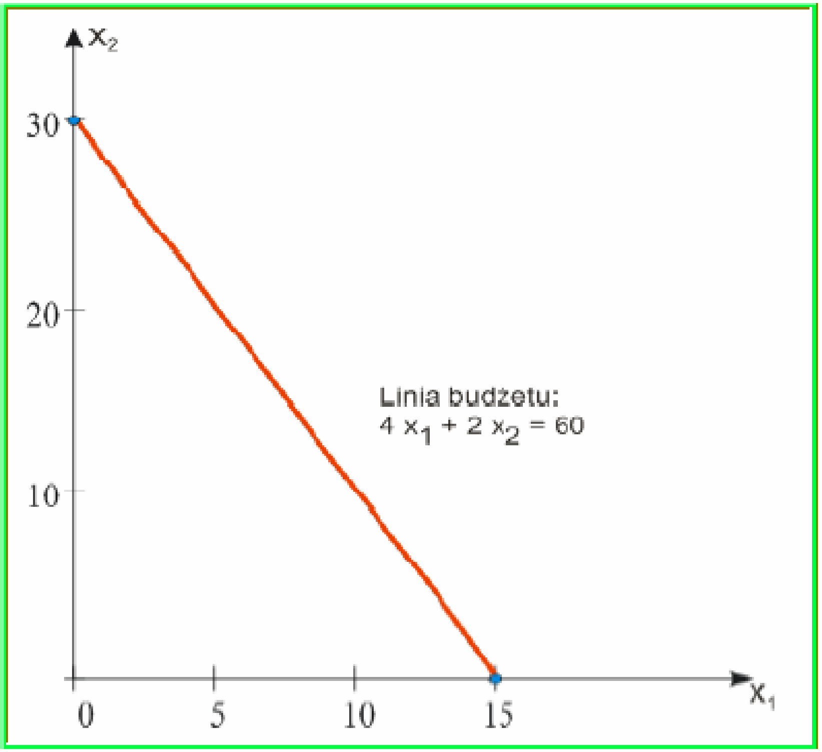
Chcąc zmaksymalizować użyteczność koszyka swoich dóbr bez żadnych ograniczeń, konsument powinien zatem nabywać nieskończone ilości obu dóbr – co w praktycznych rozważaniach nie ma sensu. Aby rozważane zagadnienie optymalizacyjne miało praktyczny sens należy uwzględnić siłę nabywczą konsumenta – czyli siłę nabywczą jego pieniędzy (tzw. ograniczenia budżetowe).

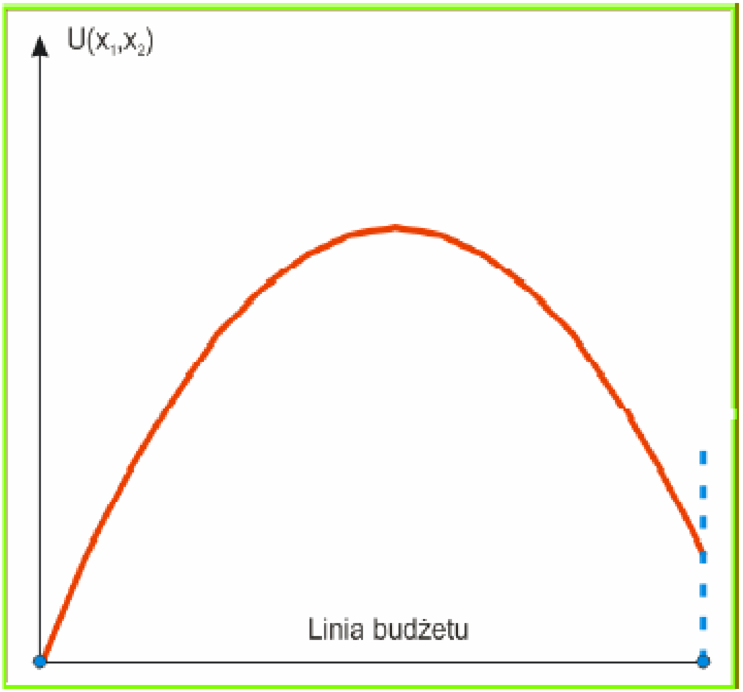
❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Ograniczenie budżetowe: $4x_1 + 2x_2 = 60$ [zł].

Powierzchnia użyteczności :

$$U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1$$





❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Metoda podstawiania i eliminacji zmiennych dla naszego przykładu polega na wyznaczeniu z warunku ograniczającego jednej ze zmiennych jako funkcji drugiej: $4x_1 + 2x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 30 - 2x_1$. Zależność tę możemy powiązać z funkcją celu: $U(x_1) = x_1(30 - 2x_1) + 2x_1 = 32x_1 - 2x_1^2$.

Ponieważ: $\frac{dU}{dx_1} = 32 - 4x_1 \Rightarrow \frac{dU}{dx_1} = 0 \Leftrightarrow x_1^* = 8$, zaś $\frac{d^2U}{dx_1} = -4 < 0$, zatem funkcja celu posiada maksimum w punkcie: $x_1^* = 8$, $x_2^* = 30 - 2x_1^* \Rightarrow x_2^* = 30 - 2 \cdot 8 = 14$.

Wartość tego maksimum wynosi: $U(8{,}14) = 8 \cdot 14 + 2 \cdot 8 = 128$.

Uwaga: zastosowanie tej metody jest ograniczone, gdy liczba warunków ograniczających jest bardzo duża, analityczna postać tych warunków bardzo skomplikowana lub gdy nie można rozwikłać z tych warunków jednej ze zmiennych i przedstawić jej w zależności od pozostałych.

Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Dla zadań optymalizacji nieliniowej w postaci kanonicznej (warunki ograniczające w postaci równości) możemy w ogólnym przypadku zastosować metodę tzw. czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

W metodzie tej zamiast poszukiwać ekstremum warunkowego postaci:

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min)$$

$$(2) \quad \begin{cases} g^j(x_1,\dots,x_n) - c_j = 0 \quad \text{dla} \quad (j = 1,\dots,m); \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_n \geq 0. \end{cases}$$

poszukujemy ekstremum bezwarunkowego dla tzw. funkcji Lagrange'a utworzonej w oparciu o wyjściową funkcje celu f(X) poprzez włączenie do tej funkcji warunków ograniczających z odpowiednimi (sztucznie wprowadzonymi) czynnikami nieoznaczonymi (zakładamy, że m<n).

Dla zadania programowania nieliniowego w postaci kanonicznej (2) funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(X;\lambda) = L(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\dots,x_n)\right]$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego zadania jest następujący: zerowanie się pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a:

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = c_j - g^j(x_1,\dots,x_n) = 0; \quad \text{dla} \quad (j = 1,\dots,m); \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i} = 0; \quad \text{dla} \quad (i = 1,2,\dots,n); \end{cases}$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej – zagadnienia ogólne

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego zadania (2) w postaci kanonicznej jest następujący:

$$L = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1,\ldots,x_n) \right]$$ **- Funkcja Lagrange'a ($m<n$)**

Hesjan obrzeżony

$$\left|\overline{H}\right| = \left| \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \ldots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \ldots & g_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \ldots & g_n^m \\ \hline g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^m & L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{array} \right|$$

gdzie: $g_i^j = \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i};\ L_{pq} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_q \partial x_p}$

$\left|\overline{H}_2\right|$

Dla maksimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby $\left|\overline{H}_{m+1}\right|, \left|\overline{H}_{m+2}\right|, \ldots, \left|\overline{H}_n\right| = \left|\overline{H}\right|$ **zmieniały znak (dla** $\left|\overline{H}_{m+1}\right|$ **znak taki jak** $(-1)^{m+1}$ **)**

Dla minimum funkcji f – warunkiem dostatecznym jest, aby miały one ten sam znak (i to taki jak dla $(-1)^m$ **)**

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

4. Przykłady nieliniowych problemów decyzyjnych – zagadnienie wyboru środków przekazu reklamy.

Załóżmy, że firma dysponuje pewną ilością środków pieniężnych na reklamę nowego produktu w środkach masowego przekazu (do wyboru n – czasopism, w których można zamówić reklamę produktu).

Zasięg reklamy w danym czasopiśmie zależy od:

- nakładu czasopisma;
- od tego ile razy zamieszczamy reklamę w tym czasopiśmie.

Jeżeli reklamę w danym czasopiśmie zamieścimy 8 razy to na pewno firma dotrze do większej liczby czytelników niż gdyby zamieściła reklamę tylko 2 razy. Nie będzie to jednak zasięg 4 – krotnie większy (gdyż do niektórych czytelników trafiamy z tą samą reklamą kilkakrotnie). Zatem funkcja zasięgu reklamy powinna być funkcją rosnącą (w zależności od liczby zamieszczeń reklamy), ale funkcją wklęsłą (pierwsza pochodna malejąca). Może być to dla przykładu wklęsła funkcja kwadratowa.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Oznaczmy przez:

A – fundusz na reklamę;
a_j – koszt zamieszczenia jednej reklamy w j – tym czasopiśmie;
b_j – minimalna liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
d_j – maksymalna liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
x_j – liczba zamieszczeń reklamy w j – tym czasopiśmie;
$f_j(x_j)$ - zasięg reklamy (liczba czytelników) w j – tym czasopiśmie, jeżeli dokonano w nim x_j – zamieszczeń;
$f_j(x_j) = c_j x_j - r_j x_j^2$ - analityczna postać zasięgu reklamy, gdzie: c_j – maksymalny zasięg w przypadku jednostkowej reklamy w j – tym czasopiśmie, r_j – tempo spadku przeciętnego zasięgu w przypadku powtórzeń;

Zadanie decyzyjne:

Znaleźć takie wartości zmiennych x_j, aby:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max$$

przy warunkach:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le A \ \text{(koszty reklamy)}; \quad b_j \le x_j \le d_j \quad (j = 1, \ldots, n) \ \text{(liczba zamieszczeń)};$$

x_j – całkowite.

Uwaga: zadanie to jest bardzo trudne do rozwiązania ze względu na nieliniową funkcje celu i całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych. Jeżeli pominiemy warunek całkowitoliczbowości staje się zadaniem programowania kwadratowego i można je rozwiązać stosując np. algorytm Beale'a (zob. Ignasiak: Badania Operacyjne – str 166).

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Nieliniowe zagadnienie transportowo-produkcyjne do zagadnienia utylizacji odpadów

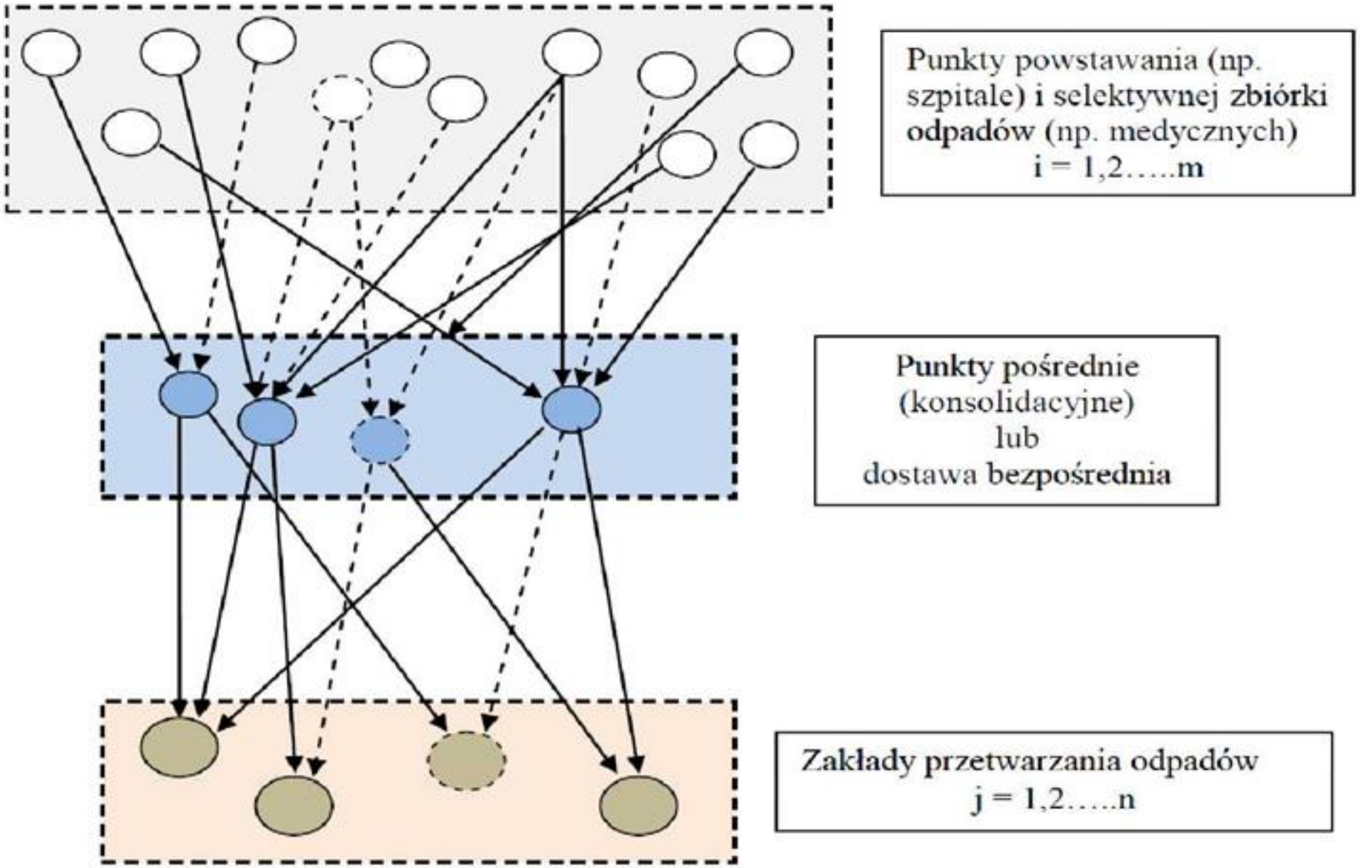
W odniesieniu do przetwarzania odpadów problem transportowo - produkcyjny powinno się rozważyć w co najmniej dwóch aspektach:

- **aspekt ogólny:** dla istniejącej sieci punktów gromadzenia odpadów i zakładów ich przetwarzania, zgodnie z przyjętym algorytmem, należy wyznaczyć optymalny pod względem kosztowym rozdział zadań przewozowych do odpowiednich zakładów przetwarzania odpadów,
- **aspekt szczególny:** dla istniejącej sieci punktów gromadzenia odpadów i jednego zakładu (np. spalarnia odpadów niebezpiecznych) przetwarzającego odpady co najmniej dwoma technologiami, należy zoptymalizować rozdział zadań przewozowych i produkcyjnych na poszczególne technologie przetwarzania.

W obydwu zadaniach bardzo ważna (konieczna) jest znajomość funkcji (nieliniowej) opisującej koszty procesów przetwarzania odpadów. opis tej funkcji można uzyskać w wyniku aproksymacji wielomianowej kosztów przetwarzania odpadów ponoszonych w minionych okresach.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Na rysunku przedstawiono schematycznie rozważany problem zadania transportowo - produkcyjnego (ZPT) dla przypadku selektywnego gromadzenia odpadów, a następnie przewozu odpadów do istniejących punktów ich przetwarzania.



❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Model matematyczny zagadnienia:

Przedsiębiorstwo przetwarzające jednorodny surowiec posiada ***m*** - punktów gromadzenia surowca oraz ***n*** - zakładów przetwarzających ten surowiec.

Dodatkowo należy znać:

- jednostkowe koszty transportu od każdego punktu gromadzenia do poszczególnych zakładów przetwórczych,
- ilość surowca zgromadzonego w każdym punkcie dostaw,
- funkcje określające koszt przerobu surowca w każdym zakładzie w zależności od wielkości przerobu.

Funkcje określające koszty przerobu są funkcjami wypukłymi i kwadratowymi. Uwzględniają one tylko koszty zmienne, czyli zależne od rozmiarów produkcji.

Całość nabytego surowca musi być przewieziona do zakładów i tam przerobiona. Przyjmuje się, że zakłady są w stanie przetworzyć dostarczoną ilość surowca (znane są możliwości przerobowe zakładów).

Zwiększa to zdolności produkcyjne zakładów, ale powoduje także wzrost jednostkowych kosztów produkcji. Rosnące koszty przerobu są naturalnym ograniczeniem rozmiarów produkcji w każdym zakładzie.

Należy ustalić taki plan dostaw surowca do poszczególnych zakładów oraz przerobu surowca w tych zakładach, aby łączne koszty transportu i przerobu były minimalne.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Przyjęto następujące oznaczenia:
i - numer punktu gromadzenia (numer dostawcy),
j - numer zakładu przetwórczego (numer odbiorcy),
$x_{i,j}$ - ilość surowca przesłana od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
x_j - ilość surowca przerobiona przez j-tego odbiorcę,
b_j - zdolności przerobowe surowca dla j-tego odbiorcy
a_i - ilość surowca, jaką musi wysłać i-ty dostawca,
$c_{i,j}$ - jednostkowy koszt transportu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
$f_j(x_j)$ - koszt przerobu jednostek surowca w j-tym zakładzie (u j-tego odbiorcy).

Ponadto przyjęto, że wypukła funkcja kosztu f_j jest wielomianem drugiego stopnia postaci:

$$f_j(x_j) = c_j x_j + e_j x_j^2; \quad c_j, e_j > 0$$

gdzie:
c_j - opisuje minimalny koszt jednostkowy przerobu
e_j - wyznacza tempo wzrostu kosztu jednostkowego

Pierwsza pochodna funkcji kosztów przerobu określa koszt krańcowy przerobu:

$$F_j'(x_j) = c_j + 2e_j x_j$$

Natomiast druga pochodna - tempo wzrostu kosztu krańcowego:

$$F''(x_j) = 2e_j$$

Koszt przeciętny przerobu w j-tym zakładzie określony jest wzorem:

$$K_j^P(x_j) = c_j + e_j x_j$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Problem ustalenia optymalnego planu dostaw surowca i jego przerobu można przedstawić w postaci nieliniowego zadania decyzyjnego:

Poszukiwane są takie wartości zmiennych $x_{i,j}$ oraz x_j, aby:

Funkcja celu

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \rightarrow \min$$

minimalizuje łączne koszty transportu i przerobu

Przy warunkach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i, \quad (i = 1,\dots,m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = x_j \le b_j, \quad (j = 1,\dots,n);$$

$$x_{i,j} \ge 0, \quad (i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n)$$

Warunki: $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i$ - zapewniają, że każdy dostawca wyśle całość posiadanego surowca

Warunki: $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = x_j \le b_j$ - wymuszają przerób w j-tym zakładzie całego surowca jaki do niego został dostarczony, przy jednoczesnym nieprzekroczeniu zdolności przerobowych.

Zadanie to jest zadaniem programowania kwadratowego o specjalnej - transportowej strukturze.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Przykład praktyczny:
Badaniom poddano dostawy odpadów medycznych w województwie podkarpackim (około 2 000 Mg/rok – ton/rok).
W województwie źródłem odpadów jest 60 szpitali (małe, duże) oraz wiele ośrodków opieki zdrowotnej (nie uwzględnianych w obliczeniach).

Na terenie podkarpackiego istnieją 2 spalarnie:
ECO-TOP Rzeszów - 0.29 Mg/h,
RAF-Ekologia Jedlicze - 1.13 Mg/h,
oraz 3 małe zakłady utylizacji odpadów medycznych.

W obliczeniach uwzględniono:

Rzeszów (5), Krosno (5), Przemyśl (3), Jasło (2), Sanok (1), Dębica (1)

razem: 6 dostawców (17 szpitali - dużych)

Zadanie sformułowano następująco:
6 dostawców: D1, D2, D3, D4, D5, D6 zaopatruje w odpady medyczne 2 spalarnie: S1, S2 przy ograniczeniach:
S1: może przyjąć i przetworzyć 700 lub 1000 Mg odpadów,
S2: może przyjąć i przetworzyć 1 500 Mg odpadów.

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Dane zestawiono w tabeli i obejmują:

- jednostkowe koszty transportu (w zł za tkm)
- oferowane miesięcznie wielkości dostaw A_i (w tonach)
- miesięczne zapotrzebowanie spalarni B_j (w tonach)

Tabela. Jednostkowe koszty transportu, podaż i popyt

Dostawcy	Spalarnie wariant v1			Spalarnie wariant v2	
	S1 (RZ)	**S2 (JE)**	**podaż** A_i [Mg]	**S1 (RZ)**	**S2 (JE)**
D1 (Rzeszów)	5	60	500	5	60
D2 (Dębica)	40	60	80	40	60
D3 (Jasło)	70	15	200	70	15
D4 (Krosno)	70	5	400	70	5
D5 (Sanok)	100	50	120	100	50
D6 (Przemyśl)	100	80	300	80	100
Popyt B_j [Mg]	700	1500	1 600	1 000	1500

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Ponadto na podstawie przeprowadzonych analiz oszacowano, że funkcje przerobu odpadów w obu spalarniach mają postać:

- **dla wariantu pierwszego v1** (przyjęto popyt: dla spalarni S1 - 700 Mg/rok, a dla spalarni S2 - 1500 Mg/rok)

$$f_1\,(x_1) = 15\,x_1 + 0.2\,x_1^2$$

oraz

$$f_2\,(x_2) = 15\,x_2 + 0.1\,x_2^2\,.$$

- **dla wariantu pierwszego v2** (przyjęto popyt: dla spalarni S1 - 1 000 Mg/rok, a dla spalarni
S2 - 1500 Mg/rok)

$$f_1\,(x_1) = 10\,x_1 + 0.2\,x_1^2$$

oraz

$$f_2\,(x_2) = 10\,x_2 + 0.1\,x_2^2\,.$$

❑ Zadania optymalizacji nieliniowej w problemach transportowych

Rozwiązania dla obu wariantów (uzyskane w arkuszu Excel z wykorzystaniem modułu Solver)

Uwaga: Zadanie to można także rozwiązać stosując algorytm WKK – Wyrównywania Kosztów Krańcowych

Wariant v1:

$$x_{i,j} = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 67 & 13 \\ 0 & 200 \\ 0 & 400 \\ 0 & 120 \\ 0 & 300 \end{bmatrix}$$

Przerób w spalarniach $x_1 = 567, x_2 = 1033$

Koszty transportu i utylizacji: F=235966,7

Wariant v2:

$$x_{i,j} = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 80 \\ 0 & 200 \\ 0 & 400 \\ 0 & 120 \\ 67 & 233 \end{bmatrix}$$

Przerób w spalarniach $x_1 = 567, x_2 = 1033$

Koszty transportu i utylizacji: F=233966,7

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 2

Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch rodzajów bocznic: własnej i dzierżawionej od PKP.

Koszty (w tys. zł) związane z postojem wagonów na bocznicach wyraża następująca funkcja kosztów:

$$f(t_1, t_2) = 0{,}25t_1^2 + 3t_1 + 0{,}5t_2^2 + 4t_2$$

gdzie:

t_1 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy własnej,

t_2 - czas trwania wyładunku (w dniach) na bocznicy PKP.

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa maja w swym składzie 100 wagonów.

Dzienna zdolność przeładunkowa bocznicy własnej wynosi 10 wagonów, a bocznicy PKP 20 wagonów.

- Jak rozdzielić wagony pomiędzy bocznice, aby koszt postojowego był możliwie najniższy ?
- Podać koszt postojowego przy optymalnym rozdzieleniu wagonów pomiędzy obie bocznice.

  Uwaga: zakładamy, że z wyładowanych wagonów formułuje się skład, który może odejść dopiero wtedy, gdy wszystkie wagony są opróżnione. Tym samym postojowe liczy się do momentu wyładunku ostatniego wagonu na każdej z bocznic.
- Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek wagonów na bocznicy własnej a ile na PKP ?

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Matematyczny model problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne: $t_1, t_2 \geq 0$

Funkcja celu: $f(t_1,t_2) = 0,25t_1^2 + 3t_1 + 0,5t_2^2 + 4t_2 \to \min$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} 10t_1 + 20t_2 = 100 \Leftrightarrow g(t_1,t_2) = t_1 + 2t_2 = 10 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja Lagrange'a:

$$F(t_1,t_2,\lambda) = f(t_1,t_2) + \lambda\left[10 - t_1 - 2t_2\right] \to \min$$

Pochodne cząstkowe z funkcji Lagrange'a względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - t_1 - 2t_2, \quad \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0,5t_1 + 3 - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial t_2} = t_2 + 4 - 2\lambda$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - t_1 - 2t_2 = 0 \\ 0,5t_1 + 3 - \lambda = 0 \\ t_2 + 4 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 4 \\ \lambda_1^* = 4 \end{cases}$$

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki dostateczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a:

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem zmiennych decyzyjnych:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = 0,5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}(0,5t_1 + 3 - \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_1}(t_2 + 4 - 2\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial t_2} = 2$$

Hesjan obrzeżony:

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dla zadania **na minimum** z $m = 1$ warunkami ograniczającymi wymagane jest, aby tylko jeden minor $|H_2| = |H|$ równy wyznacznikowi głównemu miał znak taki jak $(-1)^m = -1 < 0$.

Łatwo sprawdzić że wartość wyznacznika (obliczona np. stosując rozwinięcie Laplace'a względem 1 wiersza wynosi):

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (0 - 2 \cdot 0,5) = -1 - 2 = -3 < 0$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przykład - 3

Określić optymalne z punktu widzenia kosztów transportu współrzędne (X,Y) dla lokalizacji magazynu zaopatrującego w towar pięciu odbiorców dla przedstawionych poniżej danych modelowych.

Lokalizacje poszczególnych odbiorców: (x_i, y_i) $(i = 1,2,\ldots,5)$

Numer Odbiorcy	Lokalizacja x_i [km]	Lokalizacja y_i [km]	Wielkość zapotrzebowania z_i [w jednostkach towaru]
1	2	5	2
2	4	3	7
3	1	1	4
4	3	2	9
5	3	4	1

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

(X,Y) – współrzędne lokalizacji magazynu,

z_i - ilościowe zapotrzebowanie poszczególnych odbiorców na towar (i=1,2,…,5),

$d_i^2 = \left[(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2\right]$ - kwadrat odległość magazynu od i-tego odbiorcy,

$K_i = z_i \cdot d_i^2 \geq 0$ - koszty dostaw towaru proporcjonalne do kwadratu odległości oraz zapotrzebowania z_i odbiorców (nieujemne),

$K = \sum_{i=1}^{5} K_i = \sum_{i=1}^{5} z_i \cdot d_i^2$ - całkowity koszt dostaw towaru.

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Model matematyczny problemu decyzyjnego:

Zmienne decyzyjne:

(X,Y) – współrzędne lokalizacji magazynu

Funkcja celu:

$$K(X,Y)=\sum_{i=1}^{5} z_i\left[(X-x_i)^2+(Y-y_i)^2\right]\to \min$$

Uwaga:

brak warunków ograniczających (szukamy ekstremum bezwarunkowego)

Rozwiązanie:

$$K=2(X-2)^2+2(Y-5)^2+7(X-4)^2+7(Y-3)^2+4(X-1)^2+4(Y-1)^2+$$
$$+9(X-3)^2+9(Y-2)^2+(X-3)^2+(Y-4)^2\to \min$$

Warunki konieczne:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K}{\partial X}=0\\ \dfrac{\partial K}{\partial Y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(X-2)+14(X-4)+8(X-1)+18(X-3)+2(X-3)=0\\ 4(Y-5)+14(Y-3)+8(Y-1)+18(Y-2)+2(Y-4)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}46X=132\\ 46Y=114\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X^*=\dfrac{66}{23}\\ Y^*=\dfrac{57}{23}\end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki wystarczające:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}(46X - 132) = 46$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y}(46Y - 114) = 46$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Y \partial X} = \frac{\partial^2 K}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}(46X - 132) = \frac{\partial}{\partial X}(46Y - 114) = 0$$

Warunkiem dostatecznym dla zadania na minimum jest, aby Hesjan drugich pochodnych cząstkowych był dodatni.

Łatwo sprawdzić, że Hesjan:

$$|H| = |H_2| = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial Y \partial X} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 0 \\ 0 & 46 \end{bmatrix} = 46 \cdot 46 = 2116 > 0$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

5. Przykłady nieliniowych problemów decyzyjnych – zagadnienie wyboru optymalnego portfela akcji.

Rozpatrzmy następujący problem decyzyjny. Inwestor posiadający określony kapitał chce go ulokować na giełdzie kupując akcje. Na giełdzie inwestor ma do wyboru akcje n – firm. Posiadane środki chciałby ulokować możliwie jak najlepiej, tzn. ustalić optymalny portfel akcji (zestaw akcji jakie posiada inwestor).

Każda akcja jest charakteryzowana przez dwa podstawowe czynniki, istotne dla inwestora przy zakupie akcji: stopa zwrotu (zysku) i ryzyko.

Stopa zysku - to stosunek zysku, jaki przynosi dana akcja (na koniec okresu t), do kosztu jej zakupu (na początku okresu t, czyli w momencie t-1):

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}}.$$

Wszystkie decyzje odnośnie inwestowania w akcje odnoszą się do przyszłości oraz są podejmowane w warunkach niepewności i ryzyka. Stopa zysku jest w rzeczywistości **przyszłą oczekiwaną stopą zysku** jaka zostanie osiągnięta w pewnym okresie. Jest to zmienna losowa, która może przyjmować różne wartości z różnymi prawdopodobieństwami (zależą one od sytuacji na giełdzie, która z kolei zależy od stanu gospodarki oraz od sytuacji politycznej kraju).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Przyszłą **oczekiwaną stopę zysku** dla losowej rzeczywistej stopy zysku danej akcji oblicza się z reguły następująco: $r_j = \sum_{i=1}^{n} p_i r_{ij}$, gdzie: r_j – oczekiwana stopa zysku j – tej akcji, p_i – prawdopodobieństwo wystąpienia stanu S_i – gospodarki, r_{ij} – i – ta możliwa stopa zysku j – tej akcji.

Dla przykładu:

Stany gospodarki	Prawdopodobieństwo	Stopy zysku (w %)	
		A	B
S_1	0,3	20	10
S_2	0,4	10	20
S_3	0,3	0	30

Dla przykładowych akcji **A** oraz **B** oczekiwana stopa zysku wynosi: $r_A = 0,3 \cdot 20 + 0,4 \cdot 10 + 0,3 \cdot 0 = 10[\%]$, $r_B = 0,3 \cdot 10 + 0,4 \cdot 20 + 0,3 \cdot 30 = 20[\%]$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Ryzyko inwestowania w akcje można mierzyć za pomocą jednej syntetycznej miary, a mianowicie za pomocą wariancji stopy zysku (im większa zmienność stopy zysku dla akcji, tym większe ryzyko ewentualnych potencjalnych strat).

Wariancję stopy zysku danej akcji wyraża się wzorem: $v_j = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(r_{ij} - r_j\right)^2$.

Zamiast wariancji można posługiwać się praktyczniejszym **odchyleniem standardowym**: $s_j = \sqrt{v_j}$.

Dla przykładowych akcji **A** oraz **B** odchylenia standardowe stopy zysku wynoszą:

$v_A = 0{,}3 \cdot (20-10)^2 + 0{,}4 \cdot (10-10)^2 + 0{,}3 \cdot (0-10)^2 = 60$,

$v_B = 0{,}3 \cdot (10-20)^2 + 0{,}4 \cdot (20-20)^2 + 0{,}3 \cdot (30-20)^2 = 60$ (ryzyko obu akcji jest identyczne).

Przyjmijmy teraz, że inwestor chce zainwestować w portfel akcji. **Stopę zysku dla portfela** akcji wyznacza się ze wzoru:

$r_p = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j$, gdzie: x_j – udział j – tej akcji w portfelu (stosunek wartości j – tej akcji do wartości wszystkich akcji w portfelu), r_j – oczekiwana stopa zysku j – tej akcji. Oczywiste jest, że $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1;\ \ 0 \le x_j \le 1;\ \ (j = 1,\dots,n)$.

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Gdy inwestor kupuje kilka akcji, istotne jest powiązanie ich stóp zysku mierzone **współczynnikiem korelacji**: $\rho_{i,j} = \dfrac{\sum_{k=1}^{m} p_k (r_{ki} - r_i)(r_{kj} - r_j)}{s_i \cdot s_j}$.

Dla akcji **A** i **B** współczynnik korelacji wynosi: $\rho_{A,B} = -1$ - stopy zysku obu akcji są silnie powiązane, wzrost stopy zysku jednej akcji powoduje spadek stopy zysku dla akcji drugiej.

Ryzyko portfela akcji (wariancję stopy zysku dla portfela) obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 v_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j s_i s_j \rho_{i,j}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Dla każdego inwestora interesujące jest wyznaczenie takiego portfela akcji, dla którego:

- **stopa zysku** byłaby **maksymalna**;
- **ryzyko** byłoby **minimalne**;

Jest to problem dwukryterialny (bardzo trudny w tej postaci do rozwiązania) dlatego w praktyce analizuje się dwa uproszczone problemy jednokryterialne:

- **Problem I:** ustalić taki portfel akcji, aby:
  stopa zysku była maksymalna, przy ryzyku nie większym od maksymalnie dopuszczanego.

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \to \max$$

Przy warunkach:

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 v_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j s_i s_j \rho_{i,j} \le V_{dop} ; \ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1; \ x_j \ge 0 \quad (j = 1,\dots,n) .$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

- **Problem II:** ustalić taki portfel akcji, aby:
  ryzyko było minimalne, przy stopie zysku nie mniejszej od minimalnie dopuszczanej.

  $$v_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 v_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j s_i s_j \rho_{i,j} \to \min$$

  Przy warunkach:

  $$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq r_{dop}\,;\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1;\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Dla naszego przykładu zadanie optymalizacyjne dla problemu II, w przypadku gdy inwestor wymaga aby stopa zysku portfela była nie mniejsza niż 15 [%] będzie miało postać:

$$60x_A^2 + 60x_B^2 + 2x_A x_B \sqrt{60}\sqrt{60}(-1) \to \min$$

$$\begin{cases} 10x_A + 20x_B \geq 15; \\ x_A + x_B = 1; \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Zadanie to sprowadzamy do równoważnej postaci kanonicznej:

$$60\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right) = 60 \cdot f(x_1, x_2, x_3) \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 = 1; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tworzymy funkcje Lagrange'a postaci:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + \lambda_1\left(3 - 2x_1 - 4x_2 + x_3\right) + \lambda_2\left(3 - x_1 - x_2\right)$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

$$L(\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+\lambda_1\left(3-2x_1-4x_2+x_3\right)+\lambda_2\left(3-x_1-x_2\right)$$

Warunki konieczne:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=3-2x_1-4x_2+x_3=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=1-x_1-x_2=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1-2x_2-2\lambda_1-\lambda_2=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-2x_1-4\lambda_1-\lambda_2=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3}=\lambda_1=0$$

Rozwiązując ten układ 5 równań z 5 niewiadomymi otrzymujemy:

$$\lambda_1^*=0,\lambda_2^*=0,x_1^*=\frac{1}{2},x_2^*=\frac{1}{2},x_3^*=0.$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PROBLEMÓW OPTYMALIZACJI NIELINIOWEJ

Warunki konieczne:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - x_1 - x_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1 - 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \lambda_1 = 0$$

Warunki dostateczne – **Hesjan obrzeżony** jest postaci:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 \\ 0 & 0 & g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 \\ g_1^1 & g_1^2 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2^1 & g_2^2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3^1 & g_3^2 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

gdyż: $g^1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - x_3$, $g^2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$

Dla zadania na minimum z trzema zmiennymi decyzyjnymi (n=3) oraz dwoma warunkami ograniczającymi (m=2) warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum jest, aby minor obrzeżony $|\overline{H}_3| = |\overline{H}|$ miał znak taki jak $(-1)^m = (-1)^2 > 0$, a wiec aby **był dodatni**.

Dla naszego przykładu właśnie tak jest, a więc aby zminimalizować ryzyko swojego portfela inwestor powinien zainwestować po połowie swoje pieniądze w akcje obu spółek. Taki portfel jest pozbawiony całkowicie ryzyka (wariancja równa zero) i przynosi dokładnie 15[%] potencjalnego zysku.