

PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Twórcą teorii **programowania dynamicznego** jest **Richard Bellman**, który opracował jej podstawy teoretyczne.

Wyczerpujący opis teoretyczny oraz metodologię wykorzystania programowania dynamicznego do zagadnień podejmowaniu optymalnych decyzji można znaleźć między innymi w pracy monograficznej:

[1] Bellman R., Dreyfus S. F., Programowanie Dynamiczne, PWE, Warszawa 1967.

Metodologia programowania dynamicznego:

Formalnie rzecz biorąc, metody programowania dynamicznego polegają na **zamianie** zadania optymalizacyjnego z **N** zmiennymi decyzyjnymi (znalezienia ekstremum warunkowego funkcji **N** – zmiennych) na **N** zadań z **jedną zmienną decyzyjną**, przy czym zadania te są powiązane ze sobą określoną **zależnością rekurencyjną** (na każdym etapie zadania składowego wyznacza się ekstremum warunkowe uwzględniając rezultat osiągnięty na etapie poprzednim).

Postępując w ten sposób upraszczamy proces rachunkowy (zamiast rozwiązywać zadanie złożone rozwiązujemy zadania prostsze).

Operacja rozbicia zadania optymalizacyjnego na zadania składowe jest możliwa tylko wtedy, gdy **funkcja celu** zadania jest tzw. **funkcją separowalną**.

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Określenie:

Funkcja N zmiennych $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ będzie funkcją **separowalną**, jeśli $F(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) \oplus \dots \oplus f_N(x_N)$.

Operację: $x \oplus y$ należy rozumieć jako:

- 1) $x \oplus y := x + y$, albo
- 2) $x \oplus y := x \cdot y$, albo
- 3) $x \oplus y := \min\{x, y\}$, albo
- 4) $x \oplus y := \max\{x, y\}$.

Uwaga: Następujące funkcje celu:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = 5g_1(x_1) + 8g_3(x_3)x_3 + 4g_2(x_2)x_2$$

$F_2(x_1, x_2, x_3) = \ln[9g_1(x_1) + 2g_2(x_2) + 4g_3(x_3)]$ - **mogą być** funkcjami celu w programowaniu dynamicznym.

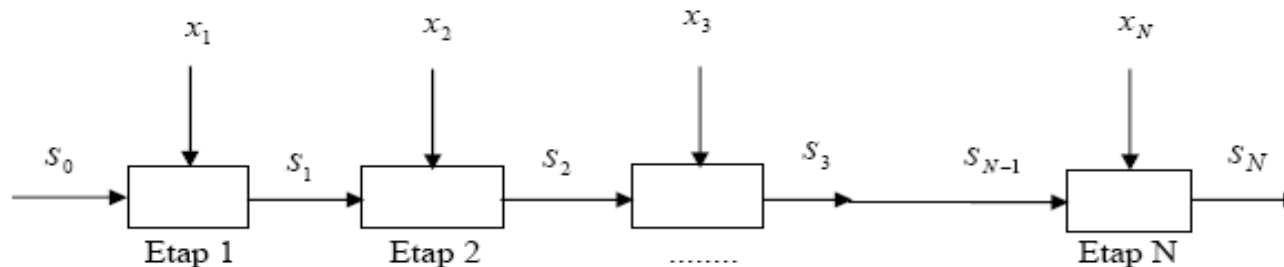
Nie może być to natomiast funkcja celu postaci:

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1)x_2 + g_2(x_2)x_3 + g_3(x_3)$$

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Metody programowania dynamicznego są w głównej mierze wykorzystywane do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych dla tzw. **wieloetapowych procesów decyzyjnych**.

Ogólny schemat wieloetapowego procesu decyzyjnego przedstawia następujący rysunek:



Schemat ten przedstawia dowolny proces (np. realizację jakiegokolwiek działania), którego przebieg można podzielić na **N - etapów**. Na dowolnym etapie tego procesu możemy wyróżnić następujące elementy:

- 1) Stan wejściowy procesu do danego etapu (na schemacie - $s_{i-1}, (i = 1, \dots, N)$) – jest to stan jaki osiągnął proces w wyniku realizacji etapu poprzedniego.
- 2) Decyzję podejmowaną na danym etapie (na schemacie - $x_i, (i = 1, \dots, N)$).
- 3) Stan wyjściowy procesu z danego etapu (na schemacie - $s_i, (i = 1, \dots, N)$) – stan ten zależy od stanu wejściowego oraz od podjętej decyzji na danym etapie.

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stan procesu można opisywać za pomocą jednego lub kilku parametrów – zwanych: **zmiennymi stanu**. W podanym schemacie proces decyzyjny jest opisywany za pomocą jednej charakterystyki – jednej **zmiennej stanu**.

Oznaczmy przez: S_i ($i = 1, \dots, N$) - zbiór możliwych w **i - tym** etapie wartości zmiennej stanu - s_i (**zbiór możliwych stanów**). Natomiast przez: D_i ($i = 1, \dots, N$) - zbiór możliwych decyzji w **i - tym** etapie. Oznacza to, że zmienna decyzyjna może przyjmować wartości z tego zbioru ($x_i \in D_i$).

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Formalnie wieloetapowy proces decyzyjny możemy wyrazić następującymi zależnościami rekurencyjnymi:

$$s_i = g_i(s_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, N, s_i \in S_i, x_i \in D_i$$

s_0 - jest ustalonym stanem początkowym procesu

Uwaga:

Zależności te przedstawiają ważną cechę wieloetapowych procesów decyzyjnych, a mianowicie, że stan procesu s_i - osiągnięty w i - tym etapie zależy od stanu wejściowego s_{i-1} - do i - tego etapu oraz od decyzji x_i - podjętej na tym etapie.

Problem, który należy rozwiązać w każdym wieloetapowym procesie decyzyjnym polega na określeniu ciągu decyzji: $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$, ($x_i^* \in D_i$), przy których ustalona funkcja celu dla całości procesu przebiegającego w N - etapach osiąga wartość optymalną (min lub max).

Ciąg decyzji optymalnych wyznaczonych dla każdego etapu: $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ nazywa się: **polityką optymalną** wieloetapowego procesu decyzyjnego.

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Schemat ogólny programowania dynamicznego:

Rozpatrzmy model decyzyjny wieloetapowego procesu decyzyjnego.
Oznaczmy:

$X = (x_1, \dots, x_N)$ - wektor zmiennych decyzyjnych ustalanych na każdym etapie;

s_0 - zadany stan początkowy procesu;

s_1, s_2, \dots, s_N - stany wyjściowe procesu dla poszczególnych etapów;

$Z_1(s_0, x_1)$ - wartość funkcji celu uzyskana w pierwszym etapie przy zadanym stanie początkowym;

$Z_2(s_1, x_2), Z_3(s_2, x_3), \dots, Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}), Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - odpowiednio wartości funkcji celu w kolejnych etapach: 2, 3, ..., N.

Oczywiste jest, że zachodzi: $Z(s_0, X) = Z_1(s_0, x_1) + \dots + Z_N(s_{N-1}, x_N)$

Należy ustalić **optymalną strategię** – ciąg decyzji $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$, taką aby $Z(s_0, X^*) \rightarrow \max(\min)$, **przy ograniczeniach**: $X \subset \Omega$, gdzie Ω - obszar **określenia zadania wyjściowego**.

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W celu rozwiązania tego zadania dokonujemy dekompozycji na N – zadań (etapów) otrzymując rodzinę zadań:

Niech $\Omega_N, \Omega_{N-1,N}, \dots, \Omega_{1,2,\dots,N} \equiv \Omega$ - oznacza rozbitcie obszaru dla zadania wyjściowego na obszary ograniczające zmienne decyzyjne dla poszczególnych etapów.

Oznaczmy przez:

$F_1(s_{N-1}) = \max(\min)_{x_N \in \Omega_N} Z_N(s_{N-1}, x_N)$ - optymalną wartość funkcji celu uzyskaną

na 1 – rozpatrywanym etapie.

Dalej uzyskujemy, że:

$F_2(s_{N-2}) = \max(\min)_{x_{N-1} \in \Omega_{N-1,N}} [Z_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1}) + F_1(s_{N-1})]$ - optymalna wartość funkcji

celu w 2 – rozpatrywanym etapie.

Analogicznie dla 3 – rozpatrywanego etapu mamy:

$F_3(s_{N-3}) = \max(\min)_{x_{N-2} \in \Omega_{N-2,N-1,N}} [Z_{N-2}(s_{N-3}, x_{N-2}) + F_2(s_{N-2})]$

..... i dla kolejnych

Wreszcie dla N – tego rozpatrywanego etapu:

$F_N(s_0) = \max(\min)_{x_1 \in \Omega_{1,2,\dots,N} \equiv \Omega} [Z_1(s_0, x_1) + F_{N-1}(s_1)]$

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Uwaga:

Z równania tego wynika, że optymalna wartość funkcji celu dla N – etapowego procesu decyzyjnego jest równa optymalnej wartości funkcji celu ze względu na pierwszą decyzję, przy założeniu stanu początkowego s_0 - procesu oraz maksymalnej wartości funkcji celu dla procesu $(N-1)$ – etapowego.

Powyższy ciąg równań funkcyjnych wyraża tzw. **zasadę optymalności** – sformułowaną przez **R. Bellmana**.

„Niezależnie od tego jakie były decyzje początkowe, każda następna decyzja w ciągu sekwencyjnym jest decyzją optymalną z punktu widzenia stanu wynikłego z decyzji poprzednich. W efekcie końcowym otrzymamy zawsze strategię optymalną”

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując metodologię programowania dynamicznego oraz ideę algorytmu sekwencyjnego można rozwiązać bardzo wiele różnorodnych problemów decyzyjnych.

Przytoczmy tutaj tylko niektóre z tych problemów:

- Problem optymalnego wyboru przedsięwzięć inwestycyjnych.
- Problem wyznaczenia najkrótszej trasy przejazdu pomiędzy dwoma miejscowościami w wieloetapowej sieci drogowej (transportowej).
- Problem optymalnego wyznaczenia wielkości odnawianych zasobów magazynowych w wieloetapowym (np. co kwartał) procesie dostaw magazynowych itp.

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Przykład 1 - Problem optymalnego rozdziału inwestycji

Międzynarodowe przedsiębiorstwo transportowe planuje zainwestować 10 000 000 \$ w rozwój sieci swoich placówek na nowych potencjalnych rynkach świadczenia usług. Pod uwagę bierze 4 strefy (rynk), a mianowicie: (I) – rosyjski, (II) – ukraiński, (III) – białoruski, (IV) – polski.

Firma konsultingowa przeprowadziła wstępne badania opracowując tabelę oraz krzywe potencjalnych zysków dla poszczególnych krajów lokalizacji sieci swoich placówek, przy zainwestowaniu „x” - jednostek pieniężnych (jednostka to 1 000 000 \$).

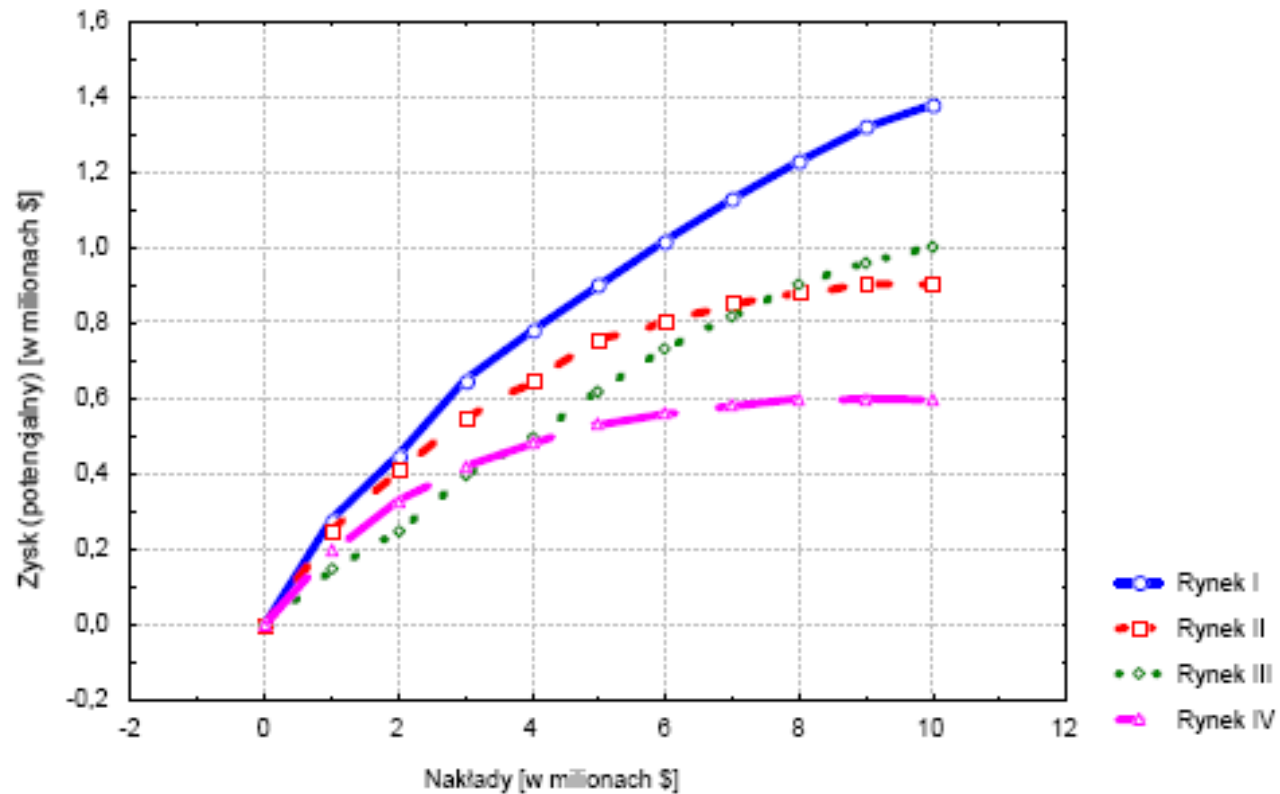
□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach \$)	Przewidywany zysk (w milionach \$) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Krzywe potencjalnego zysku prezentują poniższe wykresy:



□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Zadanie decyzyjne jest następujące: Jak rozłożyć kwotę inwestycyjną nie przekraczającą 10 jednostek, aby sumaryczny zysk (potencjalnie) był jak największy ?

Jest to zagadnienie kombinatoryczne, ale mające bardzo dużo kombinacji, dlatego zastosujemy algorytm sekwencyjny **R. Bellmana**.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$f_1(x_1)$ - funkcja zysku z rynku I, przy inwestycji kwoty x_1 ,
 $f_2(x_2)$ - funkcja zysku z rynku II, przy inwestycji kwoty x_2 ,
 $f_3(x_3)$ - funkcja zysku z rynku III, przy inwestycji kwoty x_3 ,
 $f_4(x_4)$ - funkcja zysku z rynku IV, przy inwestycji kwoty x_4 ,
 $x_i \in \{0,1,\dots,10\}, i = 1,2,3,4$.

Ponadto oznaczmy dla potrzeb algorytmu sekwencyjnego:

$F_{12}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I i II, tzn. $x_1 + x_2 = A$, $A \in \{0,1,\dots,10\}$

$F_{123}(A)$ - maksymalny zysk przy optymalnym podziale środków inwestycyjnych w strefie I, II i III, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 = A$, $A \in \{0,1,\dots,10\}$

$F_{1234}(A)$ - zysk przy optymalnym podziale kwoty inwestycyjnej wielkości **A** w czterech strefach: I - IV, tzn. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A$, $A \in \{0,1,\dots,10\}$,

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Stosując opisany wcześniej ogólnie algorytm sekwencyjny **R. Bellmana** możemy uzyskać optymalne decyzje podziału środków inwestycyjnych. Dla przykładu pokażemy jak optymalnie zainwestować kwotę $A=2\ 000\ 000$ \$ (2 jednostki) w rozpatrywane 4 rynki:

Na pierwszym etapie bierzemy pod uwagę tylko rynek rosyjski – w jeden rynek optymalnie inwestujemy zgodnie z wartościami funkcji celu: $F_1(x) = f_1(x)$ - podanymi w tabeli.

W drugim etapie dołączamy drugi rynek – ukraiński:

$$(*) F_{12}(A) = \max_{\substack{x_2=0,1,\dots,A \\ x_1+x_2=A}} \{f_2(x_2) + f_1(A-x_2)\}$$

$$F_{12}(2) = \max\{f_2(0) + f_1(2-0), f_2(1) + f_1(2-1), f_2(2) + f_1(2-2)\} = \max\{0 + 0.45; 0.25 + 0.28; 0.41 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1 \rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{12}(0) = \max\{f_2(0) + f_1(0)\} = 0$$

$$F_{12}(1) = \max\{f_2(0) + f_1(1-0), f_2(1) + f_1(1-1)\} = \max\{0.28; 0.25\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach \$)	Przewidywany zysk (w milionach \$) przy inwestycji w danej strefie rynku I - IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

W 3 - etapie wyznaczmy optymalną wartość funkcji celu biorąc pod uwagę trzy rynki: rosyjski, ukraiński, białoruski:

$$(**) F_{123}(A) = \max_{\substack{x_3=0,1,2,\dots,A \\ x_1+x_2+x_3=A}} \{f_3(x_3) + F_{12}(A - x_3)\}$$

$$F_{123}(2) = \max \{f_3(0) + F_{12}(2 - 0); f_3(1) + F_{12}(2 - 1); f_3(2) + F_{12}(2 - 2)\} = \\ = \max \{0 + 0.53; 0.15 + 0.28; 0.25 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0 \rangle$

Ponadto otrzymujemy:

$$F_{123}(0) = \max \{f_3(0) + F_{12}(0)\} = 0$$

$$F_{123}(1) = \max \{f_3(0) + F_{12}(1 - 0); f_3(1) + F_{12}(1 - 1)\} = \max \{0.28; 0.15\} = 0.28$$

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach \$)	Przewidywany zysk (w milionach \$) przy inwestycji w danej strefie rynku I - IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wreszcie w 4 etapie wyznaczmy wartość optymalną funkcji celu biorąc pod uwagę wszystkie cztery rynki.

$$(***) F_{1234}(A) = \max_{\substack{x_4=0,1,2,\dots,A \\ x_1+x_2+x_3+x_4=A}} \{f_4(x_4) + F_{123}(A-x_4)\}$$

$$F_{1234}(2) = \max\{f_4(0) + F_{123}(2-0); f_4(1) + F_{123}(2-1); f_4(2) + F_{123}(2-2)\} = \\ = \max\{0 + 0.53; 0.20 + 0.28; 0.33 + 0\} = 0.53$$

Strategia optymalna: $\langle 1,1,0,0 \rangle$

Otrzymany wynik jest wynikiem końcowym, gdy inwestor decyduje się na wydanie 2 - jednostek pieniężnych – optymalny rozdział inwestycji: przeznaczyć po jednostce na rynki I i II.

Badania firmy konsultingowej przedstawia tabela:

Suma zainwestowana (w milionach \$)	Przewidywany zysk (w milionach \$) przy inwestycji w danej strefie rynku I – IV			
	I etap f_1	II etap f_2	III etap f_3	IV etap f_4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Dalej należy przeprowadzić analogiczne rozważania rachunkowe dla $A = 3, 4, \dots, 10$. Ostateczne wyniki podaje tabela poniżej:

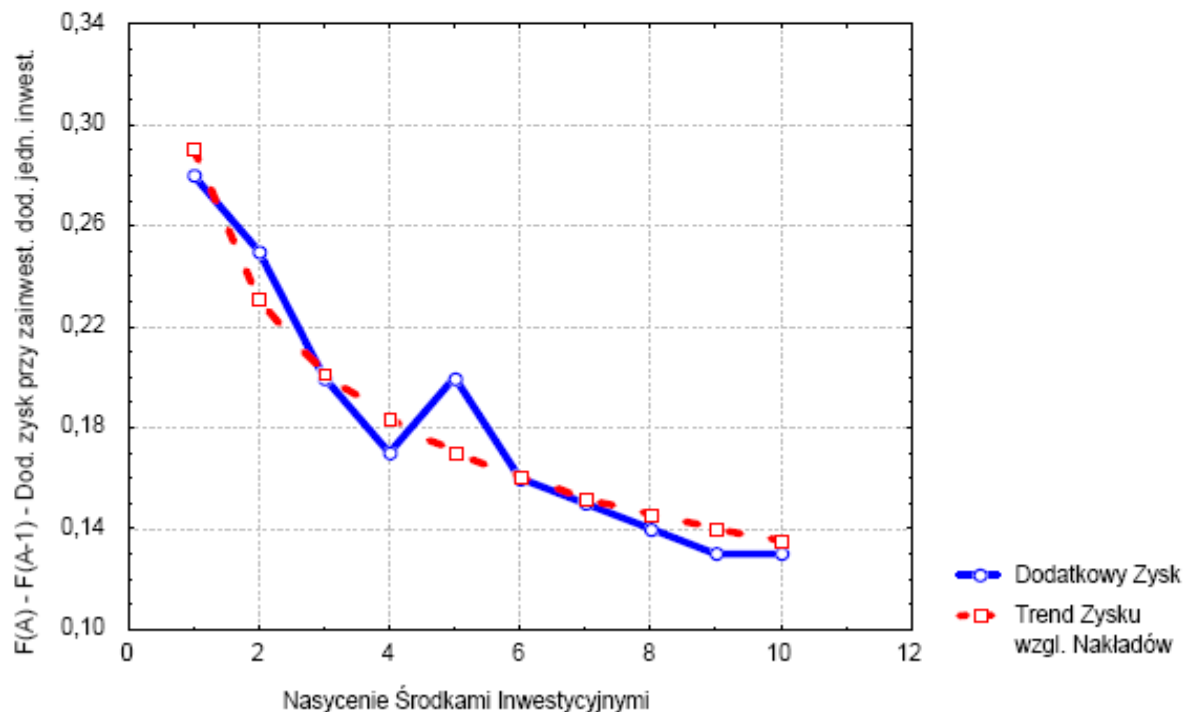
Nakł. Inwest. (A)	Zysk pot. ze strefy				$F_{12}(A)$	Strat. Opt.	$F_{123}(A)$	Strat. Opt.	$F_{1234}(A)$	Strat. Opt.	$\Delta F_{1234} =$ $= F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ (Przyrosty Zysku)
	f_1	f_2	f_3	f_4							
0	0	0	0	0	0	$\langle 0,0 \rangle$	0	$\langle 0,0,0 \rangle$	0	$\langle 0,0,0,0 \rangle$	---
1	0,28	0,25	0,15	0,20	0,28	$\langle 1,0 \rangle$	0,28	$\langle 1,0,0 \rangle$	0,28	$\langle 1,0,0,0 \rangle$	0,28
2	0,45	0,41	0,25	0,33	0,35	$\langle 1,1 \rangle$	0,53	$\langle 1,1,0 \rangle$	0,53	$\langle 1,1,0,0 \rangle$	0,25
3	0,65	0,55	0,40	0,42	0,70	$\langle 2,1 \rangle$	0,70	$\langle 2,1,0 \rangle$	0,73	$\langle 1,1,0,1 \rangle$	0,20
4	0,78	0,65	0,50	0,48	0,90	$\langle 3,1 \rangle$	0,90	$\langle 3,1,0 \rangle$	0,90	$\langle 3,1,0,0 \rangle$ $\langle 2,1,0,1 \rangle$	0,17
5	0,90	0,75	0,62	0,53	1,06	$\langle 3,2 \rangle$	1,06	$\langle 3,2,0 \rangle$	1,10	$\langle 3,1,0,1 \rangle$	0,20
6	1,02	0,80	0,73	0,56	1,20	$\langle 3,3 \rangle$	1,21	$\langle 3,2,1 \rangle$	1,26	$\langle 3,2,0,1 \rangle$	0,16
7	1,13	0,85	0,82	0,58	1,33	$\langle 4,3 \rangle$	1,35	$\langle 3,3,1 \rangle$	1,41	$\langle 3,2,1,1 \rangle$	0,15
8	1,23	0,88	0,90	0,60	1,44	$\langle 5,3 \rangle$	1,48	$\langle 4,3,1 \rangle$	1,55	$\langle 3,3,1,1 \rangle$	0,14
9	1,32	0,90	0,96	0,60	1,57	$\langle 6,3 \rangle$	1,60	$\langle 5,3,1 \rangle$ $\langle 3,3,3 \rangle$	1,68	$\langle 4,3,1,1 \rangle$ $\langle 3,3,1,2 \rangle$	0,13
10	1,38	0,90	1,00	0,60	1,68	$\langle 7,3 \rangle$	1,73	$\langle 4,3,3 \rangle$	1,81	$\langle 4,3,1,2 \rangle$	0,13

□ PODSTAWY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Wniosek:

Dodatkowy zysk: $\Delta F_{1234} = F_{1234}(A) - F_{1234}(A-1)$ przy zainwestowaniu na tych czterech rynkach dodatkowej jednostki (1 000 000 \$) maleje wraz ze wzrostem nasycenia rynków w środki inwestycyjne - A (jest to zjawisko naturalne i prawo ekonomiczne rynku).

Sens praktyczny tego wniosku ilustruje następujący wykres:



ANALIZA SIECIOWA PRZEDSIĘWZIĘĆ METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ ALGORYTM – CPM

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Konstrukcja sieci czynności:

Do wykreślenia sieci czynności dla dowolnego projektu niezbędne są informacje dotyczące czynności wchodzących w skład przedsięwzięcia oraz ustalenie kolejności ich występowania.

W trakcie wykreślania sieci czynności można wyróżnić 4 etapy jej konstruowania:

- ustalenie listy czynności;
- ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia;
- określenie kolejności wykonywania czynności;
- numerowanie wierzchołków;

Ponadto powinny być przestrzegane następujące zasady:

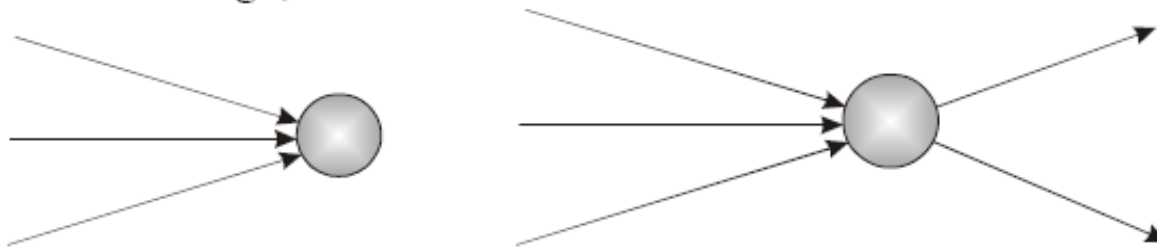
- zdarzenie początkowe nie ma żadnych czynności poprzedzających;
- zdarzenie końcowe nie ma żadnych czynności następujących;
- dwa kolejne zdarzenia mogą być połączone tylko jedną czynnością;
- początkiem każdej czynności jest zawsze pewne **i** – **te** zdarzenie, zwane zdarzeniem poprzedzającym;
- końcem każdej czynności jest zawsze pewne **j** – **te** zdarzenie, zwane zdarzeniem następującym;



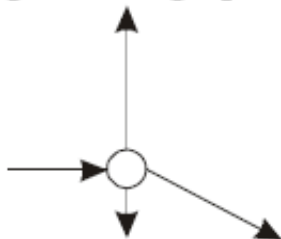
- wszystkie zdarzenia w sieci (z wyjątkiem początkowego i końcowego) powinny być początkiem i końcem co najmniej jednej czynności;

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- zdarzeniem zrealizowanym nazywamy każde zdarzenie w chwili, gdy czynność lub czynności, dla których jest ono zdarzeniem następującym, zostały wykonane;
- czynność lub czynności mogą się rozpocząć tylko od zdarzenia zrealizowanego;

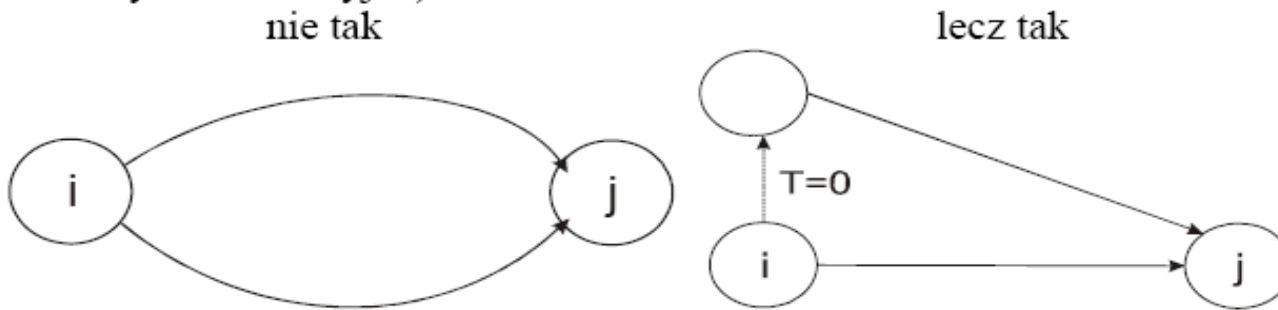


- długość i kierunek strzałki przedstawiającej czynność lub zależność czasowa nie odwzorowują ich czasu trwania, lecz są dyktowane wyłącznie wygodą graficznego przedstawienia sieci czynności



PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- dwa zdarzenia nie mogą być bezpośrednio połączone przez dwie lub więcej czynności. Jeżeli kilka czynności ma być wykonane równocześnie, to rozdziela się początki lub końce czynności formalnie na co najmniej dwa zdarzenia, wykorzystując zależność czasową o czasie trwania $T=0$ (tworząc tzw. czynności fikcyjne)



- dla identyfikacji zdarzeń, czynności i zależności czasowych, każde zdarzenie oznaczone jest numerem. Numeracja jest w zasadzie dowolna, dwa różne zdarzenia nie mogą być jednak oznaczone tym samym numerem;
- każda czynność oraz zależność czasowa jest identyfikowana za pomocą dwóch numerów: numeru zdarzenia poprzedzającego – **i** oraz numeru zdarzenia następującego – **j**. Przy oznaczeniu tak zdarzeń, czynność oznaczamy przez (i, j) ;



□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Opisane zasady i etapy postępowania zilustrujemy na przykładzie budowy sieci czynności przedstawiającej – wprowadzanie nowego produktu na rynek. Przedsięwzięcie takie składa się z czynności dotyczących sfery projektowania produkcji, jak również działań związanych z badaniem rynku.

Etap 1 – ustalenie listy czynności tego przedsięwzięcia.

Nazwa czynności:

- A** – badanie popytu na rynku
- B** – nabycie surowców na prototypy
- C** – wyprodukowanie prototypów i ocena ich jakości
- D** – nabycie surowców do produkcji
- E** – wybór opakowań
- F** – analiza kosztów produkcji
- G** – proces produkcji wyrobu
- H** – wysyłka do sklepów
- I** – reklama i zbieranie zamówień
- J** – nabycie opakowań
- K** – pakowanie wyrobu gotowego
- L** – analiza ekonomicznych parametrów decyzji po podjęciu procesu produkcji

Etap 2 – ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia.

Zdarzeniem początkowym jest – **podjęcie decyzji o produkcji na rynek nowego wyrobu.**

Zdarzeniem końcowym jest – **wyrób jest oferowany w sklepie do sprzedaży.**

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Etap 3 – określenie kolejności wykonywania czynności. Na tym etapie należy dla każdej czynności określić: czynności poprzedzające, następujące oraz ewentualne czynności równoległe – które mogą być wykonywane jednocześnie z czynnością rozpatrywaną.

Powiązania między czynnościami w naszym przykładzie są następujące:

Czynności	Czynności bezpośrednio:		
	poprzedzające	następujące	równoległe
A	-	C	B
B	-	C	A
C	A, B	D, E	
D	C	J	
E	C	F, I	
F	E	L	
G	L	K	
H	I, K	-	
I	E	H	
J	D	K	
K	J, G	H	
L	F	G	

□ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Etap 4 – numerowanie wierzchołków. Przy numerowaniu sieci (zdarzeń) należy uwzględnić, że następują one w określonej kolejności oraz to, że zdarzenie będące początkiem czynności powinno mieć numer mniejszy niż zdarzenie, które jest jej końcem.

Uwaga: Uporządkowanie wierzchołków zgodnie z tą zasadą można uzyskać stosując algorytm uporządkowania dolnego (warstwowego) dla grafu tworzonej sieci czynności. Wtedy konieczne jest niejednokrotnie przenumerowanie wierzchołków takiego grafu (nadając kolejne liczby naturalne kolejnym wierzchołkom z kolejnych warstw – począwszy od **1** dla wierzchołka wejścia a skończywszy na **n** dla wierzchołka wyjścia).

Na rysunku przedstawiono graf skierowany analizowanego przykładowego przedsięwzięcia związanego z wprowadzaniem nowego produktu na rynek.

