Zagadnienia transportowe (algorytm transportowy)

Przykład 1. Cztery piekarnie należące do pewnej firmy zaopatrują się w mąkę w trzech młynach. Podaż mąki w młynie M1 wynosi 100 ton, w młynie M2 – 200 ton, w młynie M3 – 100 ton. Zapotrzebowanie piekarń na mąkę kształtuje się następująco: piekarnia I – 120 ton, piekarnia II – 70 ton, piekarnia III – 80 ton, piekarnia IV – 130 ton. Jednostkowe koszty transportu (w zł na tonę) podano w tabeli.

Młyny	Piekarnie			
	I	II	III	IV
M_1	7	15	16	6
M_2	12	11	8	4
M_3	5	13	9	10

a) Ustal optymalny plan dostaw mąki, minimalizujący koszt transportu
b) Podaj minimalny koszt transportu,
c) Popyt piekarni trzeciej spadł o 30 jednostek. Jaki ma to wpływ na wartość kosztu transportu? Jaki byłby wpływ, gdyby ten spadek popytu dotyczył piekarni pierwszej?

Ad a) i b)

Ad c) – do rozwiązania samodzielnie

Model matematyczny:

- Dane: podaż – możliwe wielkości dostaw dla młynów (dostawcy): $a_1 = 100, a_2 = 200, a_3 = 100$
- Dane: popyt piekarń - zapotrzebowanie (odbiorcy): $b_1 = 120, b_2 = 70, b_3 = 80, b_4 = 130$.
- Zadanie jest zbilansowane (zamknięte zagadnienie transportowe), gdyż globalna podaż i popyt się równoważą - $\sum_{i=1}^{m=3} a_i = \sum_{j=1}^{n=4} b_j = 100 + 200 + 100 = 120 + 70 + 80 + 130 = 400$.
- Zmienne decyzyjne: $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$, $x_{ij} \geq 0$ – wielkość dostaw z i-tego młyna (i=1,…,m=3) do j-tej piekarni (j=1,…,n=4).
- Funkcja celu: $F(X = X_{ij}) = \sum_{i=1}^{m=3} \sum_{j=1}^{n=4} C_{ij} * X_{ij} =$

$$7 * x_{11} + 15 * x_{12} + 16 * x_{13} + 6 * x_{14} +$$

$$12 * x_{21} + 11 * x_{22} + 8 * x_{23} + 4 * x_{24} +$$

$$5 * x_{31} + 13 * x_{32} + 9 * x_{33} + 10 * x_{34} \to min$$

gdzie: $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 6 \\ 12 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ - macierz kosztów jednostkowych dostaw

- Warunki ograniczające:

Warunki podażowe: $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \end{cases}$ – suma dostaw mąki z młynów i=1,2,3 do wszystkich 4 piekarń jest równa podaży mąki we młynach.

Warunki popytowe: $\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130 \end{cases}$ – suma dostaw mąki ze wszystkich młynów i=1,2,3 do każdej z piekarń j=1,2,3,4 jest równa zapotrzebowaniu na mąkę w tychpiekarniach.

Warunki brzegowe $x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3; j = 1,2,3,4$.

Rozwiązanie (wykorzystanie algorytmu transportowego): - zob. materiały wykład

- **I etap** – znalezienie początkowego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Mającego m+n-1 zmiennych bazowych (3+4-1=6)

Metoda najmniejszego elementu macierzy kosztów: - zob. materiały wykład

Oznaczmy $I = \{1,2,3\}$ (aktualnie) – zbiór indeksów dostawców (młyny), których zasoby w danym kroku iteracyjnym wyboru zmiennych nie zostały jeszcze w pełni rozdysponowane.

Oznaczmy $J = \{1,2,3,4\}$ (aktualnie) – zbiór indeksów odbiorców (piekarnie), których zasoby w danym kroku iteracyjnym wyboru zmiennych nie zostały jeszcze w pełni rozdysponowane.

Jako kolejne zmienne bazowe $x_{r,k}^{(p)}$ - w kolejnych krokach iteracyjnych (iteracji p) wybieramy zmienne o takich numerach, które minimalizują koszty jednostkowe: $c_{r,k}^{(p)} = min\{c_{ij}: (i,j) \in I \times J\}$, a więc dla których w macierzy kosztów jednostkowych jest najmniejszy element z jeszcze dostępnych w iteracji (p).

Wygodnie proces wyboru zmiennych jest przedstawić w postaci tablicy przewozów:

$a_i^{(p)}$ – oznacza zmodyfikowany wektor podaży dla i-tego dostawcy w iteracji „p"

$b_j^{(p)}$ – oznacza zmodyfikowany wektor popytu dla j-tego odbiorcy w iteracji „p"

Tablica przewozów:

i/j	1	2	3	4	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$	$a_i^{(6)}$
1	$x_{1,1}^{(3)} = 20$	$x_{1,1}^{(5)} = 70$	$x_{1,3}^{(6)} = 10$		100	100	100	80	80	10	0
2			$x_{2,3}^{(4)} = 70$	$x_{2,4}^{(1)} = 130$	200	70	70	70	0	0	0
3	$x_{3,1}^{(2)} = 100$				100	100	0	0	0	0	0
$b_j^{(0)}$	120	70	80	130	$\sum a_i = \sum b_j = 400$						
$b_j^{(1)}$	120	70	80	0							
$b_j^{(2)}$	20	70	80	0							
$b_j^{(3)}$	0	70	80	0							
$b_j^{(4)}$	0	70	10	0							
$b_j^{(5)}$	0	0	10	0							
$b_j^{(6)}$	0	0	0	0							

<u>(p=1 – iteracja 1):</u>

Aktualna pełna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 6 \\ 12 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(1)} = min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}\} = c_{2,4} = 4$, zatem jako (1) zmienną bazową wybieramy$x_{2,4}^{(1)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego (zob. materiały wykład): $x_{2,4}^{(1)} = min\{a_2^{(0)}, b_4^{(0)}\} = min\{200,130\} = 130$.

Dokonujemy korekty wektorów podaży dla r=2 (drugiego) dostawcy: $a_2^{(1)} = a_2^{(0)} - x_{2,4}^{(1)} = 200 - 130 = 70$, oraz podobnie dla k=4 (czwartego) odbiorcy: $b_4^{(1)} = b_4^{(0)} - x_{2,4}^{(1)} = 130 - 130 = 0$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (w tym wypadku początkowej – zerowej). Zatem: $a_i^{(1)} = \{100,70,100\}$, zaś $b_j^{(1)} = \{120,70,80,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów odbiorców odbiorcę (j=4), bo wyzerowało się jego zapotrzebowanie $J = \{1,2,3\}$. Koniec iteracji (p=1)

<u>(p=2 – iteracja 2):</u>

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 \\ 12 & 11 & 8 \\ 5 & 13 & 9 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(2)} = min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}\} = c_{3,1} = 5$, zatem jako (2) zmienną bazową wybieramy $x_{3,1}^{(2)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{3,1}^{(2)} = min\left\{a_3^{(1)}, b_1^{(1)}\right\} = min\{100,120\} = 100$.

Dokonujemy korekty wektorów podaży dla r=3 (trzeciego) dostawcy: $a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - x_{3,1}^{(2)} = 100 - 100 = 0$, oraz podobnie dla k=1 (pierwszego) odbiorcy: $b_1^{(2)} = b_1^{(1)} - x_{3,1}^{(2)} = 120 - 100 = 20$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (pierwszej). Zatem: $a_i^{(2)} = \{100,70,0\}$, zaś $b_j^{(2)} = \{20,70,80,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów dostawców (i=3)trzeci młyn, bo wyzerowała się jego podaż$I = \{1,2\}$. Koniec iteracji (p=2)

<u>(p=3 – iteracja 3):</u>

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 \\ 12 & 11 & 8 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(3)} = min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}\} = c_{1,1} = 7$, zatem jako (3) zmienną bazową wybieramy $x_{1,1}^{(3)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{1,1}^{(3)} = min\left\{a_1^{(2)}, b_1^{(2)}\right\} = min\{100,20\} = 20$.

Dokonujemy korekty wektorów podaży dla r=1 (pierwszego) dostawcy: $a_1^{(3)} = a_1^{(2)} - x_{1,1}^{(3)} = 100 - 20 = 80$, oraz podobnie dla k=1 (pierwszego) odbiorcy: $b_1^{(3)} = b_1^{(2)} - x_{1,1}^{(3)} = 20 - 20 = 0$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (drugiej). Zatem: $a_i^{(3)} = \{80,70,0\}$, zaś $b_j^{(3)} = \{0,70,80,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów odbiorców (j=1) pierwszą piekarnię, bo wyzerował się jego popyt J= {2,3}. Koniec iteracji (p=3).

<u>(p=4 – iteracja 4):</u>

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$, $c_{r,k}^{(4)} = min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1,2\} \times \{2,3\}\} = c_{2,3} = 8$, zatem jako (4) zmienną bazową wybieramy $x_{2,3}^{(4)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{2,3}^{(4)} = min\left\{a_2^{(3)}, b_3^{(3)}\right\} = min\{70,80\} = 70$.

Dokonujemy korekty wektorów podaży dla r=2 (drugiego) dostawcy: $a_2^{(4)} = a_2^{(3)} - x_{2,3}^{(4)} = 70 - 70 = 0$, oraz podobnie dla k=3 (trzeciego) odbiorcy: $b_3^{(4)} = b_3^{(3)} - x_{2,3}^{(4)} = 80 - 70 = 10$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (trzeciej). Zatem: $a_i^{(4)} = \{80,0,0\}$, zaś $b_j^{(4)} = \{0,70,10,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów nadawców (i=2) drugimłyn, bo wyzerowała się jego podażI= {1}. Koniec iteracji (p=4).

(p=5 – iteracja 5):

Aktualna macierz $C = [C_{ij}] = [15 \quad 16]$, $c_{r,k}^{(5)} = min\{c_{ij}: (i,j) \in \{1\} \times \{2,3\}\} = c_{1,2} = 15$, zatem jako (5) zmienną bazową wybieramy $x_{1,2}^{(5)}$.

Wartość tej zmiennej wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego: $x_{1,2}^{(5)} = min\left\{a_1^{(4)}, b_2^{(4)}\right\} = min\{80,70\} = 70$.

Dokonujemy korekty wektorów podaży dla r=1 (pierwszego) dostawcy: $a_1^{(5)} = a_1^{(4)} - x_{1,2}^{(5)} = 80 - 70 = 10$, oraz podobnie dla k=2 (drugiego) odbiorcy: $b_2^{(5)} = b_2^{(4)} - x_{1,2}^{(5)} = 70 - 70 = 0$.

Dla pozostałych numerów dostawców oraz odbiorców, którzy nie biorą udziału w dostawach w tej iteracji wartości podaży i popytu przepisujemy z iteracji poprzedniej (czwartej). Zatem: $a_i^{(5)} = \{10,0,0\}$, zaś $b_j^{(5)} = \{0,0,10,0\}$.

Skreślamy ze zbioru indeksów nadawców (j=2) drugąpiekarnię, bo wyzerowało się jejzapotrzebowanieJ= {3}. Koniec iteracji (p=5)

(p=6 – iteracja 6) - ostatnia:

Pozostało tylko 10 ton towaru we młynie i=1, które oczywiście należy dostarczyć do j=3 (trzeciej piekarni), zatem ostatnią zmienną bazową jest $x_{1,2}^{(6)} = 10$. Zerują się oczywiście wektory podaży i popytu (zob. tabela przewozów).

- **II etap algorytmu** (sprawdzenie optymalności rozwiązania początkowego).

Aktualne początkowe rozwiązanie bazowe jest następujące:

$X_B^{(0)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 70 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 130 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, zaś wartość łącznych kosztów dostaw wynosi $F(X) = 20 * 7 + 70 * 15 + 10 * 16 + 70 * 8 + 130 * 4 + 100 * 5 = 2930\ [zł]$.

Wyznaczamy tzw. koszty zastępcze $\hat{C}_{ij}$, dla 6 zmiennych bazowych koszty zastępcze są równe kosztom właściwym: $\hat{c}_{11} = c_{11} = 7, \hat{c}_{12} = c_{12} = 15, \hat{c}_{13} = c_{13} = 16, \hat{c}_{23} = c_{23} = 8, \hat{c}_{24} = c_{24} = 4, \hat{c}_{31} = c_{31} = 5$.

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & \\ & & 8 & 4 \\ 5 & & & \end{bmatrix}$$

Natomiast wartości pozostałych kosztów zastępczych znajdujemy zgodnie z procedurą: znaleźć takie dwa wiersze lub takie dwie kolumny dla których można wyznaczyć stałą wspólną różnicę np. pomiędzy wierszem 1 i 2 możemy wyznaczyć wspólna różnicę 16-8=8 i zakładając, ze ona ma być niezmienna dla wszystkich elementów z danej kolumny w tych wierszach znajdujemy wartości pozostałych brakujących kosztów zastępczych rozwiązując proste równania: $7 - \hat{c}_{21} = 8 \rightarrow \hat{c}_{21} = -1$, $15 - \hat{c}_{22} = 8 \rightarrow \hat{c}_{22} = 7$, $\hat{c}_{14} - 4 = 8 \rightarrow \hat{c}_{14} = 12$. Teraz możemy wyznaczyć np. różnicę pomiędzy kolumną 2 i 1, która wynosi: 15-7=8, zatem: $\hat{c}_{32} - 5 = 8 \rightarrow \hat{c}_{32} = 13$. Podobnie np. różnica pomiędzy 3 i 2 kolumną wynosi 1, zatem $\hat{c}_{33} - 13 = 1 \rightarrow \hat{c}_{33} = 14$. Wspólna różnica pomiędzy 3 i 2 wierszem wynosi 6, zatem $\hat{c}_{34} - 4 = 6 \rightarrow \hat{c}_{34} = 10$.

Ostateczna postać macierzy kosztów zastępczych jest następująca:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 12 \\ -1 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 14 & 10 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy teraz macierz różnic postaci:

$$R = [r_{ij}] = C - \hat{C} = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 6 \\ 12 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 15 & 16 & 12 \\ -1 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 14 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 13 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

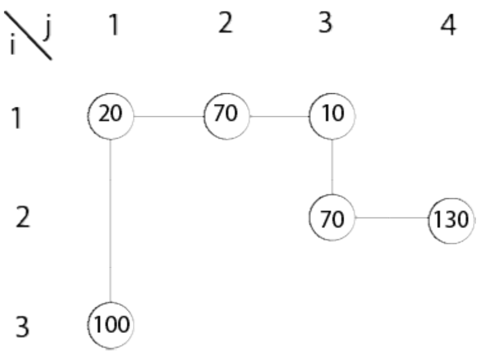
Kryterium optymalności: aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne, gdy wszystkie różnice dla zmiennych niebazowych są nieujemne.

W naszym przypadku są dwie różnice ujemne -6 i -5 (zatem rozwiązanie początkowe, spełniające warunki ograniczające nie jest optymalne).

- **III etap algorytmu** (poprawa rozwiązania).

Iteracja (p=1) poprawy rozwiązania:

Każde rozwiązanie bazowe zadania transportowego możemy przedstawić w postaci grafu (ilustracji graficznej)



Rys.1. Ilustracja początkowego rozwiązania bazowego - graf

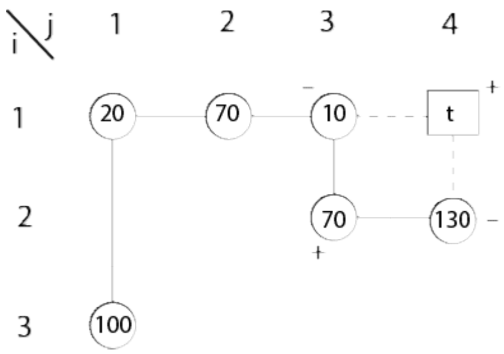
Jest to graf tzw. spójny (czyli każdy wierzchołek jest połączony krawędzią – możemy łączyć tylko w poziomie i pionie jak na rysunku) oraz nie posiadający obszarów zamkniętych (konturów) – graf tzw. bezkonturowy.

Musimy ustalić w celu poprawy rozwiązania bazowego, którą ze zmiennych nie będących bazowymi wprowadzimy do bazy (kryterium wejścia do bazy):

Kryterium wejścia: do bazy wprowadzamy taką zmienną (niebazową), dla której w macierzy różnic mamy największy element (co do wartości bezwzględnej) z ujemnych wartości Rij (czyli najmniejszy ujemny).

W naszym przypadku sad dwa elementy ujemne, a najmniejszy ujemny jest -6 dla zmiennej niebazowejx_{14}. Zatem tą zmienna wprowadzimy do bazy (k=1,l=4) – to jej indeksy.

Wprowadzając tą zmienną do bazy (graf - rys. 1) otrzymujemy w tym grafiekontur - rys.2. Pomiędzy wierzchołkami $(1,3); (1,4); (2,4); (2,3)$. Interesują nas węzły narożne tego konturu (zbiór G). W tym wypadku są to wszystkie 4 węzły powstałego konturu. $G = \{(1,3); (1,4); (2,4); (2,3)\}$ – będzie ich zawsze parzysta liczba (tutaj 4). Następnie stosujemy odpowiednią procedurę cechowania wierzchołków: wierzchołek wprowadzany do bazy otrzymuje cechę (+), następnie na przemian (np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara) pozostałe węzły narożne konturu cechujemy (-/+). Tym samym przy parzystej liczbie - pomiędzy sąsiednimi węzłami narożnymi nie będzie 2 wierzchołków mających tą sama cechę (rys. 2).



Rys. 2. Ilustracja początkowego rozwiązania bazowego – graf z cechowaniem wierzchołków narożnych w konturze.

Taka procedura cechowania rozbiła nam zbiór G na dwa podzbiory: $G^{+} = \{(1{,}4); (2{,}3)\}$ – ocechowanych na plus (+) oraz $G^{-} = \{(1{,}3); (2{,}4)\}$ – ocechowanych na minus (-)

Obliczamy jaką wartość transportu należy przypisać zmiennej wprowadzanej do nowego rozwiązania bazowego zgodnie z kryterium wejścia stosując wzór iteracyjny dla kolejnych iteracji (p): $x_{kl}^{(p)} = \min_{(i,j)\in G^{-}} x_{ij}^{(p-1)}$.

W naszym przypadku dla p=1 iteracji poprawy rozwiązania mamy: $x_{14}^{(1)} = \min_{(i,j)\in G^{-}=\{(1,3);(2,4)\}}\{10; 130\} = 10$.

Modyfikujemy wartości pozostałych zmiennych narożnych ocechowanych na (+), w naszym przypadku dla zmiennej o indeksach (2,3): x_{23} zgodnie ze wzorem: $x_{(i,j)\in G^{+};(i,j)\neq(k,l)}^{(p)} = x_{(i,j)}^{(p-1)} + x_{(k,l)}^{(p)}$- poprzednia wartość zostaje zwiększona o wartość przypisaną zmiennej wprowadzanej do bazy. Dla naszej (p=1) pierwszej iteracji $x_{(2,3)}^{(1)} = 70 + 10 = 80$.

Tak samo modyfikujemy wartości zmiennych narożnych ocechowanych na (-) zgodnie ze wzorem: $x_{(i,j)\in G^{-}}^{(p)} = x_{(i,j)}^{(p-1)} - x_{(k,l)}^{(p)}$ - poprzednia wartość zostaje pomniejszona o wartość przypisaną zmiennej wprowadzanej do bazy. Dla naszej (p=1) pierwszej iteracji mamy dla $x_{(1,3)}^{(1)} = 10 - 10 = 0$ oraz dla $x_{(2,4)}^{(1)} = 130 - 10 = 120$.

Ze zbioru zmiennych bazowych usuwamy tą zmienną, dla której skorygowana wartość dla zmiennych ocechowanych na (-) jest najmniejsza (równa zero). W tym wypadku zmienną x_{13}**(tzw. kryterium wyjścia z bazy)**.

Wartości pozostałych zmiennych w grafie nie będących narożnymi w konturze lub nie należących do konturu nie ulegają zmianie (przepisujemy z poprzedniej iteracji) – aktualnie z wartości początkowych rozwiązania bazowego.

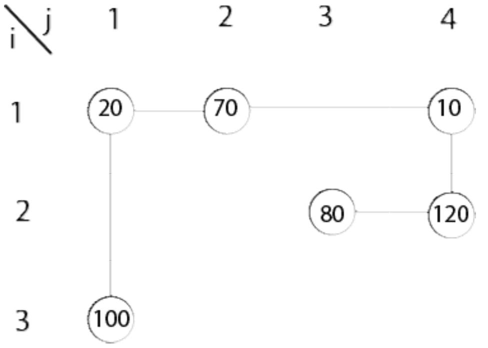
Otrzymujemy po (1) iteracji poprawy rozwiązania nowe drugie rozwiązanie bazowe postaci:

$X_B^{(1)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 70 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 80 & 120 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, zaś wartość łącznych kosztów dostaw wynosi $F(X_B^{(1)}) = 20 * 7 + 70 * 15 + 10 * 6 + 80 * 8 + 120 * 4 + 100 * 5 = 2870\ zł$

<u>**Uwaga:**</u> Warto zauważyć, że $F(X_B^{(1)}) = F(X_B^{(0)}) - |\hat{r}_{14}| * x_{1,4}^{(1)} = 2930 - 6 * 10 = 2870\ [zł]$ – poprzednia wartość funkcji celu dla początkowego rozwiązania bazowego pomniejszona o koszt wynikający ze zmniejszenia wartości funkcji celu wynikający z wprowadzenia nowej bardziej efektywnej zmiennej bazowej.Z interpretacji wskaźnika różnic wynika, że o 6 złotych możemy zmniejszyć koszt na 1 jednostce [1t] mąki, jeżeli będziemy transportować zgodnie z nowym rozwiązaniem tzn. wprowadzimy zmiennądla dostawz 1 do 4.

<u>Iteracja (p=2) sprawdzenie optymalności i poprawa rozwiązania:</u>

Graf nowego rozwiązania bazowego jest następujący:



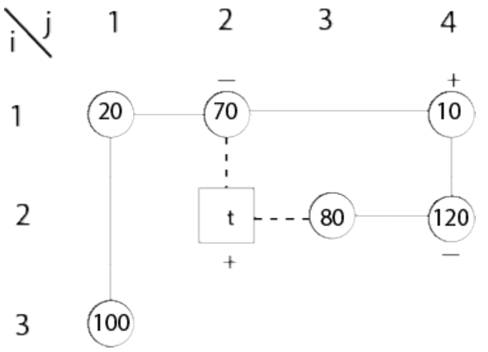
Rys. 3. Nowy graf aktualnego rozwiązania bazowego (p=2).

Macierz kosztów zastępczych oraz macierz różnic jest postaci:

$$\hat{C} = [\hat{c}_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 10 & 6 \\ 5 & 13 & 8 & 4 \\ 5 & 13 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \; R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $r_{22} = -2 < 0$, zatem nie jest to rozwiązanie optymalne.

Poprawiamy rozwiązanie i wprowadzamy nową zmienną do nowej bazy x_{22} (jedyny ujemny współczynnik różnic). Procedurę cechowania wierzchołków narożnych dla nowego konturu przedstawia (rys. 4).



Rys. 4. Graf aktualnego rozwiązania bazowego (p=2) z cechowaniem.

Obliczamy nowe wartości zmiennej wprowadzanej do bazy $x_{22}^{(2)} = \min\{70,120\} = 70$.

Obliczamy skorygowane wartości dla ocechowanej na (+) drugiej zmiennej $x_{14}^{(2)} = 10 + 70 = 80$.

Obliczamy skorygowane wartości dla ocechowanych na (-) zmiennych narożnych konturu $x_{12}^{(2)} = 70 - 70 = 0$ oraz $x_{24}^{(2)} = 120 - 70 = 50$.

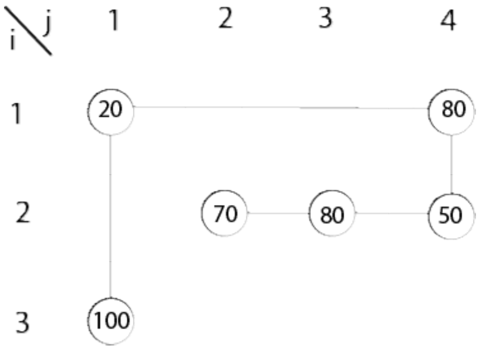
Pozostałe wierzchołki dla zmiennych bazowych się nie zmieniają.

Otrzymujemy trzecie rozwiązanie bazowe:

$X_B^{(2)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 70 & 80 & 50 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, zaś wartość łącznych kosztów dostaw wynosi $F(X_B^{(2)}) = 20 * 7 + 80 * 6 + 70 * 11 + 80 * 8 + 50 * 4 + 100 * 5 = 2870 - 2 * 70 = 2730\ zł$.

Iteracja (p=3) sprawdzenie optymalności i poprawa rozwiązania:

Graf nowego rozwiązania bazowego jest następujący:



Rys. 5. Nowy graf aktualnego rozwiązania bazowego (p=3).

Macierz kosztów zastępczych oraz macierz różnic dla nowego rozwiązania jest postaci:

$$\hat{C} = [\hat{c}_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 11 & 8 & 4 \\ 5 & 11 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \; R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ponieważ wszystkie współczynniki różnic dla zmiennych nie będących bazowymi są >=0, toaktualne rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem optymalnym !!!

Zatem (koniec algorytmu):

$X^{(*)} = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 70 & 80 & 50 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, zaś wartość minimalnych łącznych kosztów dostaw mąki do wszystkich piekarń wynosi $F^{*}_{min}(X^{*}) = 2730\ zł$.

Przykład 2. (zagadnienie minimalizacji pustych przebiegów) – teoria zob. materiały do wykładów

Do siedmiu stacji kolejowych nadchodzą i są odprawiane przesyłki całowagonowe. Wielkości przywozu $p_i$oraz wywozu w_i, a także odległości pomiędzy stacjami podano w tabeli:

Stacja kolejowa	1	2	3	4	5	6	7	p_i
1	0	56	38	132	21	55	24	18
2		0	27	46	31	10	99	15
3			0	22	44	33	77	16
4				0	18	9	66	15
5					0	90	11	19
6						0	44	12
7							0	5
w_i	12	13	22	22	10	12	9	Suma 100

Opracować plan dystrybucji (przemieszczania) pustych wagonów, tak aby łączny wagonokilometraż pustych przebiegów był możliwie najmniejszy.

Rozwiązanie:

Ustalenie numerów stacji, które są nadawcami pustych przebiegów ($w_i - p_i$<0) – więcej wagonów pełnych z przesyłkami przyjeżdża do stacji niż pełnych z niej wyjeżdża, więc niektóre wyjeżdżają puste, oraz numerów stacji, które są odbiorcami pustych przebiegów wagonów ($w_i - p_i$>0). Stacje, dla których ($w_i - p_i = 0$) pomijamy w obliczeniach (ze zbioru rozważanych punktów dostaw), gdyż problem pustych przebiegów dla nich nie występuje.

(i)	$(w_i - p_i)$	Nadawca/Odbiorca (N/O) pustych przebiegów
1	12-18 = -6	(N)
2	13-15 = -2	(N)
3	22-16 = 6	(O)
4	22-15 = 7	(O)
5	10-19 = -9	(N)
6	12-12 = 0	problem pustych przebiegów nie występuje
7	9-5 = 4	(O)

Model matematyczny (zapisany za pomocą zamkniętego zadania transportowego):

Dane: k=3 – liczba nadawców, l=3 – liczba odbiorców.

Zbiór indeksów nadawców $I = \{1\ (i = 1), 2\ (i = 2), 3\ (i = 5)\}$. Zbiór indeksów odbiorców $J = \{1\ (i = 3), 2\ (i = 4), 3\ (i = 7)\}$.

Wektor podaży na puste wagony dla stacji nadawców: $a = (a_1, a_2, a_3) = (6,2,9)$.

Wektor popytu na puste wagony dla stacji odbiorców: b= $(b_1, b_2, b_3) = (6,7,4)$.

Zadanie jest zbilansowane, bo $\sum_{i=1}^{k=3} a_i = \sum_{j=1}^{l=3} b_j = 17$ wagonów pustych należy rozlokować.

Macierz współczynników funkcji celu (odległości pomiędzy stacjami nadawców i odbiorców) $d_{ij} =$

$$\begin{array}{l} \\ stacja\ 1\ (1) \\ stacja\ 2\ (2) \\ stacja\ 5\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} stacja\ 3\ (1) & stacja\ 4\ (2) & stacja\ 7\ (3) \\ 38 & 132 & 24 \\ 27 & 46 & 99 \\ 44 & 18 & 11 \end{bmatrix}$$

Zmienne decyzyjne: $X \geq 0 = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ – liczba pustych wagonów przewożonych pomiędzy stacjami (i-nadawców) oraz (j-odbiorców).

Funkcja celu: (wagonokilometraż pustych przebiegów [wagonów*km]) $F(X) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} * x_{ij} \to min$

$$F(X) = 38 * x_{11} + 132 * x_{12} + 24 * x_{13} + 27 * x_{21} + 46 * x_{22} + 99 * x_{23} + 44 * x_{31} +$$
$$+18 * x_{32} + 11 * x_{33} \to min$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 6 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} & = & 9 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 6 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 7 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = & 4 \\ x_{ij} & \geq & 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie algorytmem transportowym:

Początkowe rozwiązanie – metoda minimalnego elementu macierzy kosztów.

Tablica przewozów:

i/j	1	2	3	$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1	$x_{1,1}^{(4)} = 4$	$x_{1,2}^{(5)} = 2$		6	6	6	6	2	0
2	$x_{2,1}^{(3)} = 2$			2	2	2	0	0	0
3		$x_{3,2}^{(2)} = 5$	$x_{3,3}^{(1)} = 4$	9	5	0	0	0	0
$b_j^{(0)}$	6	7	4	$\sum a_i = \sum b_j = 17$					
$b_j^{(1)}$	6	7	0						
$b_j^{(2)}$	6	2	0						
$b_j^{(3)}$	4	2	0						
$b_j^{(4)}$	0	2	0						
$b_j^{(5)}$	0	0	0						

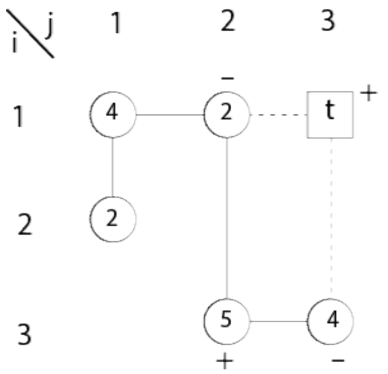
Pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne $X_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $F(X_B^{(1)}) = 4 * 38 + 2 * 132 + 2 * 27 + 5 * 18 + 4 * 11 = 604$ [wagonokilometrów]

Sprawdzenie optymalności:

Macierz kosztów zastępczych: $\hat{c}_{ij} = \begin{bmatrix} 38 & 132 & 125 \\ 27 & 121 & 114 \\ -76 & 18 & 11 \end{bmatrix}$

Macierz różnic: $r_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -101 \\ 0 & -75 & -15 \\ 120 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, zatem wprowadzamy nową zmienną bazową w celu poprawy rozwiązania: x_{13} (największy ujemny - minimalny element w macierzy różnic = -101).

Graf rozwiązania bazowego i procedura cechowania wierzchołków konturu {(1,3);(3,3);(3,2);(1,2)}



Obliczenie wartości zmodyfikowanych wierzchołków dla nowego rozwiązania bazowego:

dla zmiennej wprowadzanej do bazy (ocechowanej na +): $x_{13} = \min_{(i,j)\in G^-}\{x_{12}, x_{33}\} = min\{2,4\} = 2$

dla pozostałych wierzchołków ocechowanych na (+): $x_{32} = 5 + 2 = 7$

dla wierzchołków ocechowanych na (-): $x_{12} = 2 - 2 = 0$, $x_{33} = 4 - 2 = 2$

Pozostałe zmienne bazowe nie ulegają zmianie.

Ponieważ dla $x_{12} = 0$, to usuwamy tą zmienna z bazy.

Powstaje nowe rozwiązanie bazowe $X_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $F\left(X_B^{(1)}\right) = 604 - 2 * 101 = 402$ [wagonokilometrów]

Sprawdzenie optymalności nowego rozwiązania:

Macierz kosztów zastępczych: $\hat{c}_{ij} = \begin{bmatrix} 38 & 31 & 24 \\ 27 & 20 & 13 \\ 25 & 18 & 11 \end{bmatrix}$

Macierz różnic: $r_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 101 & 0 \\ 0 & 26 & 86 \\ 19 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ponieważ wszystkie różnice dla bazowych są nieujemne, to jest to rozwiązanie optymalne.

Rozwiązanie ostateczne optymalne: $x_{11}^* = 4$; $x_{13}^* = 2$; $x_{21}^* = 2$; $x_{32}^* = 7$; $x_{33}^* = 2$ – należy zatem ze stacji (1) dokonać alokacji 4 pustych wagonów do stacji (3) oraz 2 pustych wagonów do stacji (2), ze stacji (2) należy przesłać 2 puste wagony do stacji (3) oraz ze stacji (5) 7 pustych wagonów do stacji (4) i 2 puste wagony do stacji (7). Łączny minimalny wagonokilometraż pustych przebiegów wyniesie F_{min}^* = 402 [wagony*km].

Wykorzystanie algorytmu Simpleks

Przykład 3. Przedsiębiorstwo pośredniczy w handlu jednorodnym towarem pomiędzy dwoma producentami a trzema odbiorcami. Cena zakupu towaru u producenta, koszt transportu do odbiorcy oraz cena sprzedaży Są podane w tabeli. Pośrednik zobowiązał się do zaspokojenia w pełni zapotrzebowania trzeciego odbiorcy.

	O1	O2	O3	Koszt zakupu k_i	Podaż a_i
P1	7	1	4	7	30
P2	3	2	6	8	40
Cena sprzedaży p_j	15	13	14		
Popyt b_j	20	15	40		

a) Ustal plan działania maksymalizujący zysk pośrednika. Podaj wartość przychodu ze sprzedaży, kosztów zakupu, kosztów transportu oraz łączny zyskpośrednika.

<u>Model matematyczny:</u>

Dane:

Macierz zysków jednostkowych $w_{ij} = p_j - k_i - c_{ij}$, zatem: $w_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Wektor podaży nadawców:$a =$ $[30,40]$. Wektor popytu odbiorców b= $[20,15,40]$. Zauważmy, że: $\sum_{i=1}^{2} a_i = 30 + 40 = 70$<$\sum_{j=1}^{3} b_j = 20 + 15 + 40 = 75$, zatem niektórzy odbiorcy nie mogą otrzymać w pełni swego zapotrzebowania.

Zmienne decyzyjne:

$X = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$ – wielkość towaru zakupionego przez pośrednika u i-tego producenta (dostawcy), transportowanego na danej trasie (i,j) oraz sprzedanego j-temu odbiorcy.

Dla potrzeb ZPL wprowadźmy jedno-indeksowe zmienne decyzyjne x_j:

$$X = [x_{11} = x_1 \quad x_{12} = x_2 \quad x_{13} = x_3 \quad x_{21} = x_4 \quad x_{22} = x_5 \quad x_{23} = x_6]$$

oraz wektor współczynników funkcji celu w_j:

$$w = [1 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 0]$$

Funkcja celu: łącznych zysków pośrednika przyjmie postać: $F(x) = \sum_{j=1}^{6} w_i * x_i = 1 * x_1 + 5 * x_2 + 3 * x_3 + 4 * x_4 + 3 * x_5 + 0 * x_6 \rightarrow max$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} x_3 + x_6 & = & 40 & (1) \\ x_1 + x_4 & \leq & 20 & (2) \\ x_2 + x_5 & \leq & 15 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 30 & (4) \\ x_4 + x_5 + x_6 & \leq & 40 & (5) \\ x_{i,i=1,\dots,6} & \geq & 0 & (6) \end{cases}$$

Warunek (1) oznacza realizację w pełni zapotrzebowania 3-go odbiorcy. Warunki (2) i (3) określają ograniczenia dla dostaw możliwych towarów do odbiorców numer 1 i 2. Natomiast warunki (4) i (5) oznaczają nieprzekroczenie podaży dla obu odbiorców.

Sprowadzamy układ warunków ograniczających do postaci kanonicznej (wszystkie warunki jako równania) wprowadzając zmienne swobodne $x_7, \dots, x_{10}$:

$$\begin{cases} x_3 + x_6 & = & 40 & (1) \\ x_1 + x_4 + x_7 & = & 20 & (2) \\ x_2 + x_5 + x_8 & = & 15 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_9 & = & 30 & (4) \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_{10} & = & 40 & (5) \\ x_{i,i=1,\dots,10} & \geq & 0 & (6) \end{cases}$$

Oczywiście współczynniki funkcji celu dla zmiennych swobodnych przyjmujemy równe 0.

Aby uzyskać początkową postać kanoniczna bazową posiadającą 5 wektorów jednostkowych wprowadzamy do (1) warunku dodatkowo jedną zmienną sztuczną s_1, która oczywiście w rozwiązaniu optymalnym powinna być niebazową (równa zero). Wprowadzamy ją do funkcji celu (dla max) ze współczynnikiem bardzo dużym ujemnym ($-M, M \rightarrow \infty$).

Ostateczna postać postaci kanonicznej bazowej (dla 1 rozwiązania bazowego) jest następująca:

$$F(x_1, \dots, x_{10}, s_1) =$$
$$= 1 * x_1 + 5 * x_2 + 3 * x_3 + 4 * x_4 + 3 * x_5 + 0 * x_6 + 0 * x_7 + 0 * x_8 + 0 * x_9 + 0 * x_{10} - M * s_1 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 0 * x_1 + 0 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 + 0 * x_5 + 1 * x_6 + 0 * x_7 + 0 * x_8 + 0 * x_9 + 0 * x_{10} + 1 * s_1 & = & 40 & (1) \\ 1 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 1 * x_4 + 0 * x_5 + 0 * x_6 + 1 * x_7 + 0 * x_8 + 0 * x_9 + 0 * x_{10} + 0 * s_1 & = & 30 & (2) \\ 0 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 + 1 * x_5 + 0 * x_6 + 0 * x_7 + 1 * x_8 + 0 * x_9 + 0 * x_{10} + 0 * s_1 & = & 40 & (3) \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 + 0 * x_5 + 0 * x_6 + 0 * x_7 + 0 * x_8 + 1 * x_9 + 0 * x_{10} + 0 * s_1 & = & 20 & (4) \\ 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 1 * x_4 + 1 * x_5 + 1 * x_6 + 0 * x_7 + 0 * x_8 + 0 * x_9 + 1 * x_{10} + 0 * s_1 & = & 15 & (5) \\ x_{i,i=1,\dots,10}, s_1 & \geq & 0 & (6) \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & s_1 \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizacja algorytmu simpleks (zob. przykład materiały z wykładu).

Iteracja (1):

$$\begin{array}{ccccc} s_1 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array}$$
Baza początkowego rozwiązania: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Początkowe rozwiązanie bazowe. Dla zmiennych bazowych X_B:$s_1 = 40, x_7 = 20, x_8 = 15, x_9 = 30, x_{10} = 40$, zmienne niebazowe X_N zerujemy: $x_1, \dots, x_6 = 0. F(X_B) = -40 * M$ (- nieskończoność).

Tablica simpleksowa:

Baza	c_j	1	5	3	4	3	0	0	0	0	0	-M	$b = t_{i,0}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	s_1	
	c_b	$t_{i,j,i=1,\dots,5;j=1,\dots,11}$											
s_1	-M	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	40
x_7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	20
x_8	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	15
x_9	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	30
x_{10}	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	40
$z_j = \sum(c_{bi} * t_{ij})$		0	0	-M	0	0	-M	0	0	0	0	-M	F(x)= -40*M
$t_{0,j;j=1,\dots,11} = c_j - z_j =$		1	5	**M+3 (max)**	4	3	M	0	0	0	0	0	

Zgodnie z kryterium optymalności wszystkie współczynniki $c_j - z_j$ dla zmiennych niebazowych są dodatnie, zatem początkowe rozwiązanie nie jest optymalne.

Realizacja kryterium wejścia:

Zgodnie z kryterium wejścia do bazy w celu poprawy rozwiązania wprowadzamy zmienną x_3 (maksymalna wartość $c_j - z_j = M + 3$. Kolumna centralna k=3.

Realizacja kryterium wyjścia:

Wyznaczamy ilorazy dla dodatnich elementów z 3 kolumny $t_{i,3}$: $\min_i \left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,3}}\right\} = min\left\{\frac{40}{1}; \frac{30}{1}\right\} = 30 \rightarrow x_9$ usuwamy z bazy bo minimum dla zmiennej bazowej w 4-tym wierszu tablicy simpleksowej. Wiersz (4) jest wierszem centralnym (r=4). Element centralny $t_{r,k} = t_{4,3} = 1$.

Iteracja (2):

Przekształcenie tablicy Simpleksowej:

- wiersz centralny: $t'_{r=4,j} = \frac{t_{4,j}}{t_{r,k}=1} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 30]$

- pozostałe wiersze zgodnie ze wzorem:$t'_{i,j,i\neq r} = t_{i,j} - t_{i,k} * t'_{r,j}$

$$t'_{1,j} = t_{1,j} - 1 * t'_{4,j} =$$

$$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 40] - 1 * [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 30] =$$
$$= [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 10]$$

$t'_{2,j} = t_{2,j} - 0 * t'_{4,j} =$

$$[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 20] - 0 * [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 30] =$$
$$= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 20]$$

$t'_{3,j} = t_{3,j} - 0 * t'_{4,j} =$

$$[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 15] - 0 * [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 30] =$$
$$= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 15]$$

$t'_{5,j} = t_{5,j} - 0 * t'_{4,j} =$

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 40] - 0 * [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 30] =$$
$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 40]$$

Wymiana wektorów w bazie. Baza nowego rozwiązania:$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_1 & x_7 & x_8 & x_3 & x_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

Nowe rozwiązanie bazowe. Dla zmiennych bazowych X_B: $s_1 = 10, x_7 = 20, x_8 = 15, x_3 = 30, x_{10} = 40$, zmienne niebazowe X_N zerujemy.$F(X_B) = -40 * M + 90$ (- nieskończoność)

Nowa tablica Simpleksowa:

	c_j	1	5	3	4	3	0	0	0	0	0	-M	$b = t_{i,0}$
Baza		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	s_1	
	c_b	$t_{i,j,i=1,\dots,5;j=1,\dots,11}$											
s_1	-M	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	10
x_7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	20
x_8	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	15
x_3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	30
x_{10}	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	40
$z_j = \sum(c_{bi} * t_{ij})$		M+3	M+3	3	0	0	-M	0	0	M+3	0	-M	F(x)= -40*M+90
$t_{0,j;\, j=1,\dots,11} = c_j - z_j =$		-M-2	-M+2	0	4	3	**M (max)**	0	0	-M-3	0	0	

Zgodnie z kryterium optymalności jest jeszcze jeden współczynnik $c_j - z_j$ dla zmiennych niebazowych,który jest dodatni (j=6), zatem nowe rozwiązanie dalej nie jest optymalne.

Realizacja kryterium wejścia:

Zgodnie z kryterium wejścia do bazy w celu poprawy rozwiązania wprowadzamy zmienną x_6 (maksymalna wartość $c_j - z_j = M$ (z dodatnich współczynników). Kolumna centralna k=6.

Realizacja kryterium wyjścia:

Wyznaczamy ilorazy dla dodatnich elementów z 6 kolumny $t_{i,6}$: $\min_i \left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,6}}\right\} = min\left\{\frac{10}{1}; \frac{40}{1}\right\} = 10 \rightarrow s_1$pozbywamysię z bazy zmiennej sztucznej. Wiersz r=1 jest wierszem centralnym. Element centralny $t_{r,k} = t_{1,6} = 1$.

Iteracja (3):

Podobnie jak w iteracji (2) przekształcamy tablicę Simpleksową

Wymiana wektorów w bazie. Baza nowego rozwiązania:$B = \begin{array}{ccccc} x_6 & x_7 & x_8 & x_3 & x_{10} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nowe rozwiązanie bazowe. Dla zmiennych bazowych X_B: $x_6 = 10, x_7 = 20, x_8 = 15, x_3 = 30, x_{10} = 30$, zmienne niebazowe X_N zerujemy. $F(X_B) = 90$.

Nowa tablica Simpleksowa:

Baza	c_j	1	5	3	4	3	0	0	0	0	0	-M	$b = t_{i,0}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	s_1	
	c_b	$t_{i,j,i=1,\dots,5;j=1,\dots,11}$											
x_6	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	10
x_7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	20
x_8	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	15
x_3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	30
x_{10}	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	-1	30
$z_j = \sum(c_{bi} * t_{ij})$		3	3	3	0	0	0	0	0	3	0	0	F(x)=90
$t_{0,j;j=1,\dots,11} = c_j - z_j =$		-2	2	0	**4 (max)**	3	0	0	0	-3	0	-M	

Zgodnie z kryterium optymalności dalej są jeszcze współczynniki$c_j - z_j$ dla zmiennych niebazowych, któresą dodatnie (j=2,4,5), zatem nowe rozwiązanie dalej nie jest optymalne.

Realizacja kryterium wejścia:

Zgodnie z kryterium wejścia do bazy w celu poprawy rozwiązania wprowadzamy zmienną x_4 (maksymalna wartość $c_j - z_j = 4$ (z dodatnich współczynników). Kolumna centralna k=4.

Realizacja kryterium wyjścia:

Wyznaczamy ilorazy dla dodatnich elementów z 4 kolumny $t_{i,4}$: $\min_i \left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,4}}\right\} = min\left\{\frac{20}{1}; \frac{30}{1}\right\} = 20 \rightarrow x_7$ usuwamy z bazy. Wiersz r=2 jest wierszem centralnym. Element centralny $t_{r,k} = t_{2,4} = 1$.

Iteracja (4):

Podobnie kolejny raz przekształcamy tablicę Simpleksową (jak w iteracji 2)

Wymiana wektorów w bazie. Baza nowego rozwiązania: $$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_6 & x_4 & x_8 & x_3 & x_{10} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nowe rozwiązanie bazowe. Dla zmiennych bazowych X_B: $x_6 = 10, x_4 = 20, x_8 = 15, x_3 = 30, x_{10} = 10$, zmienne niebazowe X_N zerujemy. $F(X_B) = 170$.

Nowa tablica Simpleksowa:

	c_j	1	5	3	4	3	0	0	0	0	0	-M	b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	s_1	$= t_{i,0}$
Baza	c_b	$t_{i,j,i=1,\dots,5;j=1,\dots,11}$											
x_6	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	10
x_4	4	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	20
x_8	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	15
x_3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	30
x_{10}	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	1	1	-1	10
$z_j = \sum(c_{bi} * t_{ij})$		7	3	3	4	0	0	4	0	3	0	0	F(x)= 170
$t_{0,j;j=1,\dots,11} = c_j - z_j =$		-6	2	0	0	**3 (max)**	0	-4	0	-3	0	-M	

Zgodnie z kryterium optymalności dalej są jeszcze współczynniki $c_j - z_j$ dla zmiennych niebazowych, które są dodatnie (j=2,5), zatem nowe rozwiązanie dalej nie jest optymalne.

Realizacja kryterium wejścia:

Zgodnie z kryterium wejścia do bazy w celu poprawy rozwiązania wprowadzamy zmienną x_5 (maksymalna wartość $c_j - z_j = 3$ (z dodatnich współczynników). Kolumna centralna k=5.

Realizacja kryterium wyjścia:

Wyznaczamy ilorazy dla dodatnich elementów z 5 kolumny $t_{i,5}$: $\min_i \left\{\frac{t_{i,0}}{t_{i,5}}\right\} = min\left\{\frac{15}{1}; \frac{10}{1}\right\} = 10 \rightarrow x_{10}$ usuwamy z bazy. Wiersz r=5 jest wierszem centralnym. Element centralny $t_{r,k} = t_{5,5} = 1$.

Iteracja (5) - ostatnia:

Podobnie kolejny raz przekształcamy tablicę Simpleksową

Wymiana wektorów w bazie. Baza nowego rozwiązania: $$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_6 & x_4 & x_8 & x_3 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nowe rozwiązanie bazowe. Dla zmiennych bazowych X_B: $x_6 = 10, x_4 = 20, x_8 = 5, x_3 = 30, x_5 = 10$, zmienne niebazowe X_N zerujemy. $F(X_B) = 200$.

Nowa tablica Simpleksowa:

	c_j	1	5	3	4	3	0	0	0	0	0	-M	$b = t_{i,0}$
Baza		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	s_1	
	c_b	$t_{i,j,i=1,\ldots,5;j=1,\ldots,11}$											
x_6	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	10
x_4	4	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	20
x_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	1	5
x_3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	30
x_5	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	1	1	-1	10
$z_j = \sum (c_{bi} * t_{ij})$		7	6	3	4	3	0	1	0	6	3	-3	F(x)= -40*M
$t_{0,j;j=1,\ldots,11} = c_j - z_j =$		**-6**	**-1**	0	0	0	0	**-1**	0	**-6**	**-3**	**-M+3**	

Zgodnie z kryterium optymalności wszystkie współczynniki $c_j - z_j$ dla zmiennych niebazowych są jużujemne. Zatem aktualne rozwiązanie bazowe jest optymalne.

Rozwiązanie optymalne:

Zmienne właściwe:

$(x_1^* = x_{11}^* = 0; x_2^* = x_{12}^* = 0; x_3^* = x_{13}^* = 30; x_4^* = x_{21}^* = 20; x_5^* = x_{22}^* = 10; x_6^* = x_{23}^* = 10)$

Zmienne swobodne bilansujące i sztuczne:

$(x_7^* = 0; x_8^* = 5; x_9^* = 0; x_{10}^* = 0; s_1^* = 0)$

Przechodząc na postać macierzową: $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \\ 20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$, $F_{max}(X^*) = 200$ zł.

Należy zatem dostarczyć odbiorcy (j=3) 30 jednostek towaru od producenta (i=1) i 10 jednostek od producenta (i=1). Odbiorca (j=2) otrzyma tylko 10 jednostek (a nie 15) na trasie dostaw od producenta (i=1), zaś odbiorca (j=1) całość zamówienia 20 jednostek na trasie dostaw również od producenta (i=1).