Metody dyskretne optymalizacji wielokryterialnej

Literatura:
Trzaskalik T., Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem, PWE, Warszawa 2008, str. 227-250.
Ishizaka A., Nemery P., Multi-criteria decision analysis, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2013.

Przykład 1. Pewne przedsiębiorstwo logistyczne zamierza zakupić dwa nowe samochody dla swojej floty transportowej. Przedsiębiorstwo bierze pod uwagę 3 warianty decyzyjne reprezentujące 3 modele samochodów: wariant D_1 (samochód 1), wariant D_2 (samochód 2), wariant D_3 (samochód 3). Ponadto postanowiono, że przy zakupie należy się kierować czterema kryteriami decyzyjnymi: ceną, eksploatacją, funkcjonalnością oraz marką.

Przy ocenie wariantów decyzyjnych względem poszczególnych kryteriów decyzyjnych przyjęto następujące oceny werbalne (punktowe) ich preferencji:

Ocena punktowa (werbalna): wariant D_i w porównaniu z wariantem D_j względem rozpatrywanego kryterium jest preferowany	Ocena punktowa (numeryczna)
ekstremalnie	9
bardzo silnie do ekstremalnie	8
bardzo silnie	7
silnie do bardzo silnie	6
silnie	5
umiarkowanie do silnie	4
umiarkowanie	3
równoważnie do umiarkowanie	2
równoważnie	1

Porównując ze sobą warianty decyzyjne (względem przyjętej skali) otrzymano wyniki:

Cena				Eksploatacja				Funkcjonalność				Marka			
	D_1	D_2	D_3		D_1	D_2	D_3		D_1	D_2	D_3		D_1	D_2	D_3
D_1		2		D_1			4	D_1		2	4	D_1			
D_2				D_2	2		5	D_2			3	D_2	5		4
D_3	6	5		D_3				D_3				D_2	3		

Porównanie parami ważności kryteriów względem tej samej skali dało następujące wyniki:

	Cena	Eksploatacja	Funkcjonalność	Marka
Cena		6	2	
Eksploatacja				
Funkcjonalność		9		
Marka	3	8	2	

Stosując metodę **AHP** (Analytic Hierarchy Process, autor: Thomas L. Saaty 1970) wyznaczyć wariant zakupu samochodu najbardziej odpowiadający przedsiębiorstwu logistycznemu.

Do obliczenia współczynnika zgodności $c = \frac{\lambda_{\max} - n}{r \cdot (n-1)}$, określającego: stopień zgodności dla przeprowadzonych porównań (przyjmuje się, że zgodność jest wystarczająca, gdy $c \le 0,1$) przyjąć wartości indeksu losowego „*r*” zgodnie z wartościami podanymi w tabeli (n – liczba wariantów decyzyjnych):

n	3	4	5	6	7	8	9	10
r	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

<u>Rozwiązanie:</u>
Wyznaczenie rankingów częściowych dla rozpatrywanych decyzji względem kryteriów decyzyjnych na podstawie ustalonych punktowych ocen dla macierzy porównań oraz wag dla rankingów kryteriów.

Zauważmy, że np. według kryterium cenowego wariant D_3 jest silnie do bardzo-silnie preferowany względem wariantu D_1, z kolei warianty D_1 i D_2 są według tego kryterium równoważne (porównywalne) ewentualnie umiarkowanie bardziej preferowany jest wariant D_1 (oceny punktowe według tabeli przyznaje się na podstawie ocen eksperckich). Brakujące wartości dla macierzy porównań wyznaczamy następująco: na przekątnej głównej dajemy 1, zaś poza przekątna będą to odwrotności istniejących wartości symetrycznych względem przekątnej.

Cena			
	D_1	D_2	D_3
D_1	1	2	1/6 = 0,17
D_2	0,5	1	1/5 = 0,2
D_3	6	5	1

Eksploatacja			
	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1/2 = 0,5	4
D_2	2	1	5
D_3	1/4 = 0,25	1/5=0,2	1

Funkcjonalność			
	D_1	D_2	D_3
D_1	1	2	4
D_2	1/2 = 0,5	1	3
D_3	1/4 = 0,25	1/3 = 0,33	1

Marka			
	D_1	D_2	D_3
D_1	1	1/5 = 0,2	1/3 = 0,33
D_2	5	1	4
D_2	3	1/4 = 0,25	1

Podobnie wyznaczamy brakujące elementy dla macierzy porównań dla kryteriów decyzyjnych względem siebie. Zauważmy, że względem ocen ekspertów funkcjonalność samochodów jest ekstremalnie preferowana względem eksploatacji (a także marka bardzo silnie do ekstremalnie), natomiast marka i cena w stosunku do funkcjonalności są równoważne (lub umiarkowanie bardziej preferowane).

	Cena	Eksploatacja	Funkcjonalność	Marka
Cena	1	6	2	1/3 = 0,33
Eksploatacja	1/6 = 0,17	1	1/9 = 0,11	1/8 = 0,125
Funkcjonalność	1/2 = 0,5	9	1	1/2 = 0,5
Marka	3	8	2	1

Wyznaczenie znormalizowanych wartości macierzy porównań. Dla macierzy wyjściowej a_{ij} wyznaczamy sumy w kolumnach $\sum_i a_{ij}$ i każdy element macierzy porównań w danej kolumnie dzielimy przez tą sumę. Zauważmy, że suma w unormowanej macierzy porównań w każdej kolumnie powinna dawać 1.

Wagi dla rankingów częściowych względem kryteriów wyznaczamy jako średnia wartość z macierzy unormowanej porównań w danym wierszu. Suma wag też powinna dawać 1.

Cena			
	D_1	D_2	D_3
D_1	1	2	0,17
D_2	0,5	1	0,2
D_3	6	5	1
Suma $\sum_i a_{ij}$	7,5	8	1,37

Macierz wyjściowa

Cena				Średnia z wiersza (wagi rankingów częściowych) względem ceny
	D_1	D_2	D_3	
D_1	0,13	0,25	0,12	0,17
D_2	0,07	0,125	0,15	0,11
D_3	0,8	0,625	0,73	0,72

Po normalizacji

Eksploatacja			
	D1	D2	D3
D1	1	0,5	4
D2	2	1	5
D3	0,25	0,2	1
Suma $\sum_i a_{ij}$	3,25	1,7	10

Macierz wyjściowa

Eksploatacja				Średnia z wiersza (wagi rankingów częściowych) względem eksploatacji
	D1	D2	D3	
D1	0,31	0,29	0,4	0,33
D2	0,61	0,59	0,5	0,57
D3	0,08	0,12	0,1	0,1

Po normalizacji

Funkcjonalność			
	D1	D2	D3
D1	1	2	4
D2	0,5	1	3
D3	0,25	0,33	1
Suma $\sum_i a_{ij}$	1,75	3,33	8

Macierz wyjściowa

Funkcjonalność				Średnia z wiersza (wagi rankingów częściowych) względem funkcjonalności
	D1	D2	D3	
D1	0,57	0,6	0,5	0,56
D2	0,29	0,3	0,375	0,32
D3	0,14	0,1	0,125	0,12

Po normalizacji

Marka			
	D1	D2	D3
D1	1	0,2	0,33
D2	5	1	4
D3	3	0,25	1
Suma $\sum_i a_{ij}$	9	1,45	5,33

Macierz wyjściowa

Marka				Średnia z wiersza (wagi rankingów częściowych) względem marki
	D1	D2	D3	
D1	0,11	0,14	0,06	0,1
D2	0,56	0,69	0,75	0,67
D3	0,33	0,17	0,19	0,23

Po normalizacji

Otrzymujemy macierz dla wag rankingów dla podejmowanych decyzji względem każdego z rozpatrywanych kryteriów decyzyjnych (C-cena, E-eksploatacja, F-funkcjonalność, M-marka)

$$W_D = \begin{bmatrix} & C & E & F & M \\ D_1 & 0{,}17 & 0{,}33 & 0{,}56 & 0{,}1 \\ D_2 & 0{,}11 & 0{,}57 & 0{,}32 & 0{,}67 \\ D_3 & 0{,}72 & 0{,}1 & 0{,}12 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że:
- ze względu na kryterium **„cenowe”** najbardziej preferowany jest wariant D_3 (pierwsze miejsce w rankingu – najwyższa waga 0,72), zaś najgorszy jest wariant D_2 (ostatni w rankingu – waga tylko 0,11).
- ze względu na kryterium **„eksploatacji”** najbardziej preferowany jest wariant D_2 (pierwsze miejsce w rankingu – najwyższa waga 0,57), zaś najgorszy jest wariant D_3 (ostatni w rankingu – waga tylko 0,1).
- ze względu na kryterium **„funkcjonalności”** najbardziej preferowany jest wariant D_1 (pierwsze miejsce w rankingu – najwyższa waga 0,56), zaś najgorszy jest wariant D_3 (ostatni w rankingu – waga tylko 0,12).
- ze względu na kryterium **„marki”** najbardziej preferowany jest wariant D_2 (pierwsze miejsce w rankingu – najwyższa waga 0,67), zaś najgorszy jest wariant D_1 (ostatni w rankingu – waga 0,1).

W taki sam sposób wyznaczamy rankingi ważności dla kryteriów decyzyjnych.

	C	E	F	M
C	1	6	2	0,33
E	0,17	1	0,11	0,125
F	0,5	9	1	0,5
M	3	8	2	1
Suma $\sum_i a_{ij}$	4,67	24	5,11	1,96

Macierz wyjściowa

	C	E	F	M	Średnia z wiersza (wagi dla ważności kryteriów decyzyjnych)
C	0,21	0,25	0,39	0,17	0,26
E	0,04	0,04	0,02	0,06	0,04
F	0,11	0,38	0,2	0,25	0,24
M	0,64	0,33	0,39	0,51	0,47

Po normalizacji

Zauważmy, że najbardziej ważne jest kryterium **„marki”** (pierwsze miejsce w rankingu – najwyższa waga 0,47 – udział aż 47%), później **„cena”** (waga 0,26 – 26%), następnie **„funkcjonalność”** (waga 0,24 – 24%), zaś ostatnie miejsce w rankingu zajmuje kryterium **„eksploatacji”** (waga tylko 0,04 – 4%).

Otrzymujemy zatem macierz dla wag ważności kryteriów decyzyjnych (C-cena, E-eksploatacja, F-funkcjonalność, M-marka)

$$W_K = \begin{matrix} C \\ E \\ F \\ M \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,04 \\ 0,24 \\ 0,47 \end{bmatrix}$$

Ostateczną macierz tzw. względnych wag dla rankingu końcowego wariantów decyzyjnych (uwzgledniającego zarówno ważność kryteriów decyzyjnych jak i ważność wariantów decyzyjnych względem siebie według każdego z kryteriów decyzyjnych) wyznaczamy jako iloczyn obu macierzy wag rankingów częściowych:

$$W = W_D * W_K = \begin{bmatrix} 0,17 & 0,33 & 0,56 & 0,1 \\ 0,11 & 0,57 & 0,32 & 0,67 \\ 0,72 & 0,1 & 0,12 & 0,23 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,04 \\ 0,24 \\ 0,47 \end{bmatrix} = \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,23 \\ 0,44 \\ 0,33 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie według metody AHP z ustaloną subiektywną oceną wariantów i decyzji przyjętych w utworzonych macierzach porównań należy wybrać decyzję D_2 (jest to decyzja najlepsza – pierwsze miejsce w rankingu końcowym, waga 0,44 (44%)), decyzja D_3 jest druga w rankingu (waga 0,33 – 33%). Najgorszą decyzją jest decyzja D_1 (waga 0,23 – 23%).

<u>**Uwaga:**</u> Słabością tej metody to, że ustalając punktowe oceny dla macierzy porównań możemy uzyskać niezgodne przyporządkowania ocen (powodując tym samym nierzetelne – obarczone błędem wyniki końcowe dla rankingów). W tym celu na koniec sprawdza się czy wystąpiła zgodność dla ocen punktowych dla porównań kryteriów decyzyjnych oraz wariantów decyzyjnych. Zaproponowane przez ***T. L. Saaty*** podejście oceny zgodności dla porównań przebiega następująco.

Sprawdzenie zgodności dla porównań dla wariantów decyzyjnych:
Wyznaczamy iloczyny macierzy porównań (pierwotnej) przez wagi ważności wariantów względem danego kryterium.

<u>**Cena:**</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0,17 \\ 0,5 & 1 & 0,2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,17 \\ 0,11 \\ 0,72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,51 \\ 0,34 \\ 2,29 \end{bmatrix}$$

Otrzymany iloczyn dzielimy przez odpowiednie wagi dla wariantów:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0,51/0,17 \\ 0,34/0,11 \\ 2,29/0,72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3,1 \\ 3,18 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy średnią z wartości wektora λ, którą oznaczamy $\lambda_{max} = \frac{3+3,1+3,18}{3} = 3,09$

Do obliczenia współczynnika zgodności stosujemy wzór: $c = \frac{\lambda_{max}-n}{r*(n-1)}$. Do wzoru przyjmujemy wartości indeksu losowego „r” zgodnie z wartościami podanymi w tabeli, gdzie n – to liczba wariantów decyzyjnych.
Dla n=3 wariantów decyzyjnych należy ustalić $r = 0,58$, zaś dla n=4 kryteriów decyzyjnych $r = 0,90$.

$$c_{cena} = \frac{3,09-3}{0,58*(3-1)} = 0,08.$$

Podobnie obliczamy współczynnik zgodności dla porównań wariantów decyzyjnych względem pozostałych kryteriów decyzyjnych.

<u>**Eksploatacja:**</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0,25 & 0,2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,33 \\ 0,57 \\ 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,02 \\ 1,73 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1{,}02/0{,}33 \\ 1{,}73/0{,}57 \\ 0{,}3/0{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}09 \\ 3{,}03 \\ 3{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max} = \frac{3{,}09 + 3{,}03 + 3}{3} = 3{,}04$$

$$c_{eksploatacja} = \frac{3{,}04-3}{0{,}58*(3-1)} = 0{,}03.$$

Funkcjonalność:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0{,}5 & 1 & 3 \\ 0{,}25 & 0{,}33 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}56 \\ 0{,}32 \\ 0{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}68 \\ 0{,}96 \\ 0{,}37 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1{,}68/0{,}56 \\ 0{,}96/0{,}32 \\ 0{,}37/0{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3{,}08 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max} = \frac{3 + 3 + 3{,}08}{3} = 3{,}03$$

$$c_{funkcjonalność} = \frac{3{,}03-3}{0{,}58*(3-1)} = 0{,}03.$$

Marka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}33 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0{,}25 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}67 \\ 0{,}23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}31 \\ 2{,}09 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0{,}31/0{,}1 \\ 2{,}09/0{,}67 \\ 0{,}7/0{,}23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}1 \\ 3{,}12 \\ 3{,}04 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max} = \frac{3{,}1 + 3{,}12 + 3{,}04}{3} = 3{,}09$$

$$c_{funkcjonalność} = \frac{3{,}09-3}{0{,}58*(3-1)} = 0{,}08.$$

Ponieważ wszystkie współczynniki zgodności dla porównań są mniejsze niż 0,1, to oceny punktowy zostały przypisane właściwie i zgodnie.

Podobnie wyznaczamy współczynnik zgodności dla porównań kryteriów decyzyjnych

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 0{,}33 \\ 0{,}17 & 1 & 0{,}11 & 0{,}125 \\ 0{,}5 & 9 & 1 & 0{,}5 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}26 \\ 0{,}04 \\ 0{,}24 \\ 0{,}47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}14 \\ 0{,}17 \\ 0{,}97 \\ 2{,}05 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1{,}14/0{,}26 \\ 0{,}17/0{,}04 \\ 0{,}97/0{,}24 \\ 2{,}05/0{,}47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}38 \\ 4{,}25 \\ 4{,}04 \\ 4{,}36 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max} = \frac{4{,}38 + 4{,}25 + 4{,}04 + 4{,}36}{4} = 4{,}26$$

$$c_{kryteria} = \frac{4{,}26-4}{0{,}90*(4-1)} = 0{,}09.$$

Zatem również współczynnik zgodności dla porównań kryteriów decyzyjnych spełnia warunek poprawnej zgodności przyporządkowania ocen.

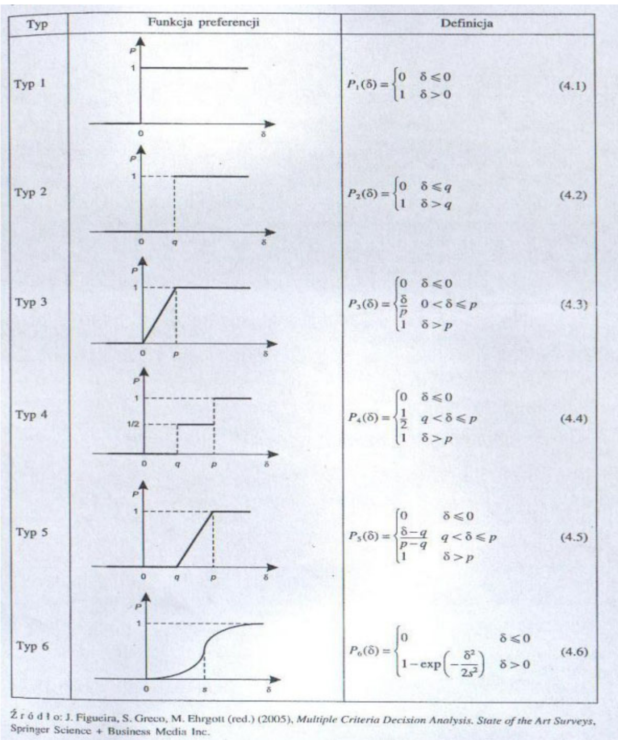
Przykład 2. Wariantami decyzyjnymi są 4 projekty inwestycyjne lokalizacji i budowy nowego centrum logistycznego. Oceniane według 6 kryteriów. Decydent przyjął, że współczynniki ważności dla poszczególnych kryteriów są następujące: w_1=0,2 w_2=0,1 w_3=0,3 w_4=0,1 w_5=0,1 w_6=0,2.
W tabeli podano oceny poszczególnych wariantów decyzyjnych ze względu na przyjęte kryteria:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Wariant (a)	6	10	23	99	1,25	250
Wariant (b)	4	11	22	105	3,5	248
Wariant (c)	4	13	25	95	2,5	249
Wariant (d)	5	12	20	74	1,75	252

Do oceny preferencji wariantów decyzyjnych przyjęto następujące funkcje preferencji (zob. rys. 1). Zakładamy, że kryterium decyzyjne *i-te* jest typu *i-tego* (z funkcją preferencji *i-tego* typu). Dla funkcji preferencji poszczególnych typów decydent ustalił:

- dla typu 2: wartość q=2,
- dla typu 3: wartość p=4,
- dla typu 4: wartości: q=5, p=10,
- dla typu 5: wartość q=1, p=2,
- dla typu 6: wartość s=1.

Stosując metodę **Promethee II** wyznaczyć najlepszy wariant inwestycyjny dla lokalizacji centrum logistycznego.



(rys. 1)

<u>Rozwiązanie:</u>

Funkcje celu dla k-tego kryterium decyzyjnego powinny być stymulantami (im wyższe wartości funkcji celu tym bardziej wariant jest preferowany).

Wyznaczamy różnice $\delta_k(d_i,d_j)=F_k(d_i)-F_k(d_j)$, dla każdego kryterium k=1,2,…,6 oraz każdej pary wariantów decyzyjnych $d_i,d_j=\{a,b,c,d\}$.

$\delta_1(d_i,d_j)$=	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	2	2	1
(b)	-2	0	0	-1
(c)	-2	0	0	-1
(d)	-1	1	1	0

$\delta_2(d_i,d_j)=$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	-1	-3	-2
(b)	1	0	-2	-1
(c)	3	2	0	1
(d)	2	1	-1	0

$\delta_3(d_i, d_j) =$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	1	-2	3
(b)	-1	0	-3	2
(c)	2	3	0	5
(d)	-3	-2	-5	0

$\delta_4(d_i, d_j) =$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	-6	4	25
(b)	6	0	10	31
(c)	-4	-10	0	21
(d)	-25	-31	-21	0

$\delta_5(d_i, d_j) =$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	-2,25	-1,25	-0,5
(b)	2,25	0	1	1,75
(c)	1,25	-1	0	0,75
(d)	0,5	-1,75	-0,75	0

$\delta_6(d_i, d_j) =$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	2	1	-2
(b)	-2	0	-1	-4
(c)	-1	1	0	-3
(d)	2	4	3	0

Ponieważ funkcje celu mogą przyjmować różne wartości, często nieporównywalne dokonujemy przekształcenia różnic δ_k za pomocą funkcji preferencji, które zawsze przekształcają na przedział unormowany wartości [0,1].

Dla każdego kryterium decyzyjnego stosujemy inna funkcje preferencji (zob. rys. 1) – możliwe funkcje do zastosowania.
Wyznaczone wartości każdej z przyjętych funkcji preferencji $P_k\left(\delta_k(d_i, d_j)\right)$, dla każdego kryterium są następujące:

Skokowa funkcja preferencji (typu 1) ze skokiem w 0.

$P_1\left(\delta_1(d_i, d_j)\right) =$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	1	1	1
(b)	0	0	0	0
(c)	0	0	0	0
(d)	0	1	1	0

Skokowa funkcja preferencji (typu 2) ze skokiem w q=2.

$P_2\left(\delta_2(d_i, d_j)\right)=$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	0	0	0
(b)	0	0	0	0
(c)	1	0	0	0
(d)	0	0	0	0

Liniowa funkcja preferencji (typu 3) z parametrem p=4.

$P_3\left(\delta_3(d_i, d_j)\right) =$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	0,25	0	0,75
(b)	0	0	0	0,5
(c)	0,5	0,75	0	1
(d)	0	0	0	0

Skokowa funkcja preferencji (typu 4) z dwoma skokami w q=5 oraz p=10.

$P_4\left(\delta_4(d_i, d_j)\right)$=	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	0	0	1
(b)	0,5	0	0,5	1
(c)	0	0	0	1
(d)	0	0	0	0

Liniowa funkcja preferencji (typu 5) z parametrami: q=1 oraz p=2.

$P_5\left(\delta_5(d_i, d_j)\right)$=	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	0	0	0
(b)	1	0	0	0,75
(c)	0,25	0	0	0
(d)	0	0	0	0

Logistyczna funkcja preferencji (typu 6) z parametrem kształtu s=1.

$P_6\left(\delta_6(d_i, d_j)\right) =$	(a)	(b)	(c)	(d)
(a)	0	0,86	0,39	0
(b)	0	0	0	0
(c)	0	0,39	0	0
(d)	0,86	0,999	0,99	0

W dalszej kolejności wyznaczamy tzw. zagregowane indeksy preferencji:

$$\Pi(d_i, d_j) = \sum_{k=1}^{m=6} w_k * P_k(d_i, d_j)$$

Następnie obliczamy:

- tzw. dodatni przepływ preferencji (jakby preferencji wypływających do pozostałych wariantów z ustalonego wariantu decyzyjnego d_i): $\Phi^+(d_i) = \frac{1}{n-1} * \sum_j \Pi(d_i, d_j)$, gdzie n=4-liczba wariantów decyzyjnych.
- oraz tzw. ujemny przepływ preferencji (jakby preferencji wpływających od pozostałych wariantów do ustalonego wariantu decyzyjnego d_j): $\Phi^-(d_j) = \frac{1}{n-1} * \sum_i \Pi(d_i, d_j)$

$\Pi(d_i, d_j)$=	(a)	(b)	(c)	(d)	$\Phi^+(d_i)$=
(a)	0	0,45	0,28	0,53	$\frac{(0 + 0{,}45 + 0{,}28 + 0{,}53)}{4-1} = \mathbf{0{,}42}$
(b)	0,15	0	0,05	0,33	$\frac{(0{,}15 + 0 + 0{,}05 + 0{,}33)}{4-1} = \mathbf{0{,}18}$
(c)	0,28	0,30	0	0,4	$\frac{(0{,}28 + 0{,}30 + 0 + 0{,}4)}{4-1} = \mathbf{0{,}33}$
(d)	0,17	0,40	0,40	0	$\frac{(0{,}17 + 0{,}40 + 0{,}40 + 0)}{4-1} = \mathbf{0{,}32}$
$\Phi^-(d_j)$=	**0,2**	**0,38**	**0,24**	**0,42**	

W ostatnim kroku wyznaczamy przepływy preferencji Netto jako różnicę: $\Phi(d_i) = \Phi^+(d_i) - \Phi^-(d_i)$

Otrzymujemy dla każdego wariantu decyzyjnego $d_i = \{a, b, c, d\}$ wartości tego wektora:

$$\Phi(d_i) = \begin{array}{c} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}22 \\ -0{,}2 \\ 0{,}09 \\ -0{,}1 \end{bmatrix}$$

Wybieramy ten wariant decyzyjny, który ma największa wartość (dodatnią) przepływów preferencji Netto.
W naszym przypadku jest to wariant pierwszy (a) – przepływy Netto =0,22. W dalszej kolejności należałoby wybrać wariant trzeci (c). Najgorsze według tej metody jest podjęcie decyzji drugiej (b) – najniższe ujemne przepływy preferencji netto wynoszące -0,2 oraz czwartej (d) również ujemne przepływy preferencji (lecz tylko -0,1).

Przykład 3. Przykład zastosowania metody **ELECTRE I**

Pewna firma logistyczna rozważa wprowadzenie do realizacji pewnego przedsięwzięcia. Rozważa się realizację 9 potencjalnych jego wariantów, które są oceniane ze względu na 4 kryteria.
Oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów podaje tabela:

Warianty	Kryteria			
	f_1	f_2	f_3	f_4
a_1	3	6	7	8
a_2	5	4	7	9
a_3	10	2	5	4
a_4	4	8	5	2
a_5	2	5	11	1
a_6	9	6	3	6
a_7	4	9	7	6
a_8	1	7	9	10
a_9	5	3	6	4

W wyniku analizy preferencji decydenta przyjęto, że tzw. „progi weta" dla kolejnych kryteriów są stałe i wynoszą odpowiednio: $v_1=5$ $v_2=7$ $v_3=6$ $v_4=5$.
Współczynniki wagowe ważności kryteriów wynoszą odpowiednio: $w_1=0{,}08$ $w_2=0{,}33$ $w_3=0{,}17$ $w_4=0{,}42$.
Wykorzystując metodę **Electre I** - dokonać agregacji kryteriów oraz wybrać najlepszy wariant realizacji przedsięwzięcia przyjmując próg zgodności na poziomie $s=0{,}83$.

Procedura zastosowania metody:

W metodzie tej podobnie jak w metodzie Promethee II zakłada się, że warianty decyzyjne ze zbioru „D" są oceniane ze względu na „k" maksymalizowane kryteria decyzyjne, zaś każdemu kryterium przypisana jest jego ważność reprezentowaną przez wagi „w_i".

Dla każdej pary wariantów decyzyjnych ustalamy czy ze względu na kryterium „f_i" wariant „**x**" jest nie gorzej oceniany niż wariant „**y**". Wyznacza się w tym celu tzw. **wskaźniki przewyższania**:

$$\varphi_i(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } f_i(x)\geq f_i(y)\\ 0, & \text{gdy } f_i(x)<f_i(y)\end{cases}$$

Wskaźniki przewyższania dla kolejnych kryteriów decyzyjnych są zatem następujące:

Φ_1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
a^2	1	1	0	1	1	0	1	1	1
a^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^4	1	0	0	1	1	0	1	1	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	1	0
a^6	1	1	0	1	1	1	1	1	1
a^7	1	0	0	1	1	0	1	1	0
a^8	0	0	0	0	0	0	0	1	0
a^9	1	1	0	1	1	0	1	1	1

Φ_2	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
a^2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a^3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^4	1	1	1	1	1	1	0	1	1
a^5	0	1	1	0	1	0	0	0	1
a^6	1	1	1	0	1	1	0	0	1
a^7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^8	1	1	1	0	1	1	0	1	1
a^9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Φ_3	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
a^2	1	1	1	1	0	1	1	0	1
a^3	0	0	1	1	0	1	0	0	0
a^4	0	0	1	1	0	1	0	0	0
a^5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^6	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a^7	1	1	1	1	0	1	1	0	1
a^8	1	1	1	1	0	1	1	1	1
a^9	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Φ_4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
a^2	1	1	1	1	1	1	1	0	1
a^3	0	0	1	1	1	0	0	0	1
a^4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^6	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^7	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^9	0	0	1	1	1	0	0	0	1

Następnie wyznaczamy tzw. „**współczynnik zgodności**” określający stopień przewagi wariantu „x” nad wariantem „y” rozumiany jako suma wag dla tych kryteriów, których wartości dla wariantu „x” są nie mniejsze niż dla wariantu „y”:

$$c(x,y)=\sum_{i=1}^{k} w_i \cdot \varphi_i(x,y)$$

Warunek zgodności (w teście zgodności) jest spełniony, gdy współczynnik zgodności jest nie mniejszy niż wartość podanego przez decydenta progu zgodności $s \in [0,5;1]$. W przykładzie przyjęto s=0,83. Przyjęcie takiego poziomu zgodności oznacza, że dla pary (x,y) wariantów decyzyjnych test zgodności jest spełniony, jeżeli wariant „x” jest oceniany nie gorzej (jest co najmniej tak dobry) jak „y” ze względu na oba kryteria: (f_2 i f_4 – suma wag 0,75) oraz co najmniej na jedno z kryteriów (f_1 i f_3 – dodanie wagi co najmniej jednego z tych kryteriów zaczyna przewyższać wartość 0,83).

Macierz współczynników zgodności dla poszczególnych par wariantów decyzyjnych jest następująca:

$$C = 0,08 \cdot \Phi_1 + 0,33 \cdot \Phi_2 + 0,17 \cdot \Phi_3 + 0,42 \cdot \Phi_4$$

C	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0,5	0,92	0,58	0,83	0,92	0,59	0,08	0,92
a^2	0,67	1	0,92	0,67	0,5	0,59	0,67	0,08	1
a^3	0,08	0,08	1	0,67	0,5	0,25	0,08	0,08	0,5
a^4	0,41	0,33	0,5	1	0,83	0,5	0,08	0,41	0,33
a^5	0,17	0,5	0,5	0,17	1	0,17	0,17	0,25	0,5
a^6	0,41	0,41	0,75	0,5	0,83	1	0,5	0,08	0,83
a^7	0,58	0,5	0,92	1	0,83	0,92	1	0,41	0,92
a^8	0,92	0,92	0,92	0,59	0,75	0,92	0,59	1	0,92
a^9	0,08	0,08	0,92	0,67	0,5	0,17	0,08	0,08	1

Zbiór zgodności możemy dla poziomu zgodności s=0,83 zapisać za pomocą zbioru par wariantów decyzyjnych następująco:

$$C_{0,83}=\{(a^1,a^3),(a^1,a^5),(a^1,a^6),(a^1,a^9),(a^2,a^3),(a^2,a^9),(a^4,a^5),(a^6,a^5),(a^6,a^9),(a^7,a^3),(a^7,a^4),(a^7,a^5),$$

$$(a^7,a^6),(a^7,a^9),(a^8,a^1),(a^8,a^2),(a^8,a^3),(a^8,a^6),(a^8,a^9),(a^9,a^3)\}$$

Zbiór zgodności można przedstawić także w postaci równoważnej macierzy binarnej:

C	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
a^2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a^3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^6	0	0	0	0	1	1	0	0	1
a^7	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^8	1	1	1	0	0	1	0	1	1
a^9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Jeżeli para wariantów decyzyjnych spełnia warunek zgodności należy jeszcze sprawdzić, czy spełniony jest warunek **braku niezgodności.** Ma to na celu wyeliminowanie przypadków, gdy co prawda spełniony jest warunek zgodności, ale przynajmniej jedno z kryteriów decyzyjnych dla przeważającego wariantu ma niekorzystną wartość. Wykrycie takich przypadków jest możliwe dzięki zastosowaniu tzw. **progów weta**, których wartość jest ustalana przez decydenta. W naszym przykładzie przyjęto następujące progi weta dla kryteriów decyzyjnych: $v_1=5$, $v_2=7$, $v_3=6$, $v_4=5$.

Warunek braku niezgodności należy sprawdzić jedynie dla tych par wariantów decyzyjnych, które należą do zbioru zgodności. Na przykład dla kryterium decyzyjnego f_1 sprawdzenie braku niezgodności dla wybranych par wariantów decyzyjnych dla ze zbioru zgodności wygląda następująco:

$(a^1,a^3): f_1(a^1)+v_1 < f_1(a^3) \quad (3+5=8<10)$ - niezgodność

$(a^1,a^5): f_1(a^1)+v_1 < f_1(a^5) \quad (3+5=8\geq 2)$ - brak niezgodności

……………………………………………………………..

$(a^8,a^9): f_1(a^8)+v_1 < f_1(a^9) \quad (1+5=6\geq 5)$ - brak niezgodności

$(a^9,a^3): f_1(a^9)+v_1 < f_1(a^3) \quad (5+5=10\geq 10)$ - brak niezgodności

Wyniki obliczeń można przedstawić w postaci macierzowej (tablicowej): {1} oznacza, że dla pary wariantów decyzyjnych stwierdzono wystąpienie niezgodności, {0} – jej brak.

Kryterium f_1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1			1		0	1			0
a^2			0						0
a^3									
a^4					0				
a^5									
a^6					0				0
a^7			1	0	0	0			0
a^8	0	0	1			1			0
a^9			0						

Kryterium f_2	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1			0		0	0			0
a^2			0						0
a^3									
a^4					0				
a^5									
a^6					0				0
a^7			0	0	0	0			0
a^8	0	0	0			0			0
a^9			0						

Kryterium f_3	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1			0		0	0			0
a^2			0						0
a^3									
a^4					0				
a^5									
a^6					1				0
a^7			0	0	0	0			0
a^8	0	0	0			0			0
a^9			0						

Kryterium f_4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1			0		0	0			0
a^2			0						0
a^3									
a^4					0				
a^5									
a^6					0				0
a^7			0	0	0	0			0
a^8	0	0	0			0			0
a^9			0						

Ostateczny zbiór niezgodności D_v można przedstawić w postaci macierzowej. Jedynka {1} występuje dla danej pary wariantów decyzyjnych, gdy stwierdzono niezgodność według co najmniej jednego z kryteriów decyzyjnych:

D_v	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
a^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a^6	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^7	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^8	0	0	1	0	0	1	0	0	0
a^9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

lub równoważnie wypisując jego elementy: $D_v = \left\{(a^1,a^3),(a^1,a^6),(a^6,a^5),(a^7,a^3),(a^8,a^3),(a^8,a^6)\right\}$.

Kolejnym krokiem jest określenie relacji przewyższania $S(s,v)$, a więc zbioru tych par wariantów decyzyjnych, które spełniają warunek zgodności i jednocześnie warunek braku niezgodności, czyli: $S(s,v) = C_s \cap \overline{D}_v$, gdzie zbiór $\overline{D}_v = 1 - D_v$ jest dopełnieniem zbioru niezgodności do całej przestrzeni.

Odpowiednie macierze przedstawiają tablice:

$\overline{D}_v$	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
a^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^6	1	1	1	1	0	1	1	1	1
a^7	1	1	0	1	1	1	1	1	1
a^8	1	1	0	1	1	0	1	1	1
a^9	1	1	1	1	1	1	1	1	1

S	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
a^2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a^3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^6	0	0	0	0	0	1	0	0	1
a^7	0	0	0	1	1	1	1	0	1
a^8	1	1	0	0	0	0	0	1	1
a^9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Elementy zbioru S dla relacji przewyższania możemy także podać wypisując jego elementy:

$S(s,v)=\{(a^1,a^5),(a^1,a^9),(a^2,a^3),(a^2,a^9),(a^4,a^5),(a^6,a^9),(a^7,a^4),(a^7,a^5),(a^7,a^6),(a^7,a^9),(a^8,a^1),(a^8,a^2),$

$(a^8,a^9),(a^9,a^3)\}$.

Ostatnim etapem metody Electre I jest narysowanie na postawie macierzy przewyższania „S" grafów preferencji dla wariantów decyzyjnych – ilustrujących rankingi (wyższość) poszczególnych wariantów decyzyjnych.

Graf możemy skonstruować w dwóch wariantach:

- wariant 1:

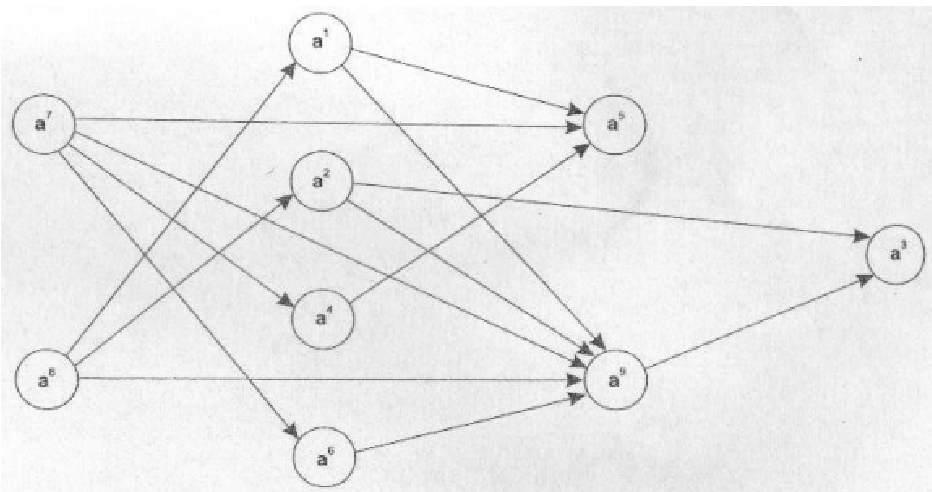
Zaczynamy konstrukcję grafu od wariantów najlepszych (umieszczamy je na najwyższym poziomie grafu – w pierwszej warstwie grafu), są to warianty które nie są przewyższane przez żaden inny wariant. Są to warianty decyzyjne a^7, a^8 - gdyż dla tych wariantów odpowiednio w kolumnie a^7 i a^8 macierzy „S" nie ma żadnej {1} dla żadnego innego wariantu niż on sam.

Na poziomie niższym (druga warstwa grafu) umieszcza się warianty, które są przewyższane tylko przez te z poziomu bezpośrednio wyższego. Są to warianty: a^1, a^2 - przewyższane przez wariant a^8 ({1} w wierszu a^8 oraz kolumnach a^1 i a^2 macierzy „S") oraz a^4, a^6 przewyższane przez wariant a^7. Zauważmy np., że a^8 przewyższa także a^9, ale ponieważ a^9 jest przewyższane także przez a^3, więc tego wariantu nie bierzemy na razie pod uwagę na tym etapie konstrukcji grafu.

Na kolejnym poziomie (kolejnej warstwie) grafu umieszczamy warianty przewyższane tylko przez warianty z poziomu pierwszego lub drugiego. Jest to wariant: a^5 - przewyższany przez warianty: a^1, a^4, a^7 oraz wariant a^9 przewyższany przez warianty: a^1, a^2, a^6, a^7, a^8.

Na najniższym poziomie (w 4 warstwie grafu) należy umieścić wariant a^3 przewyższany przez warianty z poziomu 2 i 3 (a mianowicie a^2 oraz a^9).

Graf preferencji wariantów decyzyjnych przedstawia rysunek:



- wariant 2:

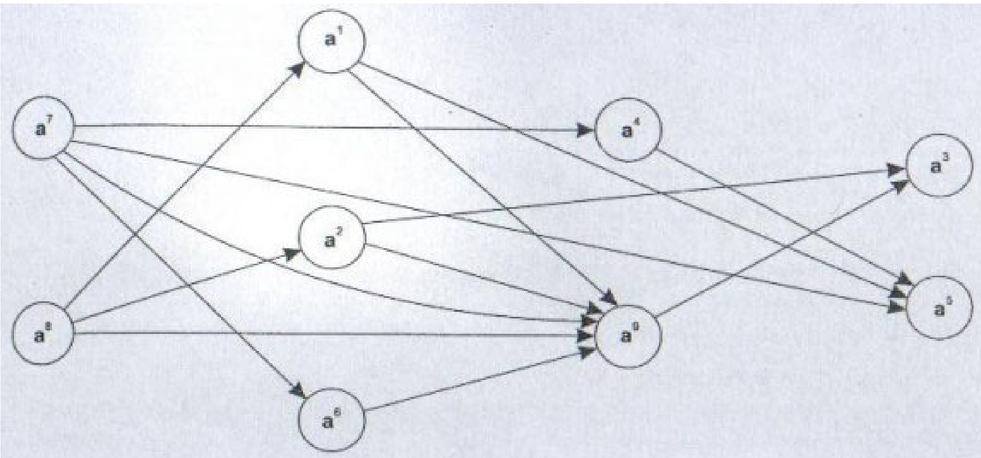
Zaczynamy konstrukcję grafu od wariantów najsłabszych, są to warianty które nie przewyższają żadnego innego wariantu. Są to warianty decyzyjne a^3, a^5 i umieszczamy je w ostatniej warstwie grafu (na poziomie najniższym).

Na poziomie bezpośrednio wyższym umieszcza się warianty, które przewyższają tylko te z poziomu najniższego. Są to warianty: a^4 - przewyższający wariant a^5 oraz a^9 przewyższający wariant a^3.

Na kolejnym poziomie bezpośrednio wyższym (kolejnej warstwie) grafu umieszczamy warianty przewyższane tylko przez warianty z poziomu pierwszego lub drugiego. Jest to wariant: a^5 - przewyższany przez warianty: a^1, a^4, a^7 oraz wariant a^9 przewyższany przez warianty: a^1, a^2, a^6, a^7, a^8.

Na najniższym poziomie (w 4 warstwie grafu) należy umieścić wariant a^3 przewyższany przez warianty z poziomu 2 i 3 (a mianowicie a^2 oraz a^9).

Graf preferencji wariantów decyzyjnych przedstawia rysunek:



W obydwu wariantach najlepszymi wariantami decyzyjnymi są warianty a^7 oraz a^8. Warianty te należy przedstawić decydentowi w celu wybrania ostatecznego wariantu rozwiązania problemu. Najgorszy jest wariant a^3, a także a^5.

Warto zauważyć także, że umieszczenie wariantu a^i na poziomie wyższym niż a^j nie oznacza, że wariant ten należy z całą pewnością uznać za lepszy. Można jedynie stwierdzić, że ze względu na relacje ze wszystkimi innymi wariantami wariant a^i jest silniejszy niż a^j. Zauważmy np., że wariant a^7 umieszczony na najwyższym poziomie (najlepszy) nie jest w relacji przewyższania z wariantem a^3 umieszczonym na najniższym poziomie (a wiec ocenianym w świetle istniejących powiązań za najgorszy). Nie są zatem spełnione warunki aby uznać a^7 za co najmniej tak dobry jak wariant a^3.