# PLANOWANIE SIECIOWE
## Metoda CPM

## ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

**Analiza sieci z funkcją czasu. Metoda ścieżki krytycznej – CPM:**

Metoda CPM *(Critical Path Metod)* jest historycznie najwcześniej opracowaną metodą analizy sieciowej. Umożliwia ona takie zaplanowanie harmonogramu realizacji przedsięwzięcia, przy której jego czas realizacji jest najkrótszy.

Metoda ta wymaga, aby sieć czynności była określona w postaci kanonicznej (deterministyczna jej struktura) oraz aby czasy realizacji wszystkich czynności były zdeterminowane (znane). W sieci takiej czynności są realizowane niezależnie od uwarunkowań losowych.

Kanoniczna **sieć przedsięwzięcia**: $G\langle V, U, t\rangle$ posiada funkcję $t : U \to R^+$, która każdemu łukowi $u = \left\langle v_\alpha, v_\beta \right\rangle \in U$ przypisuje nieujemną liczbę $t_{\alpha\beta} \in R^+$ opisującą czas trwania czynności związanej z łukiem **u**, która zaczyna się zdarzeniem $v_\alpha$ a kończy zdarzeniem $v_\beta$.

# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Z punktu widzenia menadżera istotne są informacje o **czasie realizacji całego przedsięwzięcia** oraz o **czasach realizacji krytycznych czynności** w tym przedsięwzięciu.

Czynność jest **krytyczna** jeśli czas jej realizacji (pełnego wykonania) decyduje o czasie zakończenia przedsięwzięcia w **zaplanowanym terminie**.

Wszystkie potrzebne informacje (o czasie realizacji przedsięwzięcia, czynnościach krytycznych, zapasach czasu dla poszczególnych czynności) mogą być uzyskane metodą **CPM**.

Metoda ścieżki krytycznej oparta jest na następujących założeniach determinujących jednocześnie odpowiedni sposób postępowania przy określaniu krytycznych czynności przedsięwzięcia:

1. Rozpoczęcie realizacji jakiejkolwiek czynności możliwe jest jedynie wtedy, gdy wszystkie czynności ją poprzedzające zostały zrealizowane.

2. Moment w którym rozpoczyna się realizacja całego przedsięwzięcia uznajemy za zerowy, tzn. $t_1 = 0$ (termin rozpoczęcia zdarzenia odpowiadającego wierzchołkowi początkowemu $v_1$ w sieci czynności).

# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

3. Z uwagi na założenie nr 1 **najwcześniejszy możliwy termin** wystąpienia zdarzenia związanego z węzłem $v_\beta \in V, \beta > 1$ obliczamy rekurencyjnie następująco:

$$t_\beta = \max_{\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{ t_\alpha + t_{\alpha\beta} \} \text{ dla } \beta = 2,3,\dots,n \text{ (n – liczebność zbioru } \mathbf{V}\text{)}$$

Czas ten oznacza również najwcześniejszy z możliwych momentów czasowych, w których może być wykonana czynność rozpoczynająca się zdarzeniem $v_\beta$.

Czas $t_\beta$ jest ponadto maksymalnym czasem realizacji wszystkich czynności na każdej ścieżce $|v_1, v_\beta|$ w sieci modelowanej grafem **G**.

Czas realizacji wszystkich czynności ścieżki $|v_1, v_\beta|$ jest rozumiany jako:

$t_{[1,\beta]} = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,\beta]}} t_{ij}$ , gdzie $U_{[1,\beta]}$ jest zbiorem łuków ze zbioru **U**, które tworzą drogę zgodnie skierowaną (czyli ścieżkę) w grafie **G** zaczynającą się węzłem $v_1$ a kończącą węzłem $v_\beta$ .

# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Jeśli $v_n$ oznacza wierzchołek końcowy (wyjściowy) sieci, to $t_n$ jest czasem wykonania (terminem realizacji całego przedsięwzięcia). Jest to **najkrótszy z możliwych czasów zakończenia całego przedsięwzięcia**, jeśli tylko uwzględnimy spełnienie założenia 1.

Drogi skierowane (ścieżki) $[1,n]$ w sieci **G** dla których spełniony jest warunek: $t_{[1,n]} = t_n$ nazywamy **drogami (ścieżkami) krytycznymi**.

Czynności odpowiadające łukom leżącym na drodze krytycznej są zatem czynnościami krytycznymi.

4. Oznaczamy przez $T_\alpha$ - **najpóźniejszy dopuszczalny** termin wystąpienia zdarzenia $v_\alpha \in V$. Czas ten określa również najpóźniejszy z możliwych termin rozpoczęcia realizacji czynności (zaczynającej się zdarzeniem $v_\alpha$), tak aby nie przekroczyć sumarycznego czasu $t_n$ zrealizowania całego przedsięwzięcia (z jednoczesnym zachowaniem założenia 1).

W metodzie CPM najpóźniejsze dopuszczalne czasy wystąpienia dla poszczególnych zdarzeń wyznaczamy rekurencyjnie następująco:
Przyjmujemy, że dla węzła wyjściowego sieci **G** zachodzi: $T_n = t_n$, natomiast dla pozostałych zdarzeń $v_\alpha \in V - \{v_n\}$ czasy te wyznaczamy następująco:

$$T_\alpha = \min_{\beta \in \Gamma_\alpha^+} \{T_\beta - t_{\alpha\beta}\} \text{ dla } \alpha = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Oczywiste jest, że dla każdego zdarzenia $v_\alpha \in V$ spełnione jest $t_\alpha \le T_\alpha$, zaś zdarzenia w których $t_\alpha = T_\alpha$ nazywamy zdarzeniami krytycznymi.

# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

**Rezerwy czasowe w sieciowym modelu realizacji przedsięwzięcia:**

Znajomość czasów w odniesieniu do poszczególnych czynności: $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ przedsięwzięcia modelowanego siecią czynności z grafem **G** umożliwia określenie odpowiednich rezerw czasowych dla kolejnych czynności.

**Dla danej czynności:** $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ **oznaczmy przez:**

$t_{\alpha\beta,\,rozp} = t_\alpha$ - czas najwcześniejszego rozpoczęcia czynności,

$t_{\alpha\beta,\,zak} = t_\alpha + t_{\alpha\beta}$ - czas najwcześniejszego zakończenia czynności,

$T_{\alpha\beta,\,rozp} = T_\beta - t_{\alpha\beta}$ - czas najpóźniejszego rozpoczęcia czynności,

$T_{\alpha\beta,\,zak} = T_\beta$ - czas najpóźniejszego zakończenia czynności,

Ponadto dla kolejnych wierzchołków (zdarzeń) $v_\alpha \in V$ grafu **G** oraz kolejnych jego łuków (czynności) $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ określamy następujące rezerwy czasowe:

- $z(\alpha) = T_\alpha - t_\alpha$ - **luz czasowy** dla zdarzenia $v_\alpha$;

**Luz czasowy** – charakteryzuje rezerwę czasową w zdarzeniu $v_\alpha \in V$ i jest długością przedziału czasu $[t_\alpha, T_\alpha]$, w którym może nastąpić realizacja tego zdarzenia bez zmiany (wydłużenia) czasu realizacji całego przedsięwzięcia.

# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_c(\alpha,\beta) = T_{\alpha\beta,rozp} - t_\alpha = T_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas całkowity** czynności **u**;

**Zapas całkowity** $z_c(\alpha,\beta)$ - jest czasem o jaki można **opóźnić rozpoczęcie** realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (lub **wydłużyć jej realizację**) bez wpływu na **czas wykonania całego przedsięwzięcia**, przy założeniu, że czasy realizacji pozostałych czynności przedsięwzięcia nie ulegają zmianie.

Jeżeli $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ jest czynnością krytyczną (leży na ścieżce krytycznej), to $z_c(\alpha,\beta) = 0$ (**twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe**).

# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_s(\alpha,\beta) = t_\beta - t_{\alpha\beta,zak} = t_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas swobodny** dla czynności **u;**

**Swobodny (wolny) zapas czasowy** $z_s(\alpha,\beta)$ – informuje o ile można **opóźnić** (lub **wydłużyć**) czas realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ **nie zmieniając terminu zajścia** (realizacji) zdarzenia **poprzedzającego** - $v_\alpha$ i **następującego** - $v_\beta$ po danej czynności.

Wykorzystanie tego zapasu **nie ma wpływu** na zapasy związane z czynnościami należącymi do danej ścieżki.

**Uwaga:** mogą istnieć czynności dla których $z_s(\alpha,\beta) = 0$ i które nie leżą na drodze krytycznej.

- $z_w(\alpha,\beta) = z_c(\alpha,\beta) - z_s(\alpha,\beta) = T_\beta - t_\beta$ - **zapas warunkowy** dla czynności **u;**

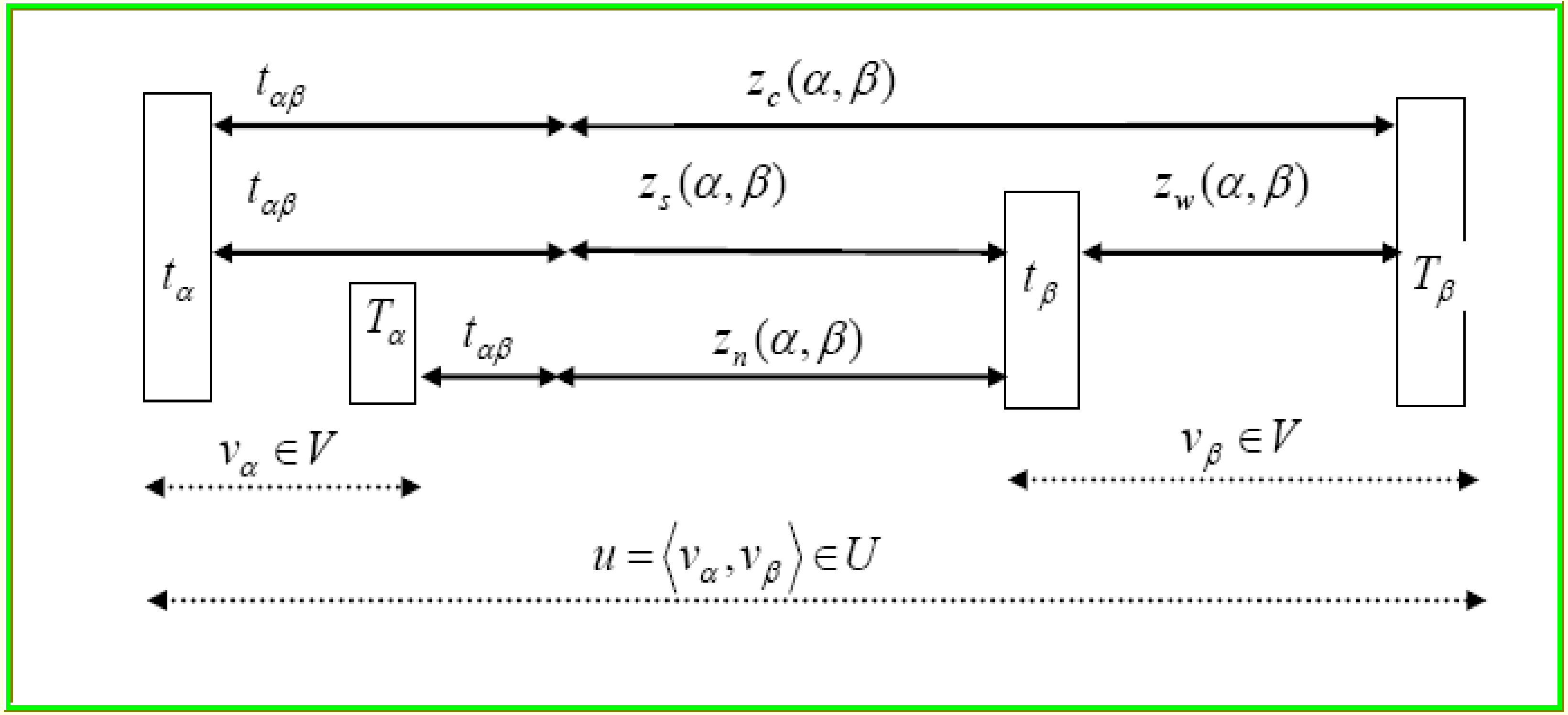
Jest zatem **luzem czasowym** dla zdarzenia kończącego czynność. Ta rezerwa czasu może być wykorzystana dla czynności **bez zmniejszenia zapasów poprzednich** określonych dla czynności **danej ścieżki**.

- $z_n(\alpha,\beta) = \max\{0; t_\beta - T_\alpha - t_{\alpha\beta}\}$ - **zapas niezależny** dla danej czynności **u;**

**Zapas niezależny** $z_n(\alpha,\beta)$ - jest czasem o jaki można opóźnić wykonanie czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ w stosunku do najpóźniejszego terminu $T_\alpha$ i bez naruszenia terminu $t_\beta$.

Wykorzystanie tej rezerwy czasu **nie ma wpływu na zapas** jakiejkolwiek innej czynności przedsięwzięcia.

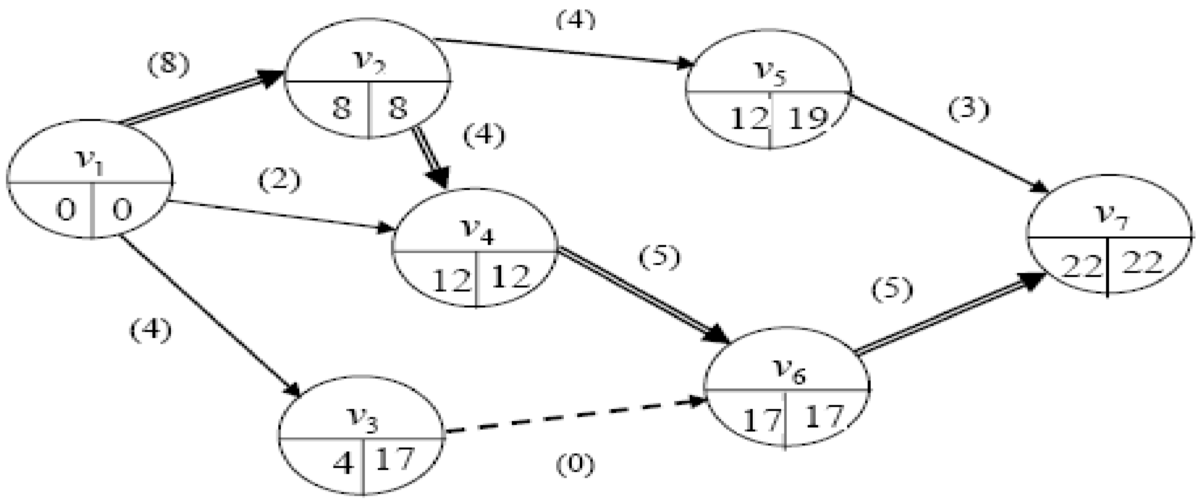
## ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM



# ❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Rezerwy czasowe dla czynności:

| Czynność $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle$ | Czas trwania czynności $t_{\alpha\beta}$ | Czas $t_{\alpha\beta,rozp}$ | Czas $t_{\alpha\beta,zak}$ | Czas $T_{\alpha\beta,rozp}$ | Czas $T_{\alpha\beta,zak}$ | Rezerwa czasowa $z_c(\alpha,\beta)$ | Rezerwa czasowa $z_s(\alpha,\beta)$ | Rezerwa czasowa $z_n(\alpha,\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\langle 1,2 \rangle$ | 8 | 0 | 8 | 0 | 8 | 0 (*) | 0 (*) | 0 (*) |
| $\langle 1,3 \rangle$ | 4 | 0 | 4 | 13 | 17 | 13 | 0 | 0 |
| $\langle 1,4 \rangle$ | 2 | 0 | 2 | 10 | 12 | 10 | 10 | 10 |
| $\langle 2,4 \rangle$ | 4 | 8 | 12 | 8 | 12 | 0 (*) | 0 (*) | 0 (*) |
| $\langle 2,5 \rangle$ | 4 | 8 | 12 | 15 | 19 | 7 | 0 | 0 |
| $\langle 3,6 \rangle$ | 0 | 4 | 4 | 17 | 17 | 13 | 13 | 0 |
| $\langle 4,6 \rangle$ | 5 | 12 | 17 | 12 | 17 | 0 (*) | 0 | 0 (*) |
| $\langle 5,7 \rangle$ | 3 | 12 | 15 | 19 | 22 | 7 | 7 | 0 |
| $\langle 6,7 \rangle$ | 5 | 17 | 22 | 17 | 22 | 0 (*) | 0 | 0 (*) |



# PLANOWANIE SIECIOWE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

## (algorytm metody PERT)

# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

W dalszej części wykładu zaprezentowana zostanie metoda analizy sieci dla przedsięwzięć o zdeterminowanej strukturze (**sieć kanoniczna**), lecz o **losowym** czasie trwania czynności (oceny czasów trwania poszczególnych czynności charakteryzują się pewną niepewnością).

Metoda **PERT** (**Program Evaluation and Review Technique**), której autorami są: ***Malcolm, Roseboom, Clark, Fazar*** - została opracowana w 1958 roku dla potrzeb programu opracowania rakietowego pocisku balistycznego **Polaris**.

Istotnym elementem metody **PERT** jest sposób oceny czasu trwania czynności (zakładamy, że **nie jest** on **deterministyczny** – czyli znany).

Problem ten jest o tyle złożony, że nie mamy możliwości oszacowania tego czasu metodami statystycznymi (gdyż przedsięwzięcia tego typu, które można analizować metodą PERT są zwykle **jednorazowe** i mają charakter **prototypowy**). Metoda ta może być również stosowana dla przedsięwzięć, których czasy trwania czynności mogą podlegać znacznym wahaniom.

W warunkach losowego czasu trwania czynności analiza sieci dla potrzeb planowania i kontroli realizacji przedsięwzięcia wymaga jednak znajomości charakterystyk rozkładu czasu trwania czynności.

## ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Problem ten rozwiązano następująco. Mimo, że rozkład czasu trwania czynności jest nieznany (nie można również go oszacować statystycznie), to można przyjąć pewne jego hipotetyczne własności:

- Jest to rozkład ciągły,
- Jest rozkładem z jednym ekstremum,
- Jego funkcja gęstości (rozkładu) styka się w dwóch punktach (nieujemnych) z osią poziomą (odciętych).

Jednym z takich rozkładów jest rozkład **beta**, który został wybrany przez autorów metody na zasadzie intuicji wynikającej z doświadczeń praktycznych.

Metoda PERT jest więc analityczną procedurą obliczania czasu realizacji przedsięwzięcia wykorzystującą jego sieć: $G = \langle V, U, t \rangle$, w której struktura topologiczna (geometryczna) przedsięwzięcia jest zdeterminowana (znana), zaś losowy (nieznany) czas $t_{\alpha\beta}$ realizacji poszczególnych czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ jest zmienną losową o rozkładzie **beta**.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Rozkład **beta** w metodzie **PERT** został praktycznie uzależniony od kilku parametrów (np. na podstawie oceny ekspertów) posiadających następujące znaczenie praktyczne:

$a_{\alpha\beta}$ - najkrótszy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (tzw. **ocena optymistyczna**);

$m_{\alpha\beta}$ - czas realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ posiadający największe prawdopodobieństwo zaistnienia (tzw. **ocena modalna**);

$b_{\alpha\beta}$ - najdłuższy czas niezbędny do zrealizowania czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (tzw. **ocena pesymistyczna**).

Średni czas oraz wariancję realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ możemy uzależnić od parametrów $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}$ następująco:

(*)

$$E[t_{\alpha\beta}] = \frac{a_{\alpha\beta} + 4m_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}}{6}, \quad D^2[t_{\alpha\beta}] = \left( \frac{b_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}}{6} \right)^2$$

# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

**Algorytm metody PERT:**

Sieć przedsięwzięcia $G = \langle V, U, a, m, b \rangle$ ma trzy funkcje obciążające jej łuki: $a, b, m : U \to R^{+}$, których wartości na łuku czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ reprezentują odpowiednio: $a_{\alpha\beta}$ - optymistyczną, $m_{\alpha\beta}$ - najbardziej prawdopodobną oraz $b_{\alpha\beta}$ - pesymistyczną ocenę czasu $t_{\alpha\beta}$ - trwania takiej czynności.

Parametry te służą do aproksymacji wartości oczekiwanej oraz wariancji czasu trwania czynności (zgodnie ze wzorami (*)).

Podstawowym zadaniem metody **PERT** jest oszacowanie wartości oczekiwanych najwcześniejszych terminów - $t_\alpha$ realizacji zdarzeń $v_\alpha \in V$ w badanej sieci realizacji przedsięwzięcia.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

**Algorytm jest oparty o wzory rekurencyjne i polega na:**

1. Przyjęciu założenia, że $E[t_1] = D^2[t_1] = 0$, gdzie $v_1$ - jest wierzchołkiem początkowym sieci realizacji przedsięwzięcia.
2. Wartość oczekiwaną $E[t_\beta]$ oraz wariancję $D^2[t_\beta]$ najwcześniejszego możliwego terminu zajścia dla pozostałych zdarzeń $\beta = 2,3,\ldots,n$ oblicza się ze wzorów:

$$E[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]\},$$

$$D^2[t_\beta] = \max_{v_\alpha \in \Gamma_\beta^- ; E[t_\beta] = E[t_\alpha] + E[t_{\alpha\beta}]} \{D^2[t_\alpha] + D^2[t_{\alpha\beta}]\},$$

Zauważmy, że wartości oczekiwane czasów $t_\beta$ są wyznaczane analogicznie jak w metodzie CPM. Dlatego obie metody dają identyczne wyniki, jeśli tylko dla każdej czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ spełniony jest następujący warunek: $a_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

**Uwaga:** W metodzie PERT definiuje się także drogi krytyczne [1,n], dla których wartość oczekiwana czasu ich realizacji jest równa średniemu czasowi zakończenia całego przedsięwzięcia:

$$E[t_n] = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,n]}} E[t_{ij}],$$

gdzie: $U_{[1,n]}$ - jest zbiorem łuków ścieżki krytycznej od wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego sieci czynności.

**Uwaga:** Wariancja czasu $t_n$ najwcześniejszej możliwej realizacji zdarzenia końcowego $v_n \in V$ jest równa maksymalnej wariancji ze zbioru wszystkich dróg krytycznych badanej sieci przedsięwzięcia.

Przyjmuje się, że rozkład czasu realizacji całego przedsięwzięcia jest asymptotycznie normalny o średniej $E[t_n]$ i odchyleniu standardowym $\sigma[t_n] = \sqrt{D^2[t_n]}$, czyli korzystając z tego założenia można oszacować prawdopodobieństwo dotrzymania terminu realizacji przedsięwzięcia:

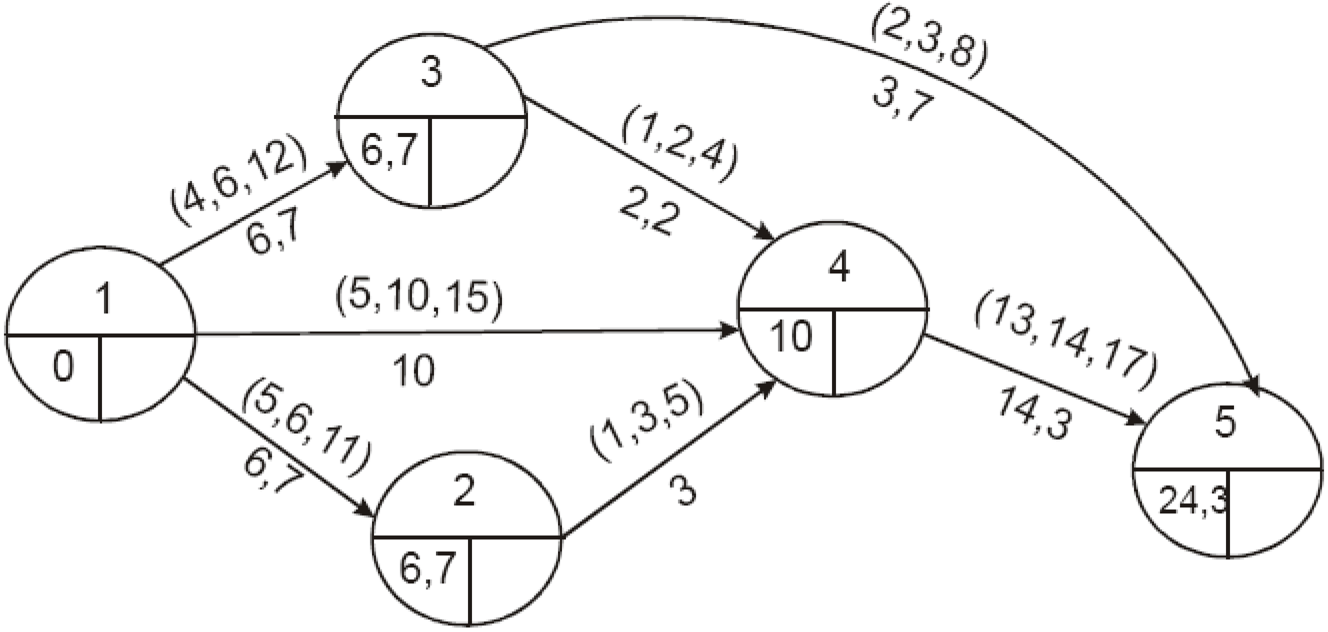
$$P(t_n \le t_{dane}) \approx \Phi\left(\frac{t_{dane} - E[t_n]}{\sigma[t_n]}\right),$$

gdzie: $\Phi$ - jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

**Przykład:**

Dla przedsięwzięcia, którego model sieciowy przedstawiono na rysunku obliczyć średni (oczekiwany) czas jego realizacji, wariancję czasu jego realizacji oraz prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego $T^* = 25$ dni.



# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

Średnie czasy trwania czynności i wariancje dla czynności obliczamy:

$$E[t_{\alpha\beta}]=\frac{a_{\alpha\beta}+4m_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta}}{6},\quad D^2[t_{\alpha\beta}]=\left(\frac{b_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta}}{6}\right)^2$$

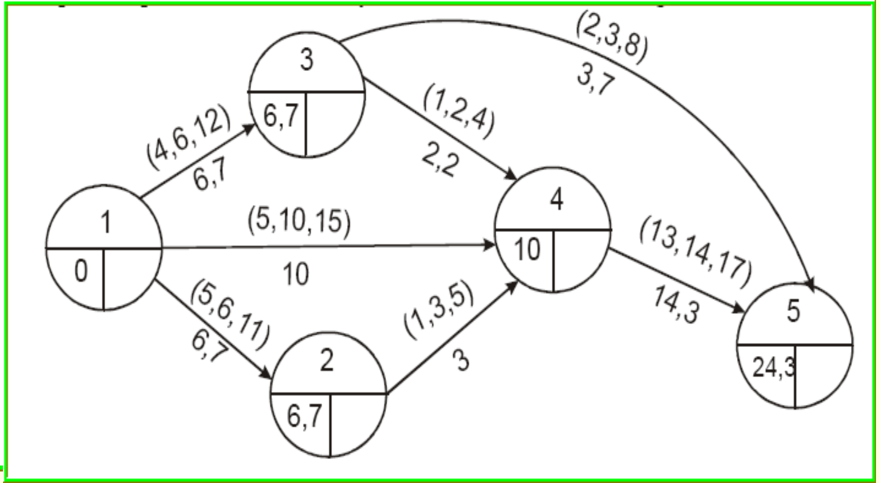
Oczekiwany czas trwania przedsięwzięcia i jego wariancję obliczamy rekurencyjnie:

$$E[t_\beta]=\max_{v_\alpha\in\Gamma_\beta^-}\{E[t_\alpha]+E[t_{\alpha\beta}]\},$$

$$D^2[t_\beta]=\max_{v_\alpha\in\Gamma_\beta^-;\,E[t_\beta]=E[t_\alpha]+E[t_{\alpha\beta}]}\{D^2[t_\alpha]+D^2[t_{\alpha\beta}]\}$$

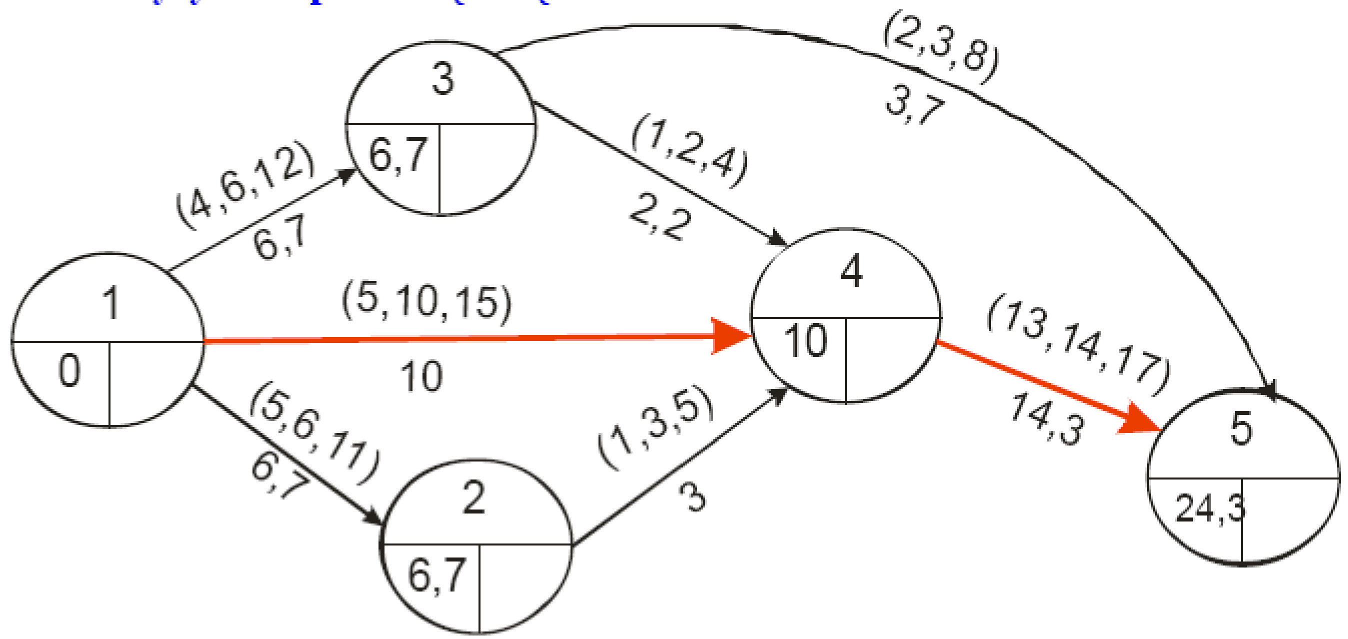
**Tabela obliczonych charakterystyk przedsięwzięcia:**

| Zdarzenie: | $D^2[t_\beta]$ | Czynność: | $D^2[t_{\alpha\beta}]$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | (1,2) | 1 |
| 2 | 1 | (1,3) | 1,8 |
| 3 | 1,8 | (1,4) | 2,8 |
| 4 | 2,8 | (2,4) | 0,4 |
| 5 | 3,2 | (3,4) | 0,25 |
| | | (3,5) | 1 |
| | | (4,5) | 0,4 |



# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

**Ścieżka krytyczna przedsięwzięcia:**



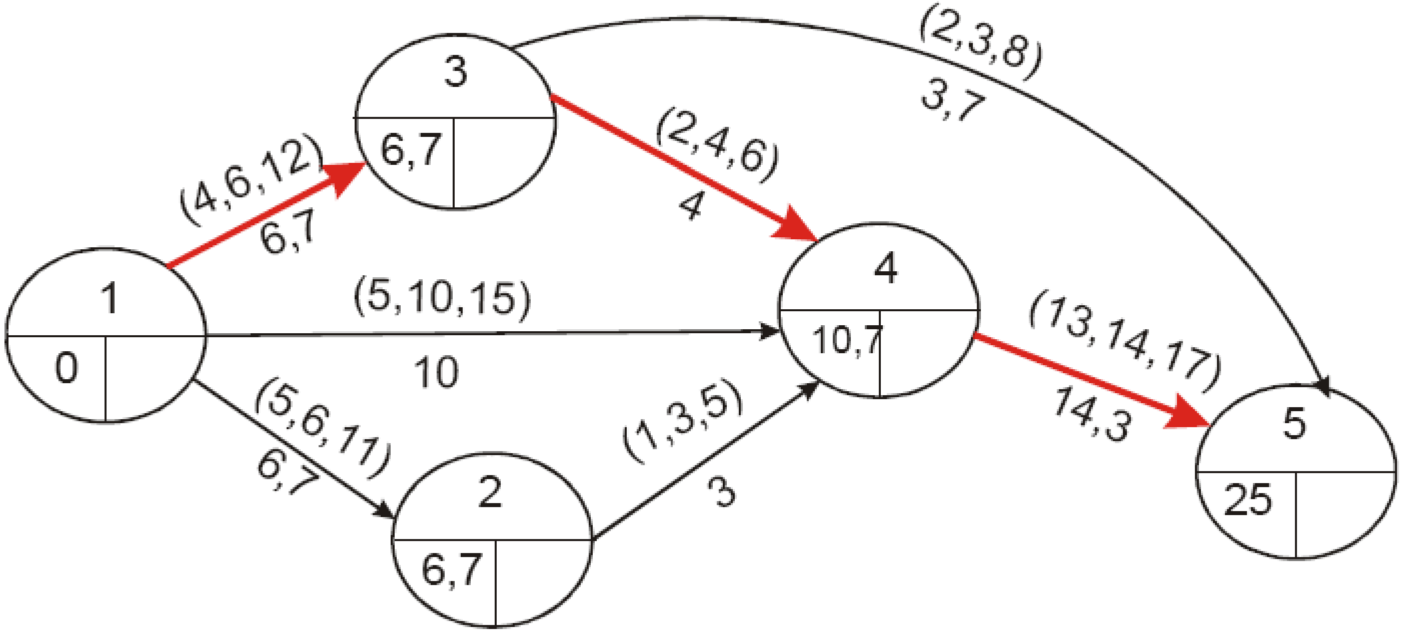

- Prawdopodobieństwo dotrzymania terminu nominalnego = 25 dni wynosi:

$P(t_5 \le 25) \approx \Phi\left(\frac{25-24{,}3}{\sqrt{3{,}2}}\right) \approx \Phi(0{,}39) \approx 0{,}52$ - istnieje przeciętne ryzyko związane z realizacją tego przedsięwzięcia.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI – algorytm PERT

- Jak zmieni się czas wykonania przedsięwzięcia, gdy czynność: **(3,4)** będzie realizowana w czasie: najkrótszym – **2 dni**, modalnym – **4 dni** oraz najdłuższym – **6 dni** ?

  Powstanie nowa ścieżka krytyczna, a oczekiwany termin realizacji ulegnie wydłużeniu do 25 dni.



# ANALIZA CZASOWO – KOSZTOWA REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘĆ

## ❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

W rozważaniach dotyczących sieciowej analizy przedsięwzięć z funkcją czasu (metoda CPM) konstruując optymalny harmonogram realizacji przedsięwzięcia przyjętym **kryterium** optymalności była **minimalizacja czasu** realizacji całego przedsięwzięcia.

W analizie ekonomicznej realizowanych przedsięwzięć niezmiernie ważne jest także **podejście kosztowe** – mające na celu oszacowanie kosztów realizacji badanego przedsięwzięcia.

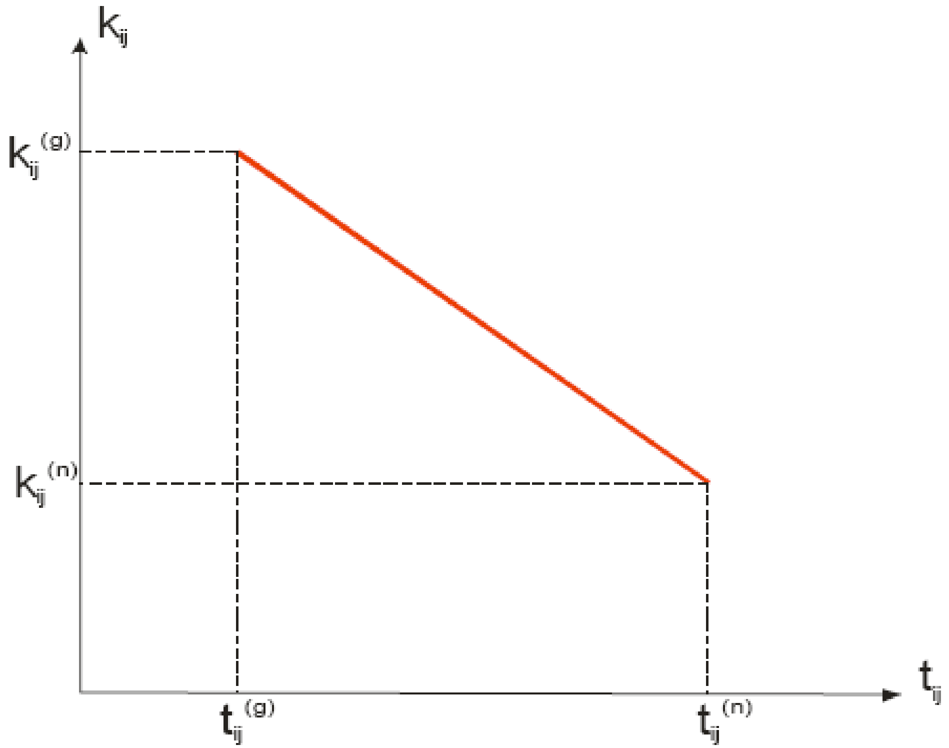
Analiza harmonogramu realizacji przedsięwzięć z uwzględnieniem kosztów ich realizacji nosi nazwę **analizy czasowo – kosztowej** i posiada w planowaniu sieciowym bardzo ważną rolę.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że czas trwania poszczególnych czynności jest ustalony i związany jest on z wykonaniem czynności w zwykłych (normalnych warunkach). Taki czas wykonania czynności będziemy nazywać – **normalnym czasem trwania czynności :** $t_{ij}^{(n)}$, a koszt związany z realizacją czynności w tym czasie nazywać będziemy – kosztem normalnym: $k_{ij}^{(n)}$.

W niektórych przypadkach **czasy** trwania czynności mogą **ulec skróceniu**. Wiąże się to jednak za koniecznym zaangażowaniem dodatkowych środków, co pociąga za sobą **wzrost kosztów** wykonania tej czynności.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

**Najkrótszy** możliwy czas, w którym wykonana dana czynność z wykorzystaniem wszystkich zaangażowanych środków – nazywamy **granicznym czasem** trwania czynności: $t_{ij}^{(g)}$. Koszt realizacji czynności w czasie granicznym nazywamy **kosztem granicznym**: $k_{ij}^{(g)}$.




**Uwaga:**
Zakładamy, że funkcję kosztów w przedziale $\left[t_{ij}^{(g)}, t_{ij}^{(n)}\right]$ można aproksymować funkcją liniową, a skrócenie czasu trwania jednej czynności nie wpływa na czas trwania pozostałych.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

**Przyjmujemy oznaczenia:**

$\Delta t_{ij} = t_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(g)}$ - odcinek czasu o jaki możemy maksymalnie skrócić czynności przedsięwzięcia (wykonywane w czasie normalnym) do czasów granicznych;

$\Delta k_{ij} = k_{ij}^{(g)} - k_{ij}^{(n)}$ - wzrost kosztów realizacji czynności wynikający ze skrócenia czasów trwania czynności do czasów granicznych;

$S_{ij} = \dfrac{k_{ij}^{(g)} - k_{ij}^{(n)}}{t_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(g)}}$ - **średni gradient kosztu** – określa przyrost kosztów wykonania czynności spowodowany skróceniem czasu trwania czynności o jednostkę.

W tak pojmowanym planowaniu sieciowym bardzo ważnym zagadnieniem programowania sieciowego jest wszechstronna analiza przedsięwzięć w aspekcie ekonomicznym oraz możliwość modyfikacji modelu, poprzez kompresję sieci – wynikającą ze **zbyt długiego** dla inwestora lub odbiorcy okresu realizacji przedsięwzięcia.

Względy ekonomiczne powodują, że należy rozpatrzyć techniczne możliwości **skrócenia** wykonania całego przedsięwzięcia, aby **koszty** jego realizacji były **jak najniższe**.

Wiązać się to będzie z ułożeniem takiego programu przyspieszenia, aby największa akceleracja przypadała na te czynności krytyczne, których koszty przyspieszenia będą najniższe.

# ❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

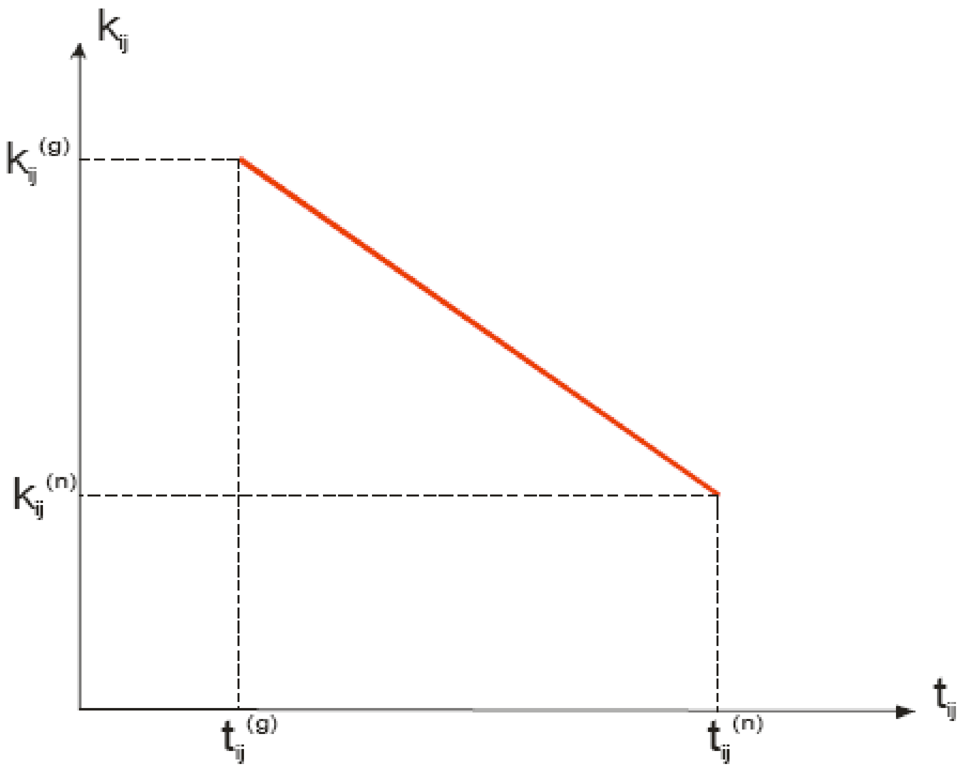
W tego typu analizie rozpatruje się różnego rodzaju koszty składające się na sumaryczny koszt realizacji całego przedsięwzięcia. Uwzględnia się zazwyczaj następujące rodzaje kosztów:

- **Koszty stałe** (dotyczące sporządzenia dokumentacji, pozyskania środków wytwarzania itp.);
- **Koszty bezpośrednie** (dotyczące robocizny, materiałów, maszyn itp. – występują dla każdej czynności przedsięwzięcia);
- **Koszty pośrednie** (związane głównie z czasem realizacji przedsięwzięcia i dotyczą dla przykładu przestojów na stanowiskach pracy, kar za nieterminowość wykonania itp.);
- **Koszty zamrożenia kapitału** (dotyczące nakładów inwestycyjnych, zasobów itp.)

# ❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

W rozważaniach ograniczymy się tylko do kosztów bezpośrednich.

Koszty bezpośrednie wykonania czynności dla dowolnego czasu jej trwania $t_{ij}^{(g)} \le t_{ij} \le t_{ij}^{(n)}$ można obliczyć ze wzoru: $k_{ij} = -a \cdot t_{ij} + b = -s_{ij} t_{ij} + \left(k_{ij}^{(n)} + s_{ij} t_{ij}^{(n)}\right)$



## ❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

Celem analizy czasowo kosztowej jest wyznaczenie takich czasów trwania poszczególnych czynności, dla których całkowity koszt bezpośredni realizacji przedsięwzięcia jest minimalny. Zadanie to można przedstawić za pomocą następującego zadania – ZPL:

$$K = \sum_{(i,j)\in U}\left[\left(k_{ij}^{(n)} + s_{ij}t_{ij}^{(n)}\right) - s_{ij}t_{ij}\right] \rightarrow \min$$

Przy warunkach dla każdej czynności sieci $(i,j)\in U$ :

$$\begin{cases} t_i + t_{ij} \le t_j , \\ t_{ij}^{(g)} \le t_{ij} \le t_{ij}^{(n)} , \\ t_1 = 0, t_n \le T^{(g)} \end{cases}$$

**gdzie:** $T^{(g)}$ - czas graniczny zakończenia przedsięwzięcia.

## ❑ SIECIOWA ANALIZA PRZEDSIĘWZIĘĆ – analiza czasowo - kosztowa

**Uwaga :**

Można również sformułować inaczej problem, tzn. minimalizować łączny czas realizacji całego przedsięwzięcia, tak aby łączne koszty bezpośrednie tego przedsięwzięcia nie przekroczyły pewnego - z góry ustalonego limitu środków. Tak sformułowane zagadnienie prowadzi do następującego zadania ZPL:

$$\begin{cases} t_n \to \min, \\ t_i + t_{ij} \le t_j,\ t_{ij}^{(g)} \le t_{ij} \le t_{ij}^{(n)} \quad \text{dla } (\mathrm{i}, \mathrm{j}) \in U, \\ \sum_{(i,j)\in U} \left[ \left( k_{ij}^{(n)} + s_{ij} t_{ij}^{(n)} \right) - s_{ij} t_{ij} \right] \le K, \end{cases}$$

W ułożeniu programu przyspieszającego wykonanie przedsięwzięcia pomaga wykorzystanie specjalnego algorytmu analizy czasowo-kosztowej znanego pod nazwą: **CPM - COST**.

Zastosowanie algorytmu kompensacji sieci zostanie omówione na następującym przykładzie.